Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1.1 $f(x) = 2sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1;\ \ x \in \mathbb{R}$

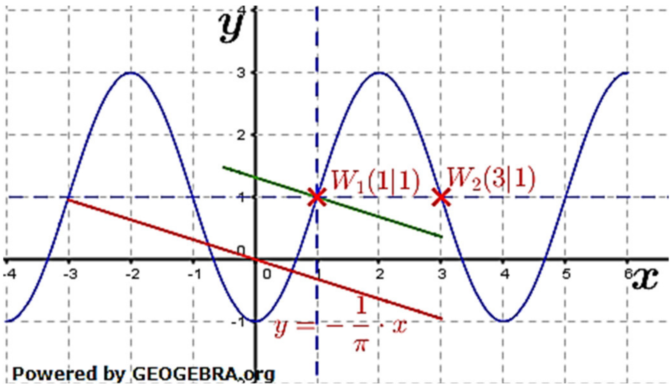
Das Schaubild K entsteht aus der Sinuskurve mit $y = sin(x)$ durch

a) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = 2$,

b) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$,

c) Verschiebung in x-Richtung um eine Einheit nach rechts und

d) Verschiebung in y-Richtung um eine Einheit nach oben.



1.1.2 Benachbarte Wendepunkte.

Wegen Verschiebung in x-Richtung um eine Einheit nach rechts und in y-Richtung um eine Einheit nach oben befindet sich ein Wendepunkt in $W_1(1|1)$. Ein benachbarter Wendepunkt befindet sich entweder $\frac{p}{2}$ weiter links bzw. $\frac{p}{2}$ weiter rechts.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$W_2(3|1)$ alternativ $W_3(-1|1)$.

Für die Gleichung der Ursprungsgeraden parallel zur Normalen an K in einem Wendepunkt wählen wir den Wendepunkt $W_1(1|1)$

$y = -\frac{1}{f'(1)}x$

$f'(x) = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

$f'(1) = \pi\cos(0) = \pi$

$y = -\frac{1}{\pi} \cdot x$

1.2.1 1. Die Aussage ist richtig. Da g die waagrechte Asymptote $y = 1$ besitzt, hat jede Stammfunktion G von g ein Funktionsglied $x + C$, welches dann zur schiefen Asymptote $y = x + C$ wird wegen $e^{-x} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \infty$.

2. Die Aussage ist falsch, g hat an der Stelle $x = -1$ einen Extrempunkt, somit hat G bei $x = -1$ eine Wendestelle.

1.2.2 Gemäß Schaubild ist $f(0) = 3$. Die waagrechte Asymptote ist $y = 1$

Hieraus folgt:

$b = 1$

$a \cdot e^0 + 1 = 3$

$a = 2$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = (x+2) \cdot e^{-x} + 1$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 2

Lösung A2

2.1 Die Punktprobe mit Punkt $P(8|0{,}8)$ (aus Grafik abgelesen) ergibt:

$1-e^{-8k}=0{,}8$

$-e^{-8k}=-0{,}2$

$e^{-8k}=0{,}2 \qquad | \quad ln$

$-8k=ln(0{,}2) \qquad | \quad :(-8)$

$k=-\frac{ln(0{,}2)}{8}\approx 0{,}201$

Die Materialkonstante hat einen Wert von etwa $0{,}2\ cm^{-1}$.

$0{,}99=1-e^{-0{,}2d}$

$e^{-0{,}2d}=0{,}01 \qquad | \quad ln$

$-0{,}2d=\ln(0{,}01) \qquad | \quad :(-0{,}2)$

$d=-\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}2}\approx 23{,}03$

Die Wanddicke muss etwa $23\ cm$ betragen.

2.2 Absorption der Bleiplatte versus Aluminiumplatte:

$A(d)=1-e^{-1{,}62d}$

$1-e^{-0{,}15d_{Alu}}=1-e^{-1{,}62\cdot 5}$

$0{,}15d_{Alu}=8{,}1$

$d_{Alu}=54$

Es werden somit 11 Aluminiumplatten mit jeweils einer Dicke von $5\ cm$ benötigt. Das Aluminium wiegt dadurch $11\cdot 12{,}13=133{,}43\ kg$

Kosten Aluminium: $133{,}43\cdot 1{,}50\approx 200\ €$

Kosten Blei: $51\cdot 1{,}60\approx 81{,}60\ €$

$\frac{200\ €}{81{,}60\ €}=2{,}45$

Die Aluminiumplatten sind somit um $245\ \%$ teurer als die Bleiplatte.

Lösung A3

3.1 Richtig ist $p(t)=60\cdot e^{ln(0{,}96)t}$, denn im Aufgabentext steht …der Preis wird an jedem Auktionstag um 4% *„bezogen auf den Preis des Vortages"*…gesenkt. Dies ist exponentieller Zerfall mit dem Wachstumsfaktor $0{,}96$.

Die Formel des Händlers würde eine tägliche Preisreduzierung von 4% auf den Ursprungspreis bedeuten.

Spätester Verkauf ohne Verlust:

Der Verkaufspreis muss die Auktionskosten von 30 Euro decken. Somit gilt:

$60\cdot e^{\ln(0{,}96)t}=30$

$ln(0{,}96)\,t=ln(0{,}5)$

$t=\frac{ln(0{,}5)}{ln(0{,}96)}\approx 16{,}98$

Der Händler muss die Giraffe spätestens am 17. Auktionstag verkauft haben, damit er keinen Verlust macht.

(Hinweis: t abgerundet auf 16 bedeutet den 17. Auktionstag, da Auktionstag 1 bei $t=0$ ist.)

3.2 *Prozentsatz für Auktionsende am* 50. *Tag ohne Verlust.*
Verlust ab dem 50. Auktionstag bedeutet $t = 49$, denn der erste Auktionstag ist $t = 0$. Somit muss gelten
$p(48) \geq 30$
$p(t) = 60 \cdot q^t$
$30 \leq 60 \cdot q^{48}$
$q^{48} \geq 0{,}5$
$q \geq \sqrt[48]{0{,}5} \approx 0{,}98567$
$1 - 0{,}98567 = 0{,}01433$
Der Prozentsatz der täglichen Preissenkung müsste etwa $1{,}43\ \%$ *betragen.*

Lösung A4

4.1 (1) Maximale Beschleunigung von Kai:
Die größte Steigung des Geschwindigkeitsgraphen von Kai ist zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Tangente im Ursprung hat etwa den Wert $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.
Die maximale Beschleunigung von Kai beträgt $7{,}5 \frac{m}{s^2}$.

(2) Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen:
Dies bedeutet, dass die Steigungen der Tangenten von Frank und Kai gleich groß sein müssen. Dies ist – entsprechend der Grafik – etwa zum Zeitpunkt $t = 8\, s$ der Fall.

4.2 Wegstrecke von Frank nach $40\, s$ Sekunden Fahrt:
$$s = \int_0^{40} v(t)\, dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-0{,}098t} + 65t\right]_0^{40} = 663{,}17 e^{-0{,}098 \cdot 40} + 2600 - 663{,}17$$
$$= 13{,}15 + 2600 - 663{,}17 \approx 1950$$
Frank hat nach 40 *Sekunden Fahrt etwa* $1950\, m$ *Wegstrecke zurückgelegt.*

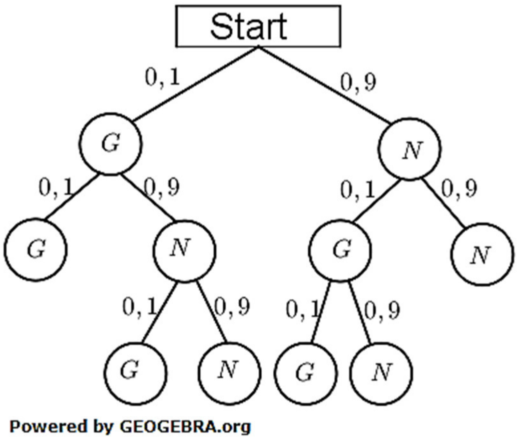
Frank wird als Sieger aus dem Rennen hervorgehen, da er nach 40 Sekunden Fahrt einen Vorsprung von etwa $9\, m$ vor Kai hat und gemäß Diagramm seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt größer ist als die von Kai.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (*mit Hilfsmittel*) *Mustersatz 2*

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Baumdiagramm



1.2 Es gibt die nachfolgenden Ergebnisse mit den jeweiligen Auszahlungen. Der Spieleinsatz sei a €.

$P(G;G\} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(G;N;G\} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}009$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(G;N;N\} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}081$ Auszahlung $100{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;G;G\} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}009$ Auszahlung $200{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;G;N\} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}081$ Auszahlung $100{,}00\,€ - a\,€$
$P(N;N\} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$ Auszahlung $-a\,€$

Gesucht ist der Erwartungswert $E(X) = 0$

$(200{,}00 - a) \cdot 0{,}01 + 2 \cdot (200{,}00 - a) \cdot 0{,}009 + 2 \cdot (100{,}00 - a) \cdot 0{,}081 - 0{,}81a = 0$
$2 - 0{,}01a + 3{,}60 - 0{,}018a + 16{,}20 - 0{,}162a - 0{,}81a = 0$
$21{,}8 = a$

Das Autohaus muss einen Einsatz von $21{,}80\,€$ *verlangen, damit das Spiel fair ist.*

1.3 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich „Genau drei Drehungen bis Spielende und mindestens ein Gewinn von $100\,€$.

A: „Mindestens ein Gewinn von $100\,€$."
B: „Genau drei Drehungen bis Spielende."

$P(A) = 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}19$
$P(B) = 1 * -(0{,}1^2 + 0{,}9^2) = 0{,}18$
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}19} \approx 0{,}947$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ *geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.*

1.4 C: „In einem Spiel genau $200\,€$ gewonnen."

$P(C) = 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}028$

D: „Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal $200\,€$ gewonnen."

$P(D) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{180}{k} \cdot 0{,}028^k \cdot 0{,}972^{180-k} \approx 0{,}013$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 *Spielen mehr als zehnmal* $200\,€$ *gewonnen wurden, beträgt etwa* $1{,}3\,\%$.

Lösung A2

2.1 Aufstellung der Ereigniswahrscheinlichkeiten für eine Vierfeldertafel:

A: „Kunde nimmt das Angebt „Wintercheck" an.

B: „Kunde nimmt das Angebt „Reifenwechsel" an.

$P(A) = 0{,}6;\quad P(B) = 0{,}3 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}28$

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	**0,3**
$\overline{B}$	0,42	**0,28**	0,7
	0,6	0,4	**1**

Aus der Vierfeldertafel lesen wir ab:

C: Kunden, die beide Angebote annehmen:

$P(C) = P(A \cap B) = 0{,}18$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot:

2.2 Gesucht wird der Stichprobenumfang des Erwartungswertes $E(X) = 800$.

Sei die Anzahl der Kunden, die ein Angebot annehmen, dann gilt:

$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0{,}6 + 9 \cdot n \cdot 0{,}3 = 800$

$n \approx 56{,}7$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

2.3 Schätzer für p: $\frac{85}{1000} = 0{,}085$

$0{,}085 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}} \leq p \leq 0{,}085 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}}$

$0{,}0762 \leq p \leq 0{,}0938$ bzw. $7{,}62\,\% \leq p \leq 8{,}38\,\%$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *Mustersatz 2*

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

1.1 Abstand von E zum Ursprung:

$d = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 1 \approx 0{,}267$

E hat etwa $0{,}3\ LE$ Abstand zum Ursprung.

1.2 $g \cap E$

Aus g folgt:

$x_1 = 1;\ x_2 = -3 + t;\ x_3 = 2 - t$

eingesetzt in E:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 3-t \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$3 + 6 - 2t + 3 - t = 0$

$12 - 3t = 0 \Longrightarrow\ \ t = 4$

Durchstoßpunkt P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind $P(1|1|-2)$.

Schnittwinkel zwischen g und E:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_g}| \cdot |\overrightarrow{ne}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{28}}\right) \approx 34{,}5376$

Der Schnittwinkel zwischen g und E ist etwa $34{,}54\,°$ groß.

1.3 Ebene F:

Wegen g orthogonal zu F ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von F.

$$F\colon\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$F\colon\ \ x_2 - x_3 - (-1) = 0$

$F\colon\ \ x_2 - x_3 = -1$

Wegen der fehlenden x_1-Koordinate verläuft die Ebene F parallel zur x_1-Achse.

Spiegelpunkt P':

P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:

1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \overrightarrow{n_e}$
2. $\overrightarrow{OQ}$ mit $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \in\ \ E$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5{,}5 - 6{,}5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$$ | Die erste Bedingung ist erfüllt.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -1$ | Punktprobe von Q in E

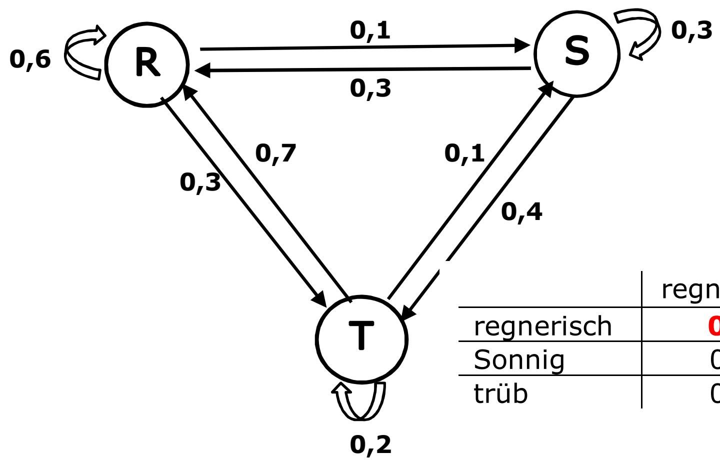
$-1 = -1$ | Die zweite Bedingung ist erfüllt.

P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

Lösung A1 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsgraph*

In der Tabelle stehen in den Spalten jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Wetters für den folgenden Tag. Auf einen regnerischen Tag folgt beispielsweise mit $10\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein sonniger Tag.
In Summe muss sich in jeder Spalte der Wert 1 ergeben, da auf jeden Fall einer der drei Wetterzustände auftritt. Die im Aufgabentext fehlenden Werte sind hier rot markiert.



	regnerisch	sonnig	trüb
regnerisch	**0,6**	0,3	0,7
Sonnig	0,1	0,3	**0,1**
trüb	0,3	**0,4**	0,2

1.2 *Bedingungen für die Wetterwahrscheinlichkeiten*

Aus der Tabelle bzw. dem Graphen von 1.1 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Für den 1. April ist nur die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag bekannt ($30\,\%$). Mit der Bedingung, dass die Summe der Elemente den Wert 1 ergeben muss, ergibt sich der „Wettervektor" für den 1. April 2015 zu:

$$\vec{w}_{1.April} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix}$$

Der Wettervektor für den 2. April ergibt sich mit der Übergangsmatrix zu:

$$\vec{w}_{2.April} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}18 + 0{,}3x + 0{,}49 - 0{,}7x \\ 0{,}03 + 0{,}3x + 0{,}07 - 0{,}1x \\ 0{,}09 + 0{,}4x + 0{,}14 - 0{,}2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}67 - 0{,}4x \\ 0{,}10 + 0{,}2x \\ 0{,}23 + 0{,}2x \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag soll größer werden, d.h.:
$0{,}10 + 0{,}2x > x \implies 0{,}1 > 0{,}8x \implies x < 0{,}125$
Für die Wahrscheinlichkeit eines trüben Tages ergibt sich damit die Bedingung:
$0{,}7 - x > 0{,}7 - 0{,}125 = 0{,}575$
Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag am 1. April muss also kleiner sein als $12{,}5\,\%$ *und die Wahrscheinlichkeit für einen trüben Tag muss grösser sein als* $57{,}5\,\%$.

1.3 *Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung*
Für eine stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x}$ mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ aus 1.2 muss gelten:
$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \implies (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Mit
$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix}$$
ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}1 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Mit $x_3 = t$ ergibt sich $x_2 = 0{,}44t$ und $x_1 = 2{,}08t$ und somit der Lösungsverktor
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}08t \\ 0{,}44t \\ t \end{pmatrix}$$
Bei der Lösung für die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der einzelnen Elemente den Wert 1 haben:
$2{,}08t + 0{,}44t + t = 1 \implies t = 0{,}284$
Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}125 \\ 0{,}284 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine auf Dauer stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung.