Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit

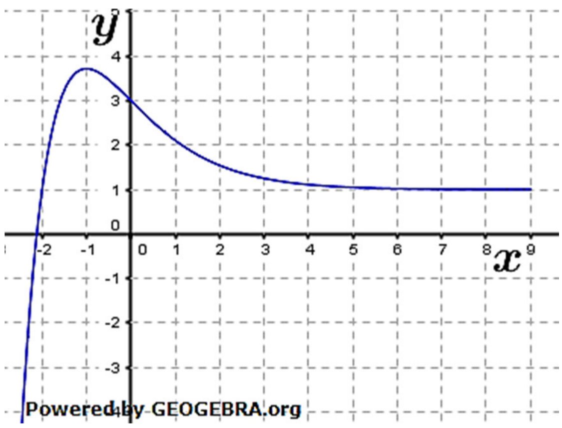
$$f(x) = 2sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1;\ x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$? Skizziere K. **7P**

1.1.2 Gib die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von K an. **6P**
Bestimme eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die parallel ist zur Normalen an K in einem dieser Wendepunkte.

1.2 Das nebenstehende Schaubild K_g gehört zu einer Funktion g mit $g(x) = (x+a)\cdot e^{-x} + b$.



1.2.1 G ist eine Stammfunktion von g. **4P**
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
Begründe:
1. Das Schaubild von g besitzt eine schiefe Asymptote, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.
2. Das Schaubild von G besitzt an der Stelle $x = -1$ einen Hochpunkt.

1.2.2 Bestimme a und b. **3P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2

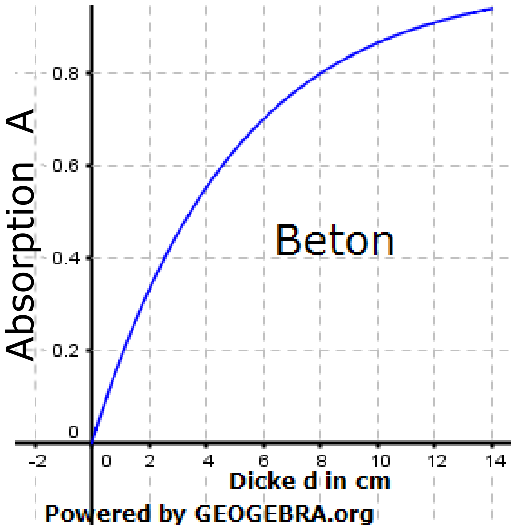
2. Die von einem Röntgengerät ausgehende Strahlenbelastung kann durch eine Abschirmung reduziert werden.
Die Absorption A gibt an, welcher Anteil der Strahlung von der Abschirmung zurückgehalten wird. Zum Beispiel bedeutet $A = 0{,}9$, dass $90\,\%$ der Strahlung absorbiert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dicke d (in cm) des abschirmenden Materials wird näherungsweise beschrieben durch

$$A(d) = 1 - e^{-k \cdot d}$$

Hierbei ist k (in $\frac{1}{cm}$) eine Materialkonstante.

2.1 Für Abschirmungen durch Betonwände wurde der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang ermittelt. **6P**



Bestimme die Materialkonstante k für Beton mithilfe dieses Diagramms. Wie dick muss eine Betonwand sein, damit $99\,\%$ der Strahlung absorbiert werden?

2.2 Für Aluminium hat k den Wert $0{,}15$ und für Blei hat k den Wert $1{,}62$. **4P**
Zur Abschirmung der von einem Röntgengerät ausgehenden Strahlung wird eine $51\,kg$ schwere Bleiplatte der Dicke $5\,cm$ verwendet.
Eine Platte aus Aluminium mit den gleichen Abmessungen wiegt0 $Prozentsatz$ kg.
Der Kilogrammpreis für Blei liegt bei ca. $1{,}60\,€$, der für Aluminium bei ca. $1{,}50\,€$.

Zeige, dass eine ebenso gut absorbierende Abschirmung aus Aluminium wesentlich teurer ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 2

Aufgabe A3

3. Bei einer „Holländischen Auktion" sinkt der Preis des Verkaufsobjektes mit zunehmender Angebotsdauer.
Ein Händler möchte diese Art der Auktion testen. Er bietet hierzu über ein Internetauktionshaus eine Holzgiraffe zum Verkauf an und wählt die folgende Strategie:

- Der Startpreis wird auf das Doppelte des Preises, der gerade noch kostendeckend ist, festgelegt.
- Der Preis wird an jedem Auktionstag um $4\,\%$, bezogen auf den Preis des Vortages gesenkt.

Die Gesamtkosten (Auktionsgebühren und Kosten für den Verkauf der Giraffe) betragen 30 Euro.

3.1 Der Händler möchte im Voraus den aktuellen Preis der Giraffe für jeden Auktionstag berechnen. Der Händler stellt hierzu einen Funktionsterm für die Preisfunktion p auf: **6P**

$$p(t) = 60 - 2{,}4 \cdot t$$

wobei $t \in \mathbb{N}$ die Zeit in Tagen nach Beginn der Auktion ist.
Ein Freund des Händlers behauptet, dass der Funktionsterm wie folgt lauten muss:

$$p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96) \cdot t}.$$

Begründe, mit welchem der beiden Funktionsterme der Auktionspreis richtig berechnet wird.

Nach wie vielen Tagen muss der Händler die Giraffe spätestens verkauft haben, damit er mit dem Verkauf keinen Verlust erleidet?

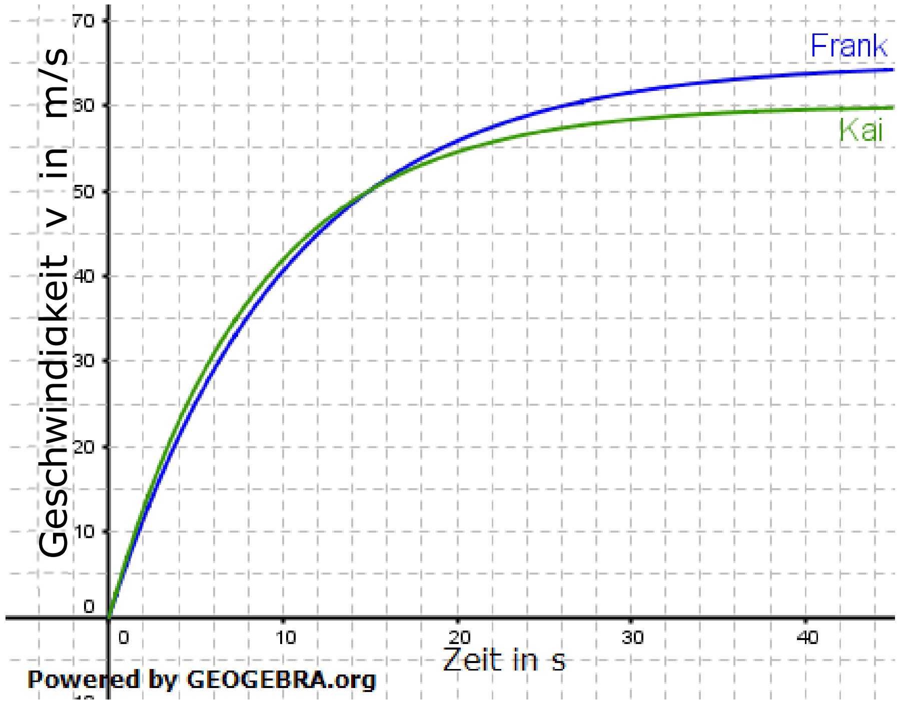
3.2 Auf welchen Wert muss der Prozentsatz der täglichen Preis-Anpassung gesenkt werden, damit der Händler erst ab dem 50. Auktionstag Verlust macht? **4P**
Hinweis: Beginn der Auktion bei $t = 0$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Aufgabe A4

4. Kai und Frank liefern sich mit einem Sportwagen ein Rennen. Hierzu fahren Sie eine $2\,km$ lange Rennstrecke. Der Geschwindigkeitsverlauf beider Fahrzeuge ist innerhalb der ersten 42 Sekunden in der Abbildung dargestellt.



4.1 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. **4P**

Bestimme näherungsweise mithilfe der Abbildung:
(1) Die maximale Beschleunigung, die Kai erfährt.
(2) Den Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen.

4.2 Die Funktion v mit **6P**
$v(t) = -65 \cdot e^{-0{,}098t} + 65;\;\; 0 \leq\; t \leq 42$
Gibt näherungsweise den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t von Franks Wagen wieder.
Hierbei werden $v(t)$ in Metern pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ und t in s angegeben.

Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke. Welche Wegstrecke hat Frank nach 40 Sekunden Fahrt zurückgelegt?

Kai hat nach 40 Sekunden $1941\,m$ Wegstrecke zurückgelegt. Begründe, warum Frank sicher als Sieger aus dem Rennen hervorgehen wird.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

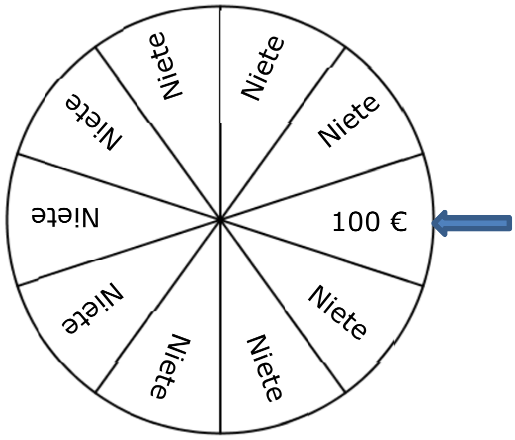
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1. Ein Autohaus bietet seinen Besuchern bei einer Präsentation der neuen Modelle folgendes Glücksspiel an: Das rechts abgebildete Glücksrad, bestehend aus zehn gleich großen Sektoren, wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil zufällig auf einen Sektor.
Ein Teilnehmer zahlt einen Einsatz und darf das Glücksrad drehen. Zeigt der Pfeil am Ende der Drehung auf den Sektor „100 €„, so erhält der Teilnehmer diesen Betrag. Ansonsten geht er leer aus. Der Teilnehmer darf so lange weiterspielen, bis er ein zweites Mal „100 €„ gewinnt, oder aber ein zweites Mal leer ausgeht.



1.1 Zeichne ein Baumdiagramm zum beschriebenen Glücksspiel. **4P**

1.2 Welchen Einsatz muss das Autohaus von einem Teilnehmer verlangen, damit das Spiel fair ist? **4P**

1.3 Ein Besucher nimmt an dem Spiel teil und zählt zu den glücklichen Gewinnern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Spiel nach drei Drehungen zu Ende? **3P**

1.4 Am Ende des Tages wurde das Spiel 180 mal von den Besuchern gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden? **4P**

Aufgabe A2

2. Eine Werkstattkette bietet vor der kalten Jahreszeit seinen Kunden die Angebote „Wintercheck“ sowie „Reifenwechsel“ an.
60 % aller Kunden nehmen das Angebot „Wintercheck“ an, 30 % nutzen die Möglichkeit des Reifenwechsels. 28 % aller Kunden nehmen keines der beiden Angebote wahr.

2.1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zugleich beide Angebote annimmt. **5P**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kunde für genau eines dieser Angebote entscheidet?

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (*mit Hilfsmittel*) *Mustersatz 2*

2.2 Das Angebot „Wintercheck" kostet $19\,€$, das Angebot „Reifenwechsel" kostet $9\,€$. Damit sich die Angebote lohnen, muss die Werkstatt täglich insgesamt mindestens 800 Euro Umsatz mit beiden Angeboten machen. **4P**
Wieviel Kunden müssen die Werkstatt täglich im Mittel aufsuchen, damit sich die Angebote für die Werkstatt lohnen?

2.3 Eine Stichprobe hat ergeben, dass 85 von 1000 Winterchecks nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurden. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Wintercheck nicht ordnugsgemäß ausgeführt wurde. **6P**
Gib einen Schätzwert für p an. Ermittle ein Vertrauensintervall für p zum Konfidenzniveau $95\,\%$.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1 Vektorgeometrie

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1. Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

1.1 Bestimme den Abstand, den E zum Ursprung hat. **3P**

1.2 Zeige, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. **6P**
Bestimme die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechne den Schnittwinkel.

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt $A(-5|0|1)$ und ist orthogonal zur Geraden g. Welche Lage hat F im Koordinatensystem? **6P**
Begründe, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

Aufgabe A1 Matrizen und Prozesse

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

1. Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft.
Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit $10\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit $30\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils $30\,\%$. Auf einen trüben Tag folgt mit $70\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein Regentag und mit $20\,\%$ Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

1.1 Veranschauliche diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänze die fehlenden Angaben. **4P**

1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2015 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit $30\,\%$ Wahrscheinlichkeit regnet. Wie groß müssen die Wahrscheinlichkeiten für einen Sonnentag bzw. für einen trüben Tag am 1. April 2015 sein, damit die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag größer wird? **5P**

1.3 Es wird angenommen, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände R, S und T am Bodensee nicht ändern. Zeige, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt. **6P**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1.1 $f(x) = 2sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1;\ \ x \in \mathbb{R}$

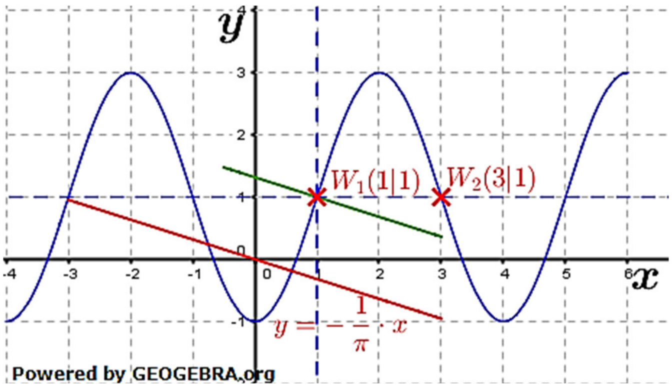
Das Schaubild K entsteht aus der Sinuskurve mit $y = sin(x)$ durch

a) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = 2$,

b) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$,

c) Verschiebung in x-Richtung um eine Einheit nach rechts und

d) Verschiebung in y-Richtung um eine Einheit nach oben.



1.1.2 Benachbarte Wendepunkte.

Wegen Verschiebung in x-Richtung um eine Einheit nach rechts und in y-Richtung um eine Einheit nach oben befindet sich ein Wendepunkt in $W_1(1|1)$. Ein benachbarter Wendepunkt befindet sich entweder $\frac{p}{2}$ weiter links bzw. $\frac{p}{2}$ weiter rechts.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$W_2(3|1)$ alternativ $W_3(-1|1)$.

Für die Gleichung der Ursprungsgeraden parallel zur Normalen an K in einem Wendepunkt wählen wir den Wendepunkt $W_1(1|1)$

$y = -\frac{1}{f'(1)}x$

$f'(x) = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

$f'(1) = \pi\cos(0) = \pi$

$y = -\frac{1}{\pi}\cdot x$

1.2.1 1. Die Aussage ist richtig. Da g die waagrechte Asymptote $y = 1$ besitzt, hat jede Stammfunktion G von g ein Funktionsglied $x + C$, welches dann zur schiefen Asymptote $y = x + C$ wird wegen $e^{-x} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \infty$.

2. Die Aussage ist falsch, g hat an der Stelle $x = -1$ einen Extrempunkt, somit hat G bei $x = -1$ eine Wendestelle.

1.2.2 Gemäß Schaubild ist $f(0) = 3$. Die waagrechte Asymptote ist $y = 1$

Hieraus folgt:

$b = 1$

$a \cdot e^0 + 1 = 3$

$a = 2$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = (x+2)\cdot e^{-x} + 1$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *Mustersatz 2*

Lösung A2

2.1 Die Punktprobe mit Punkt $P(8|0{,}8)$ (aus Grafik abgelesen) ergibt:

$1 - e^{-8k} = 0{,}8$

$-e^{-8k} = -0{,}2$

$e^{-8k} = 0{,}2 \quad | \quad ln$

$-8k = ln(0{,}2) \quad | \quad :(-8)$

$k = -\frac{ln(0{,}2)}{8} \approx 0{,}201$

Die Materialkonstante hat einen Wert von etwa $0{,}2\ cm^{-1}$.

$0{,}99 = 1 - e^{-0{,}2d}$

$e^{-0{,}2d} = 0{,}01 \quad | \quad ln$

$-0{,}2d = \ln(0{,}01) \quad | \quad :(-0{,}2)$

$d = -\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}2} \approx 23{,}03$

Die Wanddicke muss etwa $23\ cm$ *betragen.*

2.2 Absorption der Bleiplatte versus Aluminiumplatte:

$A(d) = 1 - e^{-1{,}62d}$

$1 - e^{-0{,}15d_{Alu}} = 1 - e^{-1{,}62 \cdot 5}$

$0{,}15d_{Alu} = 8{,}1$

$d_{Alu} = 54$

Es werden somit 11 Aluminiumplatten mit jeweils einer Dicke von $5\ cm$ benötigt. Das Aluminium wiegt dadurch $11 \cdot 12{,}13 = 133{,}43\ kg$

Kosten Aluminium: $133{,}43 \cdot 1{,}50 \approx 200\ €$

Kosten Blei: $51 \cdot 1{,}60 \approx 81{,}60\ €$

$\frac{200\ €}{81{,}60\ €} = 2{,}45$

Die Aluminiumplatten sind somit um $245\ \%$ *teurer als die Bleiplatte.*

Lösung A3

3.1 Richtig ist $p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96)t}$, denn im Aufgabentext steht …der Preis wird an jedem Auktionstag um 4% *„bezogen auf den Preis des Vortages"*…gesenkt. Dies ist exponentieller Zerfall mit dem Wachstumsfaktor $0{,}96$.

Die Formel des Händlers würde eine tägliche Preisreduzierung von 4% auf den Ursprungspreis bedeuten.

Spätester Verkauf ohne Verlust:

Der Verkaufspreis muss die Auktionskosten von 30 Euro decken. Somit gilt:

$60 \cdot e^{\ln(0{,}96)t} = 30$

$ln(0{,}96)\, t = ln(0{,}5)$

$t = \frac{ln(0{,}5)}{ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$

Der Händler muss die Giraffe spätestens am 17. *Auktionstag verkauft haben, damit er keinen Verlust macht.*

(Hinweis: t abgerundet auf 16 bedeutet den 17. Auktionstag, da Auktionstag 1 bei $t = 0$ ist.)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.2 *Prozentsatz für Auktionsende am* 50. *Tag ohne Verlust.*

Verlust ab dem 50. Auktionstag bedeutet $t = 49$, denn der erste Auktionstag ist $t = 0$. Somit muss gelten

$p(48) \geq 30$

$p(t) = 60 \cdot q^t$

$30 \leq 60 \cdot q^{48}$

$q^{48} \geq 0{,}5$

$q \geq \sqrt[48]{0{,}5} \approx 0{,}98567$

$1 - 0{,}98567 = 0{,}01433$

Der Prozentsatz der täglichen Preissenkung müsste etwa $1{,}43\ \%$ *betragen.*

Lösung A4

4.1 (1) Maximale Beschleunigung von Kai:

Die größte Steigung des Geschwindigkeitsgraphen von Kai ist zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Tangente im Ursprung hat etwa den Wert $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.

Die maximale Beschleunigung von Kai beträgt $7{,}5 \frac{m}{s^2}$.

(2) Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen:

Dies bedeutet, dass die Steigungen der Tangenten von Frank und Kai gleich groß sein müssen. Dies ist – entsprechend der Grafik – etwa zum Zeitpunkt $t = 8\,s$ der Fall.

4.2 Wegstrecke von Frank nach $40\,s$ Sekunden Fahrt:

$$s = \int_0^{40} v(t)\,dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-0{,}098t} + 65t\right]_0^{40} = 663{,}17e^{-0{,}098\cdot 40} + 2600 - 663{,}17$$
$$= 13{,}15 + 2600 - 663{,}17 \approx 1950$$

Frank hat nach 40 *Sekunden Fahrt etwa* $1950\,m$ *Wegstrecke zurückgelegt.*

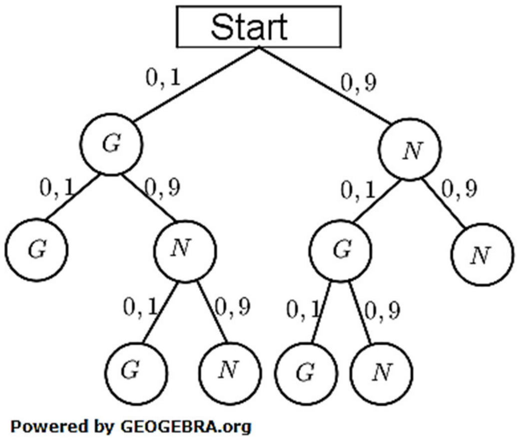
Frank wird als Sieger aus dem Rennen hervorgehen, da er nach 40 Sekunden Fahrt einen Vorsprung von etwa $9\,m$ vor Kai hat und gemäß Diagramm seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt größer ist als die von Kai.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 2

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Baumdiagramm



1.2 Es gibt die nachfolgenden Ergebnisse mit den jeweiligen Auszahlungen. Der Spieleinsatz sei a €.

$P(G;G\} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(G;N;G\} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}009$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(G;N;N\} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}081$ Auszahlung $100{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;G;G\} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}009$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;G;N\} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}081$ Auszahlung $100{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;N\} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$ Auszahlung $-a\,€$

Gesucht ist der Erwartungswert $E(X) = 0$

$(200{,}00 - a) \cdot 0{,}01 + 2 \cdot (200{,}00 - a) \cdot 0{,}009 + 2 \cdot (100{,}00 - a) \cdot 0{,}081 - 0{,}81a = 0$

$2 - 0{,}01a + 3{,}60 - 0{,}018a + 16{,}20 - 0{,}162a - 0{,}81a = 0$

$21{,}8 = a$

Das Autohaus muss einen Einsatz von $21{,}80\,€$ *verlangen, damit das Spiel fair ist.*

1.3 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich „Genau drei Drehungen bis Spielende und mindestens ein Gewinn von $100\,€$.

A: „Mindestens ein Gewinn von $100\,€$."
B: „Genau drei Drehungen bis Spielende."

$P(A) = 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}19$

$P(B) = 1 * -(0{,}1^2 + 0{,}9^2) = 0{,}18$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}19} \approx 0{,}947$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ *geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.*

1.4 C: „In einem Spiel genau $200\,€$ gewonnen."

$P(C) = 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}028$

D: „Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal $200\,€$ gewonnen."

$P(D) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{180}{k} \cdot 0{,}028^k \cdot 0{,}972^{180-k} \approx 0{,}013$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 *Spielen mehr als zehnmal* $200\,€$ *gewonnen wurden, beträgt etwa* $1{,}3\,\%$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Lösung A2

2.1 Aufstellung der Ereigniswahrscheinlichkeiten für eine Vierfeldertafel:

A: „Kunde nimmt das Angebt „Wintercheck" an.

B: „Kunde nimmt das Angebt „Reifenwechsel" an.

$P(A) = 0{,}6;\quad P(B) = 0{,}3\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}28$

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	**0,3**
$\overline{B}$	0,42	**0,28**	0,7
	0,6	0,4	**1**

Aus der Vierfeldertafel lesen wir ab:

C: Kunden, die beide Angebote annehmen:

$P(C) = P(A \cap B) = 0{,}18$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot:

2.2 Gesucht wird der Stichprobenumfang des Erwartungswertes $E(X) = 800$.

Sei die Anzahl der Kunden, die ein Angebot annehmen, dann gilt:

$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0{,}6 + 9 \cdot n \cdot 0{,}3 = 800$

$n \approx 56{,}7$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

2.3 Schätzer für p: $\frac{85}{1000} = 0{,}085$

$0{,}085 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}} \leq p \leq 0{,}085 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}}$

$0{,}0762 \leq p \leq 0{,}0938$ bzw. $7{,}62\,\% \leq p \leq 8{,}38\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

1.1 Abstand von E zum Ursprung:

$d = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 1 \approx 0{,}267$

E hat etwa $0{,}3\ LE$ Abstand zum Ursprung.

1.2 $g \cap E$

Aus g folgt:

$x_1 = 1;\ x_2 = -3 + t;\ x_3 = 2 - t$

eingesetzt in E:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 3-t \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$3 + 6 - 2t + 3 - t = 0$

$12 - 3t = 0 \Longrightarrow\ \ t = 4$

Durchstoßpunkt P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind $P(1|1|-2)$.

Schnittwinkel zwischen g und E:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_g}| \cdot |\overrightarrow{ne}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{28}}\right) \approx 34{,}5376$

Der Schnittwinkel zwischen g und E ist etwa $34{,}54\,°$ groß.

1.3 Ebene F:

Wegen g orthogonal zu F ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von F.

$$F\colon\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$F\colon\ \ x_2 - x_3 - (-1) = 0$

$F\colon\ \ x_2 - x_3 = -1$

Wegen der fehlenden x_1-Koordinate verläuft die Ebene F parallel zur x_1-Achse.

Spiegelpunkt P':

P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:

1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \overrightarrow{n_e}$
2. $\overrightarrow{OQ}$ mit $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \in\ \ E$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5{,}5 - 6{,}5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$$ | Die erste Bedingung ist erfüllt.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -1$ | Punktprobe von Q in E

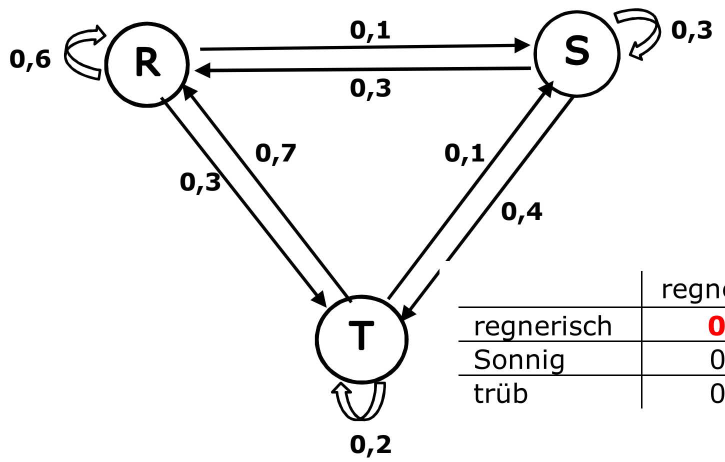
$-1 = -1$ | Die zweite Bedingung ist erfüllt.

P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

Lösung A1 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsgraph*

In der Tabelle stehen in den Spalten jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Wetters für den folgenden Tag. Auf einen regnerischen Tag folgt beispielsweise mit $10\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein sonniger Tag.
In Summe muss sich in jeder Spalte der Wert 1 ergeben, da auf jeden Fall einer der drei Wetterzustände auftritt. Die im Aufgabentext fehlenden Werte sind hier rot markiert.



	regnerisch	sonnig	trüb
regnerisch	**0,6**	0,3	0,7
Sonnig	0,1	0,3	**0,1**
trüb	0,3	**0,4**	0,2

1.2 *Bedingungen für die Wetterwahrscheinlichkeiten*

Aus der Tabelle bzw. dem Graphen von 1.1 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Für den 1. April ist nur die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag bekannt ($30\,\%$). Mit der Bedingung, dass die Summe der Elemente den Wert 1 ergeben muss, ergibt sich der „Wettervektor" für den 1. April 2015 zu:

$$\vec{w}_{1.April} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix}$$

Der Wettervektor für den 2. April ergibt sich mit der Übergangsmatrix zu:

$$\vec{w}_{2.April} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}18 + 0{,}3x + 0{,}49 - 0{,}7x \\ 0{,}03 + 0{,}3x + 0{,}07 - 0{,}1x \\ 0{,}09 + 0{,}4x + 0{,}14 - 0{,}2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}67 - 0{,}4x \\ 0{,}10 + 0{,}2x \\ 0{,}23 + 0{,}2x \end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag soll größer werden, d.h.:
$0{,}10 + 0{,}2x > x \implies 0{,}1 > 0{,}8x \implies x < 0{,}125$
Für die Wahrscheinlichkeit eines trüben Tages ergibt sich damit die Bedingung:
$0{,}7 - x > 0{,}7 - 0{,}125 = 0{,}575$
Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag am 1. April muss also kleiner sein als $12{,}5\,\%$ und die Wahrscheinlichkeit für einen trüben Tag muss grösser sein als $57{,}5\,\%$.

1.3 *Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung*

Für eine stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x}$ mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ aus 1.2 muss gelten:
$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \implies (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Mit
$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix}$$
ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}1 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Mit $x_3 = t$ ergibt sich $x_2 = 0{,}44t$ und $x_1 = 2{,}08t$ und somit der Lösungsverktor
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}08t \\ 0{,}44t \\ t \end{pmatrix}$$
Bei der Lösung für die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der einzelnen Elemente den Wert 1 haben:
$2{,}08t + 0{,}44t + t = 1 \implies t = 0{,}284$
Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}125 \\ 0{,}284 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine auf Dauer stabile Wahrscheinlichkeits-verteilung.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de