Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *2021*

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2021

1.1 *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:*

Schnittpunkt S_y mit $f(0)$:

$f(0) = -e^{2 \cdot 0x} + 4e^0 = -1 + 4 = 3$ ➔ $S_Y(0|3)$

Nullstellen mir $f(x) = 0$

$-e^{2x} + 4e^x = 0$ | $\cdot e^{-2x}$

$-1 + 4e^{-x} = 0$

$4e^{-x} = 1$

$e^{-x} = \frac{1}{4}$ | ln

$-x = ln\left(\frac{1}{4}\right) = ln\,(4)$ | $:3$

$x = -\frac{1}{3}ln\,(4)$ ➔ $N(ln(4)\,|0)$ ➔ $N(ln\,(4)|0)$

1.2 *Bestimmung von $f'(x)$:*

$f(x) = -e^{2x} + 4e^x$

$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x$ | $2e^x$ ausklammern

$f'(x) = 2e^x(2 - e^x)$ **q.e.d.**

Extrempunkte mit $f'(x) = 0$:

$2e^x(2 - e^x) = 0$

$(2 - e^x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$e^x = 2$

$x = \ln\,(2)$

$f(ln\,(2)) = -(e^{ln(2)})^2 + 4 \cdot e^{ln(2)}$

$f(ln\,(2)) = -4 + 8 = 4$ ➔ $P(ln(2)\,|4)$

Art des Extremums mit $f''(x)$:

$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x$

$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^x$ | $4e^x$ ausklammern

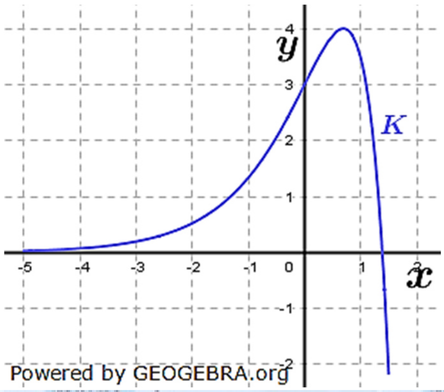
$f''(x) = 4e^x(1 - e^x)$

$f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{\ln(2)}(1 - e^{\ln(2)}) = 8(1 - 2 =< 0$

Der Extrempunkt $P(ln(2)\,|4)$ ist ein Hochpunkt.

1.3 *Zeichnung des Graphen von $f(x)$:*

Die Funktionsgleichung in den WTR eingeben, Wertetabelle anzeigen lassen und Punkte in KO-System übertragen.



1.4 *Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im $1.$ Quadranten einschließt:*

$A_1 = \int_0^{ln\,(4)}(-e^{2x}+4e^x)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x}+4e^x\right]_0^{ln\,(4)}$

$= -\frac{1}{2}e^{\ln(4)^2}+4e^{\ln(4)}-\left(-\frac{1}{2}+4\right) = -8+16-3{,}5 = 4{,}5$

Mittelwert von f auf $[0; ln\,(4)]$:

$\overline{m} = \frac{1}{\ln(4)}\cdot\int_0^{\ln(4)}(-e^{2x}+4e^x)dx = \frac{1}{\ln(4)}\cdot 4{,}5$

Wegen $\frac{1}{\ln(4)} \neq 2$ ist der Mittelwert nicht das Doppelte von A_1.

1.5.1 *Mögliche Werte für c:*

Aus der Graphik von Aufgabenteil 1.3 ergibt sich, dass c für $x<0$ nur Werte $0<f(x)<3$ annehmen kann.
Somit kann c für $x>$ auich nur Werte $0<f(x)<3$ annehmen.

1.5.2 *Strecke $\overline{PQ}$ für $c=1$:*

Wir benötigen die Schnittpunkte von f mit $y=1$:

$f(x) = 1 = -e^{2x}+4e^x$

$e^{2x}-4e^x = -1$

$e^{2x}-4e^x+1 = 0$

$e^{x_{1,2}} = 2\pm\sqrt{4-1}$ | p/q-Formel

$e^{x_1} = 2+\sqrt{3};\quad e^{x_2} = 2-\sqrt{3}$

$x_1 = \ln\,(2+\sqrt{3}) \approx 1{,}317$

$x_2 = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) \approx -1{,}317$

$P(-1{,}317|1);\quad Q(1{,}317|1)$

P und Q sind symmetrisch zur y-Achse, somit halbiert die y-Achse die Strecke $\overline{PQ}$.

1.6 $g(x) = f(x)+f(-x)$

$g(x) = -e^{2x}+4e^x-e^{-2x}+4e^{-x}$

Prüfung auf Achsensymmetrie mit $g(x) = g(-x)$

$g(-x) = -e^{-2x}+4e^{-x}-e^{2x}+4e^x = g(x)$

Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung A2/2021

2.1 *Begründung einer Funktionsgleichung für den Abstand des Gletscherendes bezogen auf das Jahr 2012:*

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der Gletscher pro Jahr um $200\,m$ zurückzieht. Damit haben wir eine Änderungsrate von $-0{,}2\frac{km}{a}$, die Steigung der Funktionsgleichung. Das Gletscherende lag 2012 noch $7\,km$ vom Fundort entfernt, was dem „Anfangsbestand" des Abschmelzens in 2012 entspricht.

2.2.1 *Bestimmung von $v(71)$:*

$v(71) = 7{,}56\cdot10^{-6}\cdot71^2-2{,}27\cdot10^{-4}\cdot71+0{,}11 = 0{,}132$

Interpretation im Sachkontext:

In 2021 zieht sich der Gletscher etwa $132\,m$ zurück.

2.2.2 *Prüfung einer Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $115\,m$ pro Jahr zwischen 1950 und 2021:*

$\overline{v} = \frac{1}{71-0}\int_0^{71} 7{,}56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4}t + 0{,}11\,dt =$

$= \frac{1}{71}\left[\frac{7{,}56\cdot10^{-6}t^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot10^{-4}t^2}{2} + 0{,}11t\right]_0^{71} = \frac{1}{71}\left(\frac{7{,}56\cdot10^{-6}\cdot71^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot10^{-4}\cdot71^2}{2} + 0{,}11\cdot71\right)$

$= 0{,}115$

Mit Hilfe von v ist somit belegbar, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa $115\,m$ pro Jahr talwärts bewegt hat.

2.2.3 *Sachkontext für die Lösung einer Gleichung:*

Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

Lösung A3/2021

3.1 *Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt $P2$ erreicht:*

Die Zeit entspricht exakt einer halben Periode der Sinusschwingung.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{5}\pi = T$

$\frac{p}{2} = \frac{1}{5}\pi = 0{,}63$

Nach etwa $0{,}63\,s$ erreicht die Kugel zum ersten mal den Punkt $P2$.

3.2 *Bestimmung der Beschleunigung $a(0{,}2)$:*

$a(t) = v'(t) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \cos(5t) = 0{,}25 \cdot \cos(5t)$

$a(0{,}2) = 0{,}25\cos(1) = 0{,}135$

$0{,}2\,s$ nach dem Loslassen hat die Kugel erstmals eine Beschleunigung von $0{,}135\,\frac{m}{s^2}$.

Mittlere Beschleunigung innerhalb der ersten $0{,}2$ Sekunden.

$\overline{a} = \frac{1}{0{,}2}\cdot\int_0^{0{,}2} a(t)\,dt = \frac{1}{0{,}2}\cdot\big(v(0{,}2) - v(0)\big) = \frac{0{,}42-00}{0{,}2} = 2{,}1$

Die mittlere Beschleunigung in den ersten $0{,}2$ Sekunden betrug $2{,}1\,m/s^2$.

3.3.1 *Nachweis der Funktionsgleichung für die Bogenlänge b:*

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg eine Stammfunktion der Geschwindigkeit.

$b(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{0{,}5}{5}\cos(5t) + C = -0{,}1\cos(5t) + C$

Nach einem Viertel der Periodendauer, also zum Zeitpunkt $\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ befindet sich die Kugel im tiefsten Punkt.

Dort gilt: $b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.

$b\left(\frac{\pi}{10}\right) = -0{,}1\,cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + C = 0$

$-0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$

Damit ist die gesuchte Funktion $b(t) = -0{,}1\cdot cos\,(5t)$. **q.e.d.**

3.3.2 *Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens:*
Länge des Bogens zum Zeitpunkt $t = 0$:
$|b(0)| = 0{,}1$
Für die Länge eines Bogens gilt:
$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180\,°}$
$\alpha = \frac{b \cdot 180\,°}{\pi \cdot r} = \frac{0{,}1 \cdot 180\,°}{\pi \cdot 0{,}4} = 14{,}3\,°$
Der Auslenkwinkel beträgt etwa $14{,}3\,°$.

Lösung A4/2021

4.1 *Ermittlung eines Wertes von k sowie der Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn:*

$f(t) = c \cdot e^{kt}$		
$f(20) = 99{,}14 = c \cdot e^{20k}$	|	Punktprobe mit $P(20\mid 99{,}14)$
$f(1600) = \frac{1}{2} \cdot f(0) = c \cdot e^{1600k}$	|	Punktprobe zur Halbwertzeit
$f(0) = c \cdot e^{0} = c$	|	Anfangsbestand
(I) $99{,}14 = c \cdot e^{20k}$		
(II) $\frac{1}{2} \cdot c = c \cdot e^{1600k}$	|	$:c$
$0{,}5 = e^{1600k}$	|	ln
$ln\,(0{,}5) = 1600k$	|	$:1600$
$k = -\frac{ln(2)}{1600} = -0{,}000433217$		
$k \to (I)$		
(I) $99{,}14 = c \cdot e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}$	|	$:e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}$
$c = \frac{99{,}14}{e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}} = 100$		

Die Masse der Probe zu Beobachtungsbeginn war $100\,g$.

4.2 *Erläuterung eines Sachkontextes:*

$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$ | $\cdot f(0)$
$f(0) - f(t) = 0{,}9 \cdot f(0)$
$f(t) = f(0) - 0{,}9 \cdot f(0) = 0{,}1 \cdot f(0)$
Mit der Formel lässt sich der Zeitpunkt t bestimmen, zu dem nur noch $10\,\%$ des Anfangsbestandes vorhanden sind bzw. $90\,\%$ zerfallen sind.

4.3.1 *Zeitpunkt eines stärksten Zerfalls von Radium und momentane Änderungsrate des selben:*
Stärkste Abnahme bzw. Zunahme findet in Wendepunkten statt.
$f(t) = 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f'(t) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f''(t) = (4{,}332 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
Wendepunkte mit $f''(t) = 0$
$0{,}2815 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t} = 0$
Exponentialfunktionen können nicht Null werden.

Betrachtung an den Rändern des Systems:
$f'(0) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{0} = -649{,}8 \cdot 10^{-4}$
$f'(\infty) = 0$
Die Funktion ist streng monoton fallend, deshalb liegt der Zeitpunkt des stärksten Zerfalls von Radium zu Beobachtungsbeginn mit etwa $-0{,}065\frac{g}{a}$.

4.3.2 Bestand zum Zeitpunkt t: $f(t)$
Bestand a Jahre später: $f(t+a)$
Anteil von $f(t+a)$ an $f(t)$:
$\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}(t+a)}}{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}} = e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} a}$
Somit hängt der Anteil nur vom Wert von a ab.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1/2021

1.1.1 Prallt eine Kugel auf einem Stift auf, gibt es nur 2 Möglichkeiten: Die Kugel wandert nach links oder nach rechts.
Da es nur 2 Möglichkeiten gibt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment.
Die Wiederholungen des Experiments sind stochastisch unabhängig (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts wandert, bleibt gleich). Daher handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

X = Anzahl der Fälle, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach rechts wandert.
Mögliche Werte von X: $0; 1; 2; 3; 4$
Hinweis: Alternativ könnte X auch als die Anzahl der Fälle definiert werden, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach links wandert.

1.1.2 A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach, wenn die Kugel entweder viermal oder dreimal nach rechts läuft.
$P(A) = P(X = 4) + P(X = 3)$
X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$.
$P(X = 4) + P(X = 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.
Der Fall tritt ein, wenn die Kugel nicht viermal nach rechts oder viermal nach links läuft.
$P(B) = 1 - P(X = 4) - P(X = 0) = 1 - 0{,}0625 - 0{,}0625 = 0{,}875$

1.2 *Prüfung einer Stichprobe:*
Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$ für defekte Galtonbretter. Gesucht wird der Stichprobenumfang.
$B_{n;0,05}(X \geq 1) \geq 0{,}9$
$1 - B_{n;0,05}(X = 0) \geq 0{,}9$
$B_{n;0,05}(X = 0) < 0{,}1$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n < 0{,}1$
$0{,}95^n < 0{,}1 \quad | \quad ln$
$n \cdot ln(95) < ln\ (0{,}1) \quad | \quad ln(95)$
$n > \frac{\ln\ (0{,}1)}{\ln\ (0{,}95)} \rightarrow \quad n > 44{,}8$
Es müssen mindestens 45 *Galton-Bretter überprüft werden. Die Aussage ist somit falsch.*

1.3 *Wahrscheinlichkeit für ein schräg aufgestelltes Galtonbrett:*
Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Fälle an, an denen die Kugel nach links abprallt.
Z ist binomialverteilt mit $n = 8$ und unbekanntem p.
Die Kugel landet im mittleren Fach, wenn die Kugel viermal nach links und viermal nach rechts abprallt.
Bekannt: $B_{8;p}(Z = 4) = 0{,}1$

$\binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$p^4 \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{700}$ | $\sqrt[4]{\;}$

$p \cdot (1-p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}}$

$-p^2 + p - 0{,}1944 = 0$

$p^2 - p + 0{,}1944 = 0$

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}1944}$ | p/q-Formel

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}2358$

$p_1 = 0{,}736;\quad p_2 = 0{,}2642$

Da $p > 0{,}5$ sein muss (die Wahrscheinlichkeit ist aufgrund der Kipplage des Galton-Brettes größer als $0{,}5$) kommt nur $p = 0{,}736$ in Frage.

Lösung A2/2021

2.1 A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
$\Omega = \{g; g; \overline{g}; \overline{g}; \overline{g};\}$ g=gewählt; $\overline{g}$=nicht gewählt.
$P(A) = 0{,}76^2 \cdot (1 - 0{,}76)^3 = 0{,}008$

B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}76$
$B_{4;0,76}(X \le 3) = 0{,}6664$

C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}76$
$B_{20;0,76}(12 \le X \le 17) = B_{20;0,76}(X \le 17) - B_{20;0,76}(X \le 11) = 0{,}8595$

2.2 Anzahl Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler bei Stichprobenumfang von 136.
$\frac{3}{4} \cdot 136 = 102$
Binomialverteilung mit $n = 136$ und $p = 0{,}76$
$B_{136;0,76}(X = 102) = 0{,}076$

2.3.1 *Wahrscheinlichkeit für zufällig ausgewählten Wähler der Partei M, kein Briefwahl:*
Bedingte Wahrscheinlichkeit.
M: Wähler hat Partei M gewählt
B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt
Es ist bekannt: $P(B) = 0{,}9$ und $P(M) = 0{,}26$
$8\,\%$ der Briefwähler wählen Partei M: $P(B \cap M) = 0{,}08 \cdot 0{,}26 = 0{,}0232$
Gesucht: $P_M(\overline{B}) = \frac{P(M \cap \overline{B})}{P_M}$

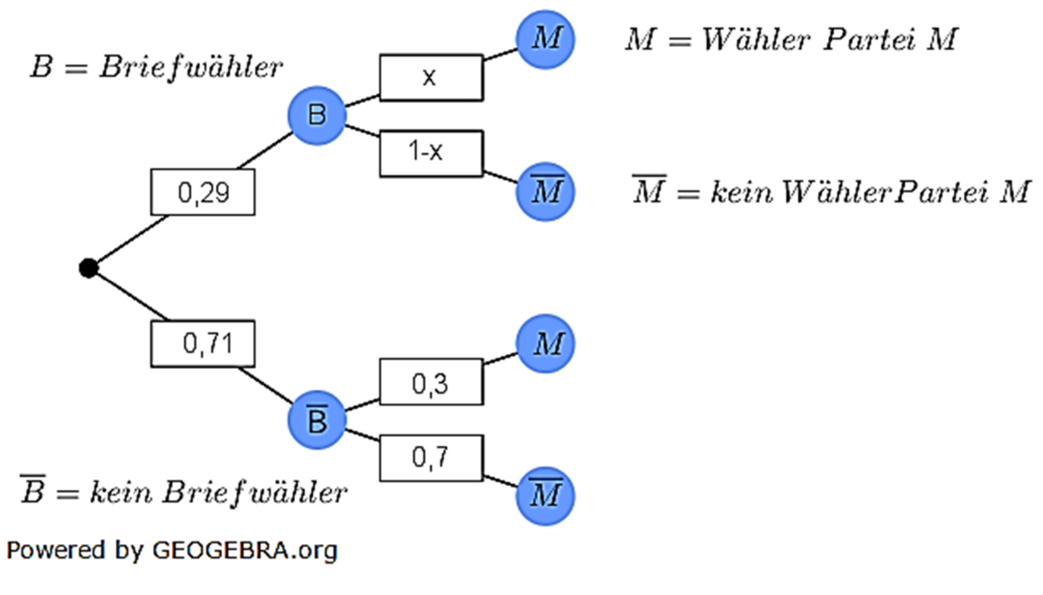
Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	$\sum$
B	0,0232	0,2668	0,29
$\overline{B}$	0,2368	0,4732	0,71
$\sum$	0,26	0,74	1,00

$P_{\overline{B}}(M) = \frac{0{,}2368}{0{,}26} = 0{,}9108$

2.3.2 Entscheidung ob
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit $29\,\%$, bzw. $26\,\%$ gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau $30\,\%$ betragen.“
wahr oder falsch ist.

Ein Baumdiagramm für diese Prüfung hat folgendes Aussehen:



Gesucht ist der Wert von x, so dass $P(M) = 0{,}26$ ergibt.
$0{,}29 \cdot x + 0{,}71 \cdot 0{,}3 = 0{,}26$
$0{,}29 \cdot x = 0{,}047$
$x \approx 0{,}1621$
Wenn die Aussage stimmt, müsste gelten:
$P_B(M) = 0{,}1621$
Bei den Bedingungen in Aufgabe 2.3.1 gilt: $P_B(M) = \frac{0{,}0232}{0{,}29} = 0{,}08$
Da $0{,}1621 > 0{,}08$ ist, ist die Aussage wahr.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil4 – Vektorgeometrie

Lösung A1/2021

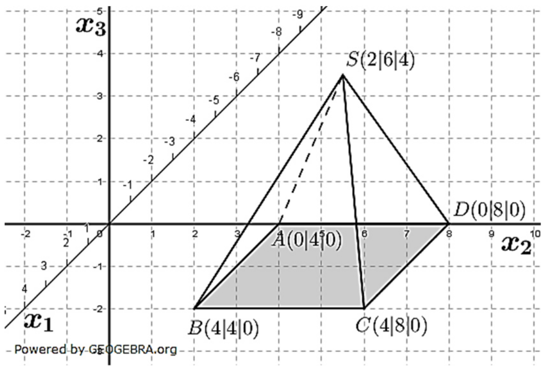
1.1 *Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$:*

Ermittlung des Schnittpunktes der Diagonalen der quadratischen Grundfläche. Dies ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spitze liegt $4\,LE$ senkrecht über diesem Schnittpunkt. Somit hat der Punkt die Koordinaten $S(2|6|4)$.

1.2 *Pyramide im räumlichen Koordinatensystem:*



1.3 *Kosten einer Beschichtung:*

Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke und insgesamt vier Mal vorhanden. Die Gesamtfläche errechnet sich aus:

$$A_{Mantel} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix}\right|$$

$$A_{Mantel} = 2 \cdot \sqrt{16^2 + 8^2} = 16 \cdot \sqrt{5}\, m^2$$

Kosten K:

$$K = A_{Mantel} \cdot 1500 = 16 \cdot \sqrt{5}\ m^2 \cdot 1500 \frac{€}{m^2} = 53666\,€.$$

Die Beschichtung kostet $53.666\,€$.

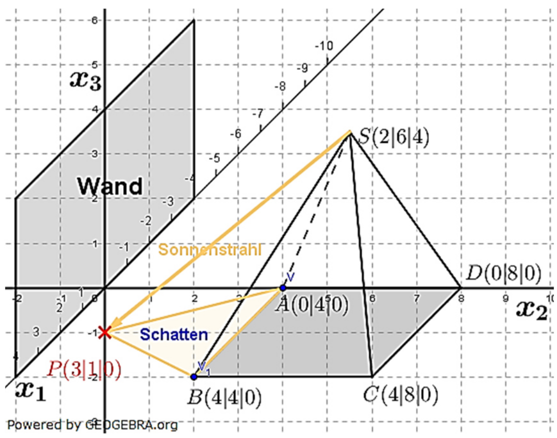
1.4 *Untersuchung eines Schattens:*

Wir untersuchen den Schattenwurf der Pyramiden-Spitze.

Der Sonnenstrahl folgt der Geraden s mit

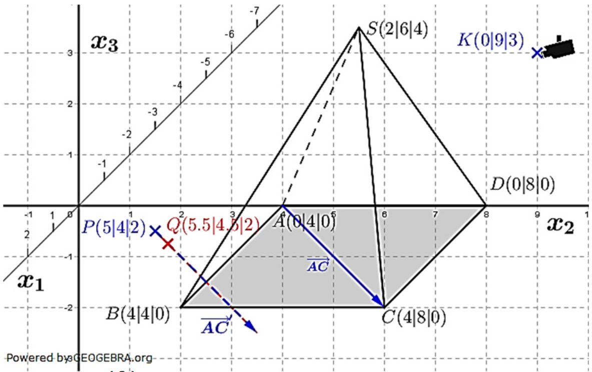
$$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Beim Auftreffen des Sonnenstrahls auf dem Boden ist die x_3-Koordinate des Schattenpunktes 0.



$4-8r=0$
$r=\frac{1}{2}$
$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$
Der Auftreffpunkt des Schattens in der x_1x_2-Ebene liegt vor der x_1x_3-Ebene. Somit trifft der Pyramidenschatten nicht auf die fensterlose Wand.

1.5 *Koordinaten des Punktes Q, an dem ein Objekt von einer Kamera erstmalig erfasst werden kann:*



Gleichung der Geraden h, auf der sich der Punkt P bewegt:
$h\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$
Der gesuchte Punkt Q entspricht dem Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E, die durch die Punkte K,S und C verläuft.

$k\cdot\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{KS}\times\overrightarrow{KC}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
$E\colon\ x_1+x_2+x_3=d$
Einsetzen von $K(0|9|3)$: $d=12$
$E\colon\ x_1+x_2+x_3=12$
$E\cap h$:
$x_1=5+4r;\quad x_2=4+4r;\quad x_3=2$
$5+4r+4+4r+2=12$
$8r+11=12$
$8r=1$
$r=\frac{1}{8}$
$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5{,}5\\4{,}5\\2\end{pmatrix}$
Ab der Position $Q(5{,}5|4{,}5|2)$ kann die Kamera das Objekt erfassen.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Lösung A2/2021

2.1 *Entfernung des Flugzeugs vom Flughafenturm eine Minute nach Beginn des Landeanflug:*

Position Flugzeug eine Minute $t = 1$ nach Landanflug:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$$

Entfernung vom Flughafenturm $S(11|14|0{,}13)$:

$$|\overrightarrow{PS}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 0{,}13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ -2{,}77 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{55^2 + 55^2 + 2{,}77^2} = 79{,}98$$

Das Flugzeug ist eine Minute nach Beginn des Landeanflugs noch $80\ km$ von der Flughafenturmspitze entfernt.

2.2 *Untersuchung, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in einen Flugraum eintritt:*

Wir bestimmen den kleinsten Abstand der Anfluggeraden mit der Rotationsachse des zylinderförmigen Luftraums.

Die beiden Geraden g und h sind windschief.

$d(g;h) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als den Richtungsvektoren und $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Verbindungsvektor der Aufpunkte der beiden Geraden.

$$d(g;h) = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -40-(-48 \\ -40-(-48) \\ 3{,}6-3{,}1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0{,}2^2 + 4^2}} = \frac{1{,}6+2}{4} = 0{,}9$$

Die kleinste Entfernung der beiden Geraden beträgt $0{,}9\ km$. Da der Radius des Luftraumes nur $0{,}8\ km$ ist, tritt das Flugzeug nicht in diesen Luftraum ein.

2.3 *Landepunkt und Winkel des Flugzeuges:*

Landepunkt: Da die Landebahn $100\ m$ über dem Meeresspiegel liegt, ist zum Zeitpunkt der Landung $x_3 = 0{,}1$.

Aus der Fluggeraden folgt:

$x_3 = 0{,}1 = 3{,}1 - 0{,}2t$

$0{,}2t = 3$

$t = 15$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet im Punkt $L(12|12|0{,}1)$.

Winkel zwischen Flugbahn und Landebahn

Dies ist der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und der Ebene, in der die Landebahn liegt. Schnittwinkel Gerade – Ebene mit dem Sinus.

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \vec{u}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 0{,}2^2}} = \frac{|-0{,}2|}{5{,}66} = 0{,}03534$$

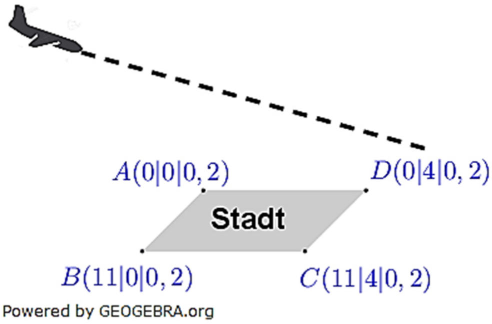
$\varphi = \arcsin(\varphi) = 2{,}03\ °$

Der Landewinkel des Flugzeuges beträgt etwa $2°$.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

2.4.1 Koordinaten: $B(11|0|0{,}2)$; $D(0|4|0{,}2)$

2.4.2 Nachdem wir uns über die Lage der Eckpunkte der Stadt klar geworden sind, stellen wir fest, dass die geringste Höhe des Anflugs am rechten Ende des Rechtecks ist. Wir stellen eine Ebene E parallel zur x_1x_3-Ebene durch den Punkt C (oder d) auf und schneiden diese Ebene mit der Fluggeraden.



E: $x_2 = 4$

$E \cap g$

$-48 + 4t = 4$

$4t = 52$

$t = 13$

Durchstoßpunkt des Flugzeuges mit E:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug überfliegt den rechten Rand der Stadt in $x_3 = 500\,m$ Höhe. Da die Stadt in der Höhe $200\,m$ hoch liegt, wird die Mindesthöhe zu jedem Zeitpunkt eingehalten.

Teil4 – Matrizen / Prozesse

Lösung A1/2021

1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 Mengeneinheit des Endprodukts E_2 5 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 benötigt werden.

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}7&5&2\\6&4&1\\2&6&6\end{pmatrix}$

Gegeben ist der Endprodukt-Vektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$

Berechnung des Rohstoffvektors $\vec{r}=\boldsymbol{C}\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}7&5&2\\6&4&1\\2&6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}140\\110\\140\end{pmatrix}$

Es werden $140\,ME$ von R_1, $110\,ME$ von R_2 sowie $140\,ME$ von R_3 benötigt.

1.2 Aus dem Verflechtungsdiagramm ergibt sich die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$:

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&3&0\\0&b&a\\2&0&2\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&3&0\\0&b&a\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+a&2a+3&2a\\2b&b+a&a\\2&6&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6+a&2a+3&2a\\2b&b+a&a\\2&6&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&2\\6&4&1\\2&6&6\end{pmatrix}$$

$6+a=7$ ➔ $a=1$

$2b=6$ ➔ $b=3$

Der Vergleich der Matrizen ergibt $a=1$ und $b=3$.

1.3 Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}345-50\\285-50\\330-50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}295\\235\\280\end{pmatrix}$ und der

Produktionsvektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\25\\y\end{pmatrix}$.

Bedingung: $\vec{r}=\boldsymbol{C}\cdot\vec{x}$

$$\begin{pmatrix}295\\235\\280\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&2\\6&4&1\\2&6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\25\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+125+2y\\6x+100+y\\2x+150+6y\end{pmatrix}$$

Aus Zeile 2 folgt:

$6x+100+y=235$

$y=135-6x$

$y\rightarrow$ Zeile 1:

$7x+125+2\cdot(135-6x)=295$

$-5x+395=295$

$5x = 395 - 295 = 100$
$x = 20$
$x \to y$
$y = 135 - 6 \cdot 20 = 15$
Probe:
$x; y \to$ Zeile 3:
$2 \cdot 20 + 150 + 6 \cdot 15 \stackrel{?}{=} 280$
$280 = 280$
Es werden $20\,ME$ von E_1 und $15\,ME$ von E_3 hergestellt.

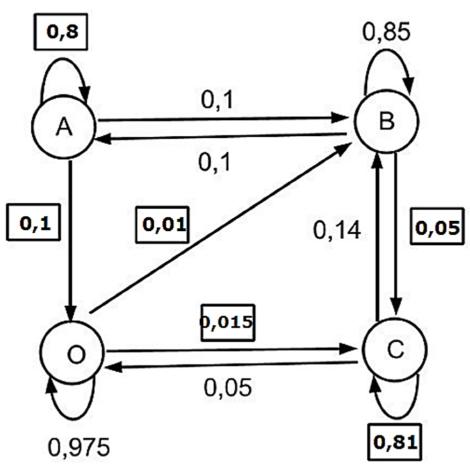
1.4 Gegeben:

variabler Kostenvektor $\overrightarrow{k_V} = (30\ \ 15\ \ 45)$; Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Gesamtkosten:
$K = \overrightarrow{k_V} \cdot \vec{p} + 500 = 300 + 300 + 900 + 500 = 2000$ €
Der Erlös soll $2000 \cdot 1{,}1 = 2200$ € betragen.
Der Erlösvektor sei $\vec{u} = (u_1\ \ u_2\ \ u_3)$
Das Verhältnis der variablen Herstellkosten der Endprodukte beträgt
$30{:}15{:}45 = 2{:}1{:}3$
Damit kann der Verkaufsvektor dargestellt werden durch:
$\vec{u} = (2u_2\ \ u_2\ \ 3u_2)$
Nun muss gelten: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200$
$(2u_2\ \ u_2\ \ 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 100u_2$
$100u_2 = 2200 \;\Rightarrow\; u_2 = 22$ €
Der Verkaufspreisvektor lautet $\vec{u} = (44\ \ 22\ \ 66)$
Verkaufspreis von E_1 ist 44 €; Verkaufspreis von E_2 ist 22 €; Verkaufspreis von E_3 ist 66 €.

Lösung A2/2021

2.1



Die Befüllung der freien Felder erfolgte anhand der Einträge in der Matrix $\boldsymbol{M}$.

2.2 Interpretation des Wertes $0{,}14$:
$14\,\%$ der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zur Fitnesskette A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren. Dies ist daran erkennbar, dass von O aus kein Pfeil zu A verläuft.

2.3 Anzahl der Mitglieder im Jahr 2021:
In den Ketten A, B, C sind im Jahr 2020 jeweils 1400 Mitglieder.
Ohne Mitgliedschaft sind $10000 - 3 \cdot 1400 = 5800$ Kunden.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ 5865 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2021 sind in A 1260 Mitglieder, in B 1584 Mitglieder und in C 1221 Mitglieder.

2.4 Gegeben ist der Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1. Zeile mal 1. Spalte:
$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot b + 0 + 0 = 0{,}1$
$0{,}08 + 0{,}1b = 0{,}1$
$0{,}1b = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}2$
Die anderen Zeilen liefern für $b = 0{,}2$ ebenfalls wahre Aussagen.
Für die 10000 Kunden lautet die stabile Verteilung:

$$\vec{v} = 10000 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 02 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

2.5 Die Ausgangsverteilung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10000 - 4x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 1000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x \\ 0{,}2x + 0{,}05x + 9750 - 3{,}9x \end{pmatrix}$$

Es soll gelten: $0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x = 950 \quad \Rightarrow \quad x = 1000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag vorher: $10000 - 4 \cdot 1000 = 6000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag nachher: $200 + 50 + 9750 - 3900 = 6100$
Die Anzahl der Kunden ohne Vertrag hat um $\frac{100}{6000} \approx 0{,}017$, also um ca. $1{,}7\,\%$ zugenommen.