Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - x;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild der Funktion f heißt K.

1.1 Zeichne das Schaubild K in ein Koordinatensystem ein. Gib die Gleichung der Asymptote von K an und zeichne sie Ebenfalls ein. **5P**

1.2 Untersuche K auf Extrempunkte. **4P**

1.3 Das Schaubild K und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ für $a < 0$ eine Fläche ein. Bestimme den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$? **4P**

1.4 Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|2)$, es hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm. **4P**

1.5 Zeige: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei $x = -2$, wenn die Koeffizienten von x^3 und x^2 das Verhältnis $1:6$ haben. **3P**

Aufgabe A2

2. Bei einem chemischen Experiment wird Wasserstoff hergestellt und in einem Standzylinder aufgefangen.
Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens:

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

2.1 Stelle die Daten in einem Koordinatensystem dar. Wähle und begründe einen geeigneten Funktionstyp und bestimme eine Näherungsfunktion. **5P**

2.2 Die momentane Änderungsrate des Wasserstoffvolumens (in $\frac{ml}{min}$) wird durch die Funktion r beschrieben: $r(t) = 19e^{-0{,}343t};\ t > 0$.

2.2.1 Zu welchem Zeitpunkt liegt nur noch die halbe momentane Änderungsrate wie zu Beginn vor? **2P**

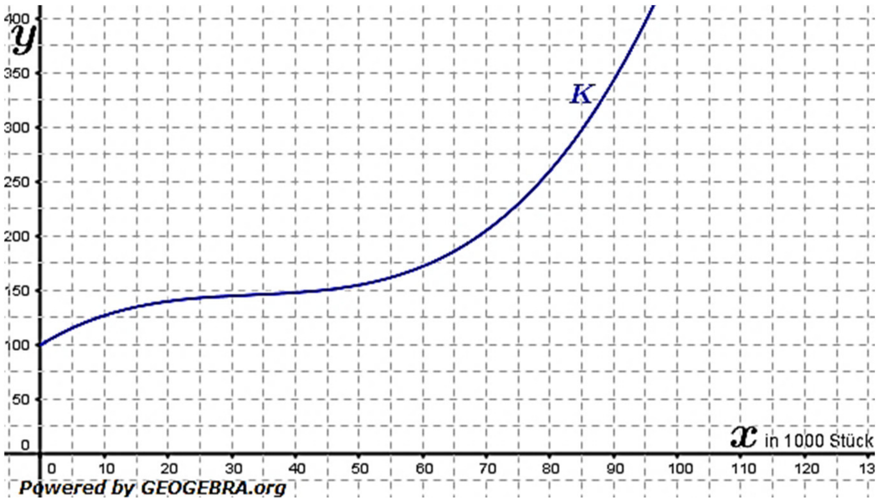
2.2.2 Wie viele Minuten dauert es, bis 50 Wasserstoff entstanden sind? **3P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 3*

Aufgabe A3

3. Die Firma Fischer stellt speziell für die NASA entwickelte, weltraumtaugliche Kugelschreiber her.
Die Produktionsgrenze der Firma liegt bei 100000 Kugelschreibern.
Es wird davon ausgegangen, dass alle produzierten Kugelschreiber auch verkauft werden.
Die Firma Fischer ist der alleinige Anbieter von weltraumtauglichen Kugelschreibern. Für den Erlös $E(x)$ und die Gesamtkosten $K(x)$ in US-Dollar gilt:
$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und $K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$.
Dabei ist x die Menge der Kugelschreiber in 1000 Stück.

3.1 Das Schaubild K der Gesamtkostenfunktion ist in das Koordinaten-System eingezeichnet. Zeichne ebenfalls das Schaubild der Erlös-Funktion E ein. **3P**



Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Eine Verkaufsmenge, bei welcher die Firma Fischer Gewinn erzielt, liegt innerhalb der Gewinnzone. Geben Sie die Gewinnzone mithilfe des Koordinatensystems näherungsweise an.

3.2 Bestimme die Stückzahl, bei welcher der Gewinn maximal ist. **5P**
Gib den maximalen Gewinn in US-Dollar an.

3.3 Berechne den Preis, den die Firma Fischer bei einem Absatz von 4000 Stück für einen Kugelschreiber verlangen müsste, um keinen Verlust zu machen. **2P**

Aufgabe A4

4. In einem Gehege wird der Kaninchenbestand über einen längeren Zeitraum beobachtet. Die Auswertung dieser Beobachtung hat modellhaft folgende Bestandsfunktion ergeben:
$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t});\ \ t \geq 0.$$
Die Zeit t wird in Monaten gemessen und $k(t)$ gibt den Bestand der Kaninchen zum Zeitpunkt t an.

4.1 Wann hat sich der Kaninchenbestand im Gehege, der zu Beginn der Beobachtung vorlag, verdreifacht? **5P**
Wie wird im Funktionsterm berücksichtigt, dass der Bestand nicht beliebig groß wird?

4.2 Bestimme die momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes In Abhängigkeit von der Zeit t. **3P**
Wann ist dies Änderungsrate am größten?

4.3 Berechne die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten fünf Monaten. **2P**

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle. Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an unversteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigarettenschachteln gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbanderolen überprüft.
In einer süddeutschen Großstadt hatten $10{,}7\,\%$ der Zigarettenschachteln keine Steuerbanderole.

1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigarettenschachteln **5P**
a) genau 4 Schachteln keine Steuerbanderole haben;
b) mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbanderole hat;
c) mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbanderole haben;

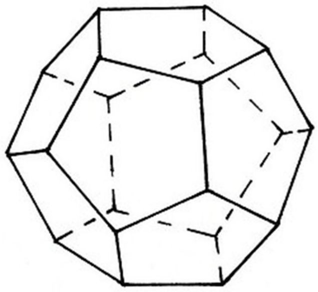
1.2 Bestimme, wie viele Zigarettenschachteln man mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole erhält. **4P**

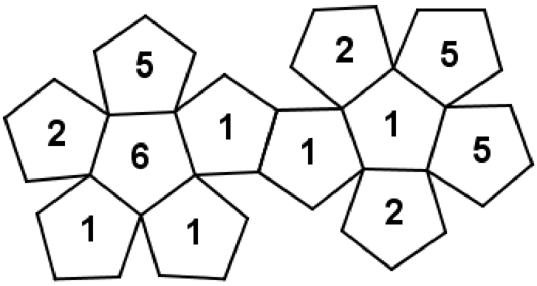
1.3 In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt. **3P**
Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.

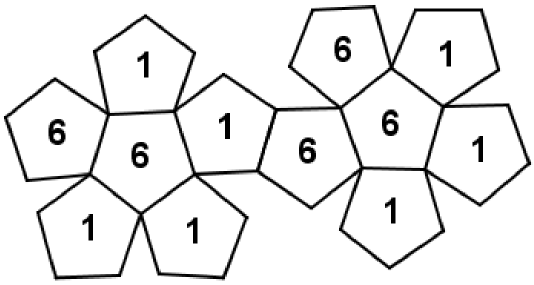
1.4 In einer großen Hafenstadt werden 200 leere Zigarettenschachteln Zufällig dem Hausabfall entnommen und untersucht. Dabei werden 22 unverzollte Schachteln gefunden. **3P**
Bestimme aufgrund der Stichprobe ein $90\,\%$-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall.

Aufgabe A2

2. Zwei Dodekaeder werden als Spielwürfel verwendet. Ihre 12 Seiten sind wie unten abgebildet beschriftet. Es gilt stets die Zahl als geworfen, die auf der obersten Fläche zu sehen ist. Alle Seiten liegen mit derselben Wahrscheinlichkeit oben.







Seiten von Würfel I

Seiten von Würfel II

2.1 Würfel I wird viermal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: **6P**
A: Es tritt die Zahlenreihenfolge $5-6-2-2$ auf.
B: Alle Zahlen sind verschieden.
Marc behauptet: Das Ereignis „Alle Zahlen sind gleich" ist das Gegenereignis von B. Nimm Stellung.

2.2 Würfel II wird viermal geworfen. **3P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Sechs häufiger auftritt als die Eins.

2.3 Janos und Marc benutzen die beiden Würfel für ein Spiel. Jonas wirft Würfel I einmal, Marc wirft Würfel II einmal. **6P**
Gewonnen hat derjenige, dessen Würfel die höhere Zahl anzeigt.
Der Gewinner erhält vom Verlierer die höhere der geworfenen Zahlen in Euro ausgezahlt. Bei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden und keiner der beiden muss zahlen.
Prüfe, für wen sich das Spiel langfristig lohnt.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1.1 Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$. **5P**
Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänze das Dreieck ABC zu durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechne die Innenwinkel der Raute.
Zeige, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.

1.2 Gegeben sind die beiden Ebenen **5P**
E_1: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $s; t \in \mathbb{R}$.
Zeige, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimme eine Gleichung der Ebene E_3.

1.3 Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$ und $Q(0|6|0)$. Gegeben ist außerdem die Ebene E: $3x_2 + x_3 = 8$. **5P**

1.3.1 Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

1.3.2 Berechne den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimme den Abstand von E zur x_1-Achse.

Aufgabe A2 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

2. Der WV-Konzern produziert Personenkraftwagen seiner Marke an drei Standorten A, B und C. Um seine Wirtschaftlichkeit zu erhöhen, möchte das Unternehmen einen Teil der 2400 Mitarbeiter, die in der Produktion am Standort A arbeiten, langfristig in die zwei anderen Standorte B und C verlegen.
Einige der nach Standort B und C versetzten Mitarbeiter sollen nach gewisser Zeit zurück zum Standort A kommen, um Wissenstransfer zu gewährleisten. Im Sinne einer langfristigen Personalentwicklung legt die Firma Quoten für den Wechsel der Standorte fest, die über mehrere Jahre stabil bleiben.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \quad A \quad\; B \quad\; C \\ \text{nach} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.1 Stelle die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen in einem Übergangsdiagramm dar. **7P**
Berechne die Verteilung auf die Standorte A, B und C nach zwei Jahren.

2.2 Untersuche, ob es eine Verteilung mit insgesamt $2\,400$ Mitarbeitern gibt, die im nächsten Jahr gleich bleibt. Falls ja, gib diese Verteilung an. **5P**

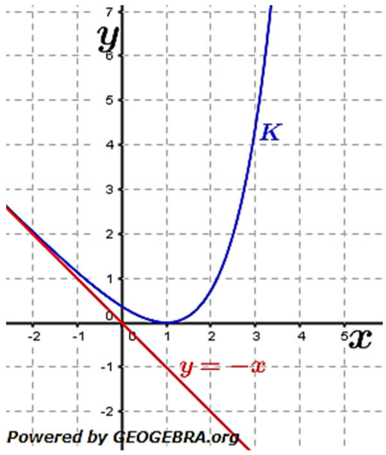
2.3 Es gilt: $\boldsymbol{M}^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}250 & 0{,}250 & 0{,}250 \\ 0{,}256 & 0{,}256 & 0{,}244 \\ 0{,}494 & 0{,}494 & 0{,}506 \end{pmatrix}$ **2P**
Interpretiere die Einträge der mittleren Zeile dieser Matrix.
Nimm an, dass der Prozess eine stabile Grenzmatrix aufweist.
Gib gegebenenfalls Prognosen bezüglich der zukünftigen Verteilung der Mitarbeiter auf die Standorte ab.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

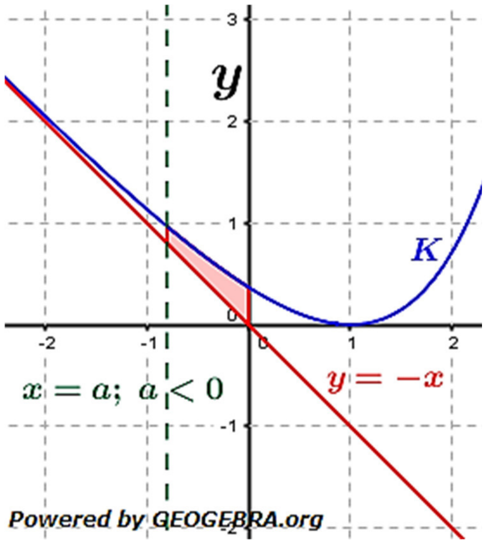
Lösung A1

1.1 Asymptote:
Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$ ist
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -x$
Die Gleichung der Asymptote lautet $y = -x$.



1.2 Extrempunkte:
$f'(x) = e^{x-1} - 1$
$f''(x) = e^{x-1}$
$e^{x-1} - 1 = 0$
$e^{x-1} = 1 \Longrightarrow \ x = 1$
$f''(1) = e^0 = 1 > 0 \Longrightarrow$ Tiefpunkt
$f(1) = 0$
$TP(1|0)$

1.3 Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.
$\int_a^0 e^{x-1} - x - (-x)dx = \int_a^0 e^{x-1}dx$
$\int_a^0 e^{x-1}dx = [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$
$\lim\limits_{a \to -\infty} e^{a-1} = 0$
$A = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 e^{x-1}dx = e^{-1} = \frac{1}{e}$



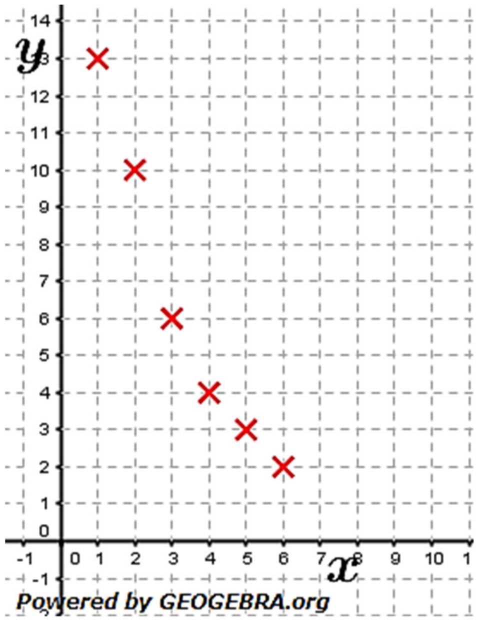
1.4 $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$
Bedingungen aus Text:
$p(0) = 2 \Longrightarrow \ c = 2$
$p'(1) = -4$
$p'(\sqrt{2}) = 0$
$p(x) = 4ax^3 + 2bx$
(1) $4a + 2b = -4$
(2) $8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$
(1) $2b = -4(x+1) \longrightarrow$ (2)
$8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}(a+1) = 0 \qquad | \quad : 4\sqrt{2}$
$2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow \ a = 1 \longrightarrow$ (1)
(1) $4 + 2b = -4 \ \Longrightarrow \ b = -4$
$p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

1.5 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$
$p(x) = ax^3 + 6ax^2 + cx + d$
$p'(x) = 3ax^2 + 12ax + c$
$p''(x) = 6ax + 12a$
$6ax + 12a = 0$
$6ax = -12a \qquad | \quad : 6a$
$x = -2$ **q.e.d.**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Lösung A2

2.1 Vorgang des exponentiellen Zerfalls mit $B(t) = B(0) \cdot q^t$ bzw. $b(t) = a \cdot e^{kt}$ und im weiteren Verlauf wahrscheinlich asymptotisch gegen Null läuft.
Eine Regression mit dem GTR/WTR ergibt:
$B(t) = 19{,}63 \cdot 0{,}682^t$ bzw.
$b(t) = 19{,}63 \cdot e^{-0{,}382t}$.

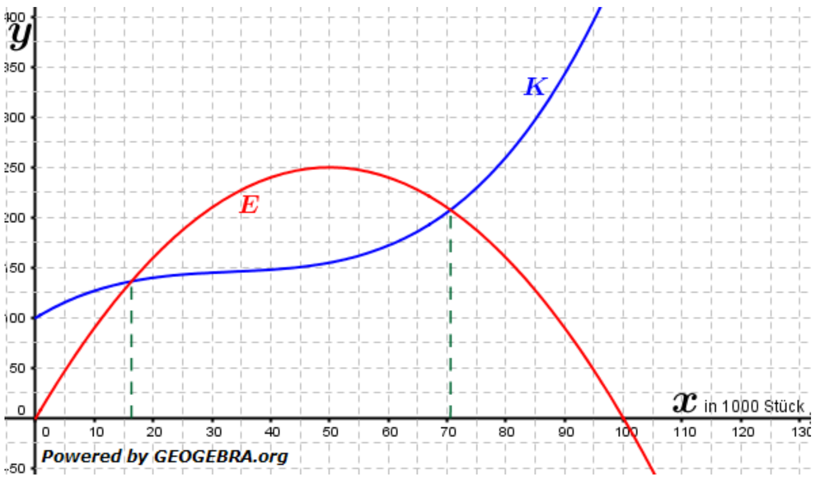


2.2 $0{,}5 = e^{-0{,}343t}$ | ln
$ln(0{,}5) = -0{,}343t$
$t = -\frac{ln(0{,}5)}{0{,}343} = 2{,}02$
Die Halbwertzeit beträgt $2{,}02\ min$.

2.3 Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von r entspricht der Menge an entstandenem Wasserstoff. Somit gilt:
$50 = \int_0^x r(t)\,dt = \int_0^x (19 \cdot e^{-0{,}343t})\,dt = \left[-\frac{19e^{-0{,}343t}}{0{,}343}\right]_0^x = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343} + \frac{19}{0{,}343}$
$50 - \frac{19}{0{,}343} = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$
$-5{,}39 = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$ | $\cdot -0{,}343$
$0{,}09704 = e^{-0{,}343x}$ | ln
$\ln(0{,}09704) = -0{,}343x$
$x = -\frac{ln80{,}09704)}{0{,}343} = 6{,}79$
Es dauert ca. $6{,}8\ min$, bis $50\ ml$ Wasserstoff entstanden sind.

Lösung A3

3.1 Schaubild K der Gesamtkostenfunktion, Schaubild E der Erlösfunktion.



Gewinnzone näherungsweise: $x_{GS} = 16300;\quad x_{GG} = 70500$

3.2 *Maximalgewinn*

Gewinn = Erlös – Kosten

$G(x) = E(x) - K(x) = -100x^2 + 10000x - (x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000)$

$G(x) = -x^3 + 6400x - 100000$

$g'(x) = -3x^2 + 6400$

$x^2 = \frac{6400}{3} \implies x = 46{,}19$

$G(46{,}19) = 97069$

Bei einer Stückzahl von 46190 *Stück macht das Unternehmen den maximalen Gewinn von ca.* 97069 *US-Dollar.*

3.3 Um keinen Verlust zu machen, muss das Unternehmen mindestens seine Kosten decken.

Kosten pro Stück bei 4000 Stück: $\frac{K(4)}{4000} = \frac{112864}{4000} = 28{,}22$

Das Unternehmen müsste bei einem Absatz von 4000 Kugelschreibern mindestens $28{,}22$ US-Dollar pro Stück verlangen, damit es keinen Verlust macht.

Lösung A4

4.1 Dreifacher Kaninchenbestand:

Bestand zu Beginn der Beobachtung war 150 Kaninchen.

Dreifacher Bestand: 450 Kaninchen.

$450 = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t}) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$850e^{-0{,}0153t} = 550$

$e^{-0{,}0153t} = \frac{55}{85} = \frac{11}{17} \quad | \quad ln$

$-0{,}0153t = ln\left(\frac{11}{17}\right)$

$t = -\frac{ln\left(\frac{11}{17}\right)}{0{,}0153} = 8{,}49$

Nach ca. $8{,}49$ *Monaten hat sich der Anfangsbestand verdreifacht.*

Bestand nicht beliebig groß:

Die gegebene Funktion ist eine Funktion beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $S = 1000$.

4.2 Eine Änderungsrate ist die erste Ableitung der Bestandsfunktion.

$k(t) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$k'(t) = 0{,}0153 \cdot 850e^{-0{,}0153t} = 43{,}605 \cdot e^{-0{,}0153t}$

Änderungsrate am größten:

Eine Änderungsrate ist in einem Wendepunkt am größten bzw. kleinsten. Da $k'(t)$ jedoch streng monoton fallend ist, hat $k(t)$ keine Wendepunkte. Der größte Wert von $k'(t)$ ist somit $k'(0) = 43{,}605$.

4.3 Mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten:

$\overline{m} = \frac{1}{5}\int_0^5 f'(t)dt = \frac{1}{5} \cdot \left(k(5) - k(0)\right) = \frac{1}{5} \cdot (342{,}3 - 150) = 38{,}46$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten beträgt etwa 38 *Kaninchen/Monat.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 3*

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Bernoulliexperiment mit $n = 40$ und $p = 0{,}107$.

a) $B_{40;0,107}(X = 4) = 0{,}2037 \approx 20{,}4\,\%$ (WTR)

b) $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}107 = 4{,}28$

$B_{40;0,107}(X \geq 5) = 1 - B_{40;0,107}(X \leq 4) = 1 - 0{,}5713 = 0{,}4287 \approx 42{,}9\,\%$ (WTR)

c) $B_{40;0,107}(3 \leq X \leq 5) = B_{40;0,107}(X \leq 5) - B_{40;0,107}(X \leq 2) = 0{,}5633 \approx 56{,}3\,\%$ (WTR)

1.2 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$B_{n;0,107}(X \geq 1) \geq 0{,}8$

$1 - B_{n;0,107}(X = 01) \geq 0{,}8$

$B_{n;0,107}(X = 0) \leq 0{,}2$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}107^0 \cdot 0{,}893^n \leq 0{,}2$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}893^n \leq 0{,}2$

$n \cdot ln(0{,}893) \leq ln(0{,}2)$

$n \geq \frac{ln(0{,}2)}{ln(0{,}893} = 14{,}22$

Es müssen mindestens 15 *Schachteln eingesammelt werden.*

1.3 Aus 100 Stangen (darunter 8 unverzollte) werden nacheinander 5 Stangen ohne Zurücklegen entnommen. $p = 0{,}08$ für unverzollte Ware.
Die Lieferung wird beschlagnahmt, wenn mindestens eine unverzollte Stange gefunden wird.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0{,}3468 \approx 34{,}7\,\%$

1.4 $90\,\%$-Vertrauensintervall:

$h = \frac{22}{200} = 0{,}11;\; n = 200;\; z = 1{,}64$

$\left[0{,}11 - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11)}{200}};\, 0{,}11 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11)}{200}}\right] = [0{,}0737; 0{,}1463]$

Mit $90\,\%$*-iger Sicherheit liegt der Anteil an unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall zwischen* $7{,}37\,\%$ *und* $14{,}63\,\%$.

Lösung A2

2.1 Würfel 1: $P(1) = \frac{5}{12};\; P(2) = \frac{3}{12};\; P(5) = \frac{3}{12};\; P(6) = \frac{1}{12}$

$P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{768} = 0{,}0013$

$P(B) = 4! \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} = 24 \cdot \frac{5}{2304} = 0{,}0521$

Marcs Behauptung "Alle Zahlen sind gleich" sei das Gegenereignis zu Ereignis B ist falsch.
Das Ereignis A: „Zahlenreihenfolge ist $5 - 6 - 2 - 2$" ist ebenfalls im Gegenereignis von B enthalten. Im Ereignis A sind nur **zwei**, nicht aber **alle** Zahlen gleich.

2.2 Bei vier Würfen tritt die Sechs dann häufiger auf als die Eins, wenn die Sechs mindestens dreimal erscheint.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechsen an.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0{,}1688 + 0{,}0301 = 0{,}1989 \approx 19{,}9\ \%$$

2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag von Jonas (J) an Marc (M).

x_i	-2	-5	-6	6
Ergebnisse	(M1,J2)	(M1;J5)	(M1;J6)	(M6;J$\overline{6}$)
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{144}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{7}{48} - 5 \cdot \frac{7}{48} - 6 \cdot \frac{7}{144} + 6 \cdot \frac{55}{144} = 0{,}979$
Jonas zahlt durchschnittlich pro Spiel etwa 98 *Cent an Marc.*
Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1

1.1 Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, wenn es in zwei Seiten übereinstimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ *ist das Dreieck* ABC *gleichschenklig.*
Punkt D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 4+0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $D(4|4|-2)$.
Innenwinkel der Raute: Schnittwinkel zwischen Vektoren. Es genügt, z.B. den Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, da der Winkel zwischen $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{DC}$ genauso groß ist und die anderen beiden Winkel jeweils die Ergänzung $180°$ sind.

$\sphericalangle_{ABC}$:

$$cos(\sphericalangle_{ABC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$$\sphericalangle_{ABC} = arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 101{,}53\ °$$
$$\sphericalangle_{ADC} = \sphericalangle_{ABC} = 101{,}53\ °$$
$$\sphericalangle_{BAD} = 180\ ° - \sphericalangle_{ABC} = 180° - 101{,}53\ ° = 78{,}47\ °$$
$$\sphericalangle_{BCD} = \sphericalangle_{BAD} = 78{,}47\ °$$

Raute in Ebene E:

$0+4+0=4$ wahre Aussage | Punktprobe mit A

$0+0+2\cdot 2=4$ wahre Aussage | Punktprobe mit B

$4+0+0=4$ wahre Aussage | Punktprobe mit C

$4+4+2\cdot(-2)=4$ wahre Aussage | Punktprobe mit D

(Hinweis: Die Punktprobe mit Punkt D ist nicht notwendig, da Punkt D aus einer Linearkombination von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{BC}$ errechnet wurde.)

Die Raute liegt in der Ebene E.

1.2 Bestimmung der Koordinatengleichung von E_2:

$$k\cdot\overrightarrow{n_{E_2}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

E_2: $2x_1-2x_2+x_3=d$

$2\cdot 7-2\cdot 7+5=d$

$d=5$

E_2: $2x_1-2x_2+x_3=5$

Wegen $\overrightarrow{n_{E_1}}=\overrightarrow{n_{E_2}}\wedge E_1\neq E_2$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Da der Parameter d Maßzahl des Abstands einer Ebene zum Ursprung ist, berechnet sich d_3 aus $\frac{d_2-d_1}{2}=\frac{5-(-1)}{2}=3$

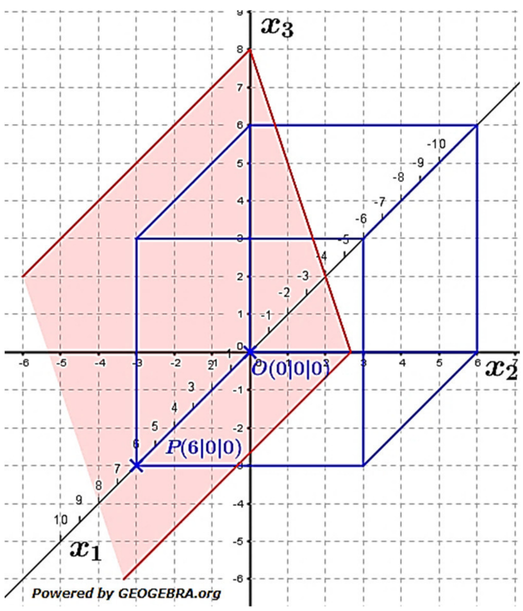
E_3: $2x_1-2x_2+x_3=3$

1.3.1 Würfel und Ebene E:

Für die Ebene werden die Spurpunkte benötigt:

Da in der Ebenengleichung die x_1-Koordinate nicht vorkommt, verläuft die Ebene parallel zur x_1-Achse.

$S_{x_2}\left(0\left|\frac{8}{3}\right|0\right)$; $S_{x_3}(0|0|8)$



1.3.2 Berechnung des Winkels:

Schnittwinkel von Ebene/Ebene über cos.

$$cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{n_{E_1}}\circ\overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_1}}|\cdot|\overrightarrow{n_{E_2}}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha=arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=71{,}6\,°$$

Abstand von E zur x_1-Achse:

E: $\frac{3x_2-x_3-8}{\sqrt{10}}=0$ | HNF

E: $d(A,E)=\frac{|-8|}{\sqrt{10}}=2{,}53$ | Abstand z.B. über Punkt $A(0|0|0)$

Die Ebene E hat von der x_1-Achse den Abstand $2{,}53\ LE$.

Lösung A2

2.1 *Übergangsdiagramm*

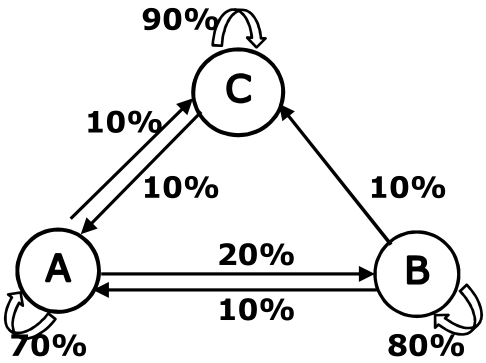
Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

Verteilung nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Verteilung nach zwei Jahren:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1248 \\ 720 \\ 432 \end{pmatrix}$$



Verteilung der 2400 Mitarbeiter auf die drei Standorte:

Standort A: 1248 Mitarbeiter
Standort B: 720 Mitarbeiter
Standort C: 432 Mitarbeiter

2.2 Ansatz für die langfristige Verteilung: $\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0{,}7 & y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}1 \\ x \cdot 0{,}2 & y \cdot 0{,}8 & z \cdot 0 \\ x \cdot 0{,}1 & y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lll}
\text{(I)} & 0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}1z = x & \mid \quad -x \\
\text{(II)} & 0{,}2x + 0{,}8y + 0 = y & \mid \quad -y \\
\text{(III)} & 0{,}1x + 0{,}1y + 0{,}9z = z & \mid \quad -z \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0{,}2x - 0{,}2y + 0 = 0 & \mid \quad 0{,}3 \cdot II + 0{,}2 \cdot I \\
\text{(III)} & 0{,}1x + 0{,}1y - 0{,}1z = 0 & \mid \quad 0{,}3 \cdot III + 0{,}1 \cdot I \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0 - 0{,}04y + 0{,}02z = 0 & \mid \quad II \cdot 10 \\
\text{(III)} & 0 + 0{,}04y - 0{,}02z = 0 & \mid \quad III + II \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0 - 0{,}4y + 0{,}2z = 0 & \\
\text{(III)} & 0 + 0 + 0 = 0 &
\end{array}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $-0{,}4y + 0{,}2z = 0 \Longrightarrow y = 0{,}5z$

$y = 0{,}5z \longrightarrow (I)$

$-0{,}3x + 0{,}1 \cdot 0{,}5z + 0{,}1z = 0$

$-0{,}3x + 0{,}15z = 0 \Longrightarrow \quad x = 0{,}5z$

Einsetzen in $x + y + z = 2400$

$0{,}5z + 0{,}5z + z = 2400 \Longrightarrow \quad z = 1200$

Das LGS hat die Lösung $1 \quad y = 600; \quad z = 1200$

Für die stationäre Verteilung auf die drei Standorte gilt:
Standort A: 600 Mitarbeiter
Standort B: 600 Mitarbeiter
Standort C: 1200 Mitarbeiter
<u>Hinweis:</u>
Mit $x+y+z=1$ $(100\,\%)$ erhält man $x=\frac{1}{4};\ x=\frac{1}{4};\ z=\frac{1}{2}$

2.3 $\boldsymbol{M}^{20}$ ist die Übergangsmatrix, mit welcher, beispielsweise ausgehend von der Anfangsverteiung, die Verteilung in 20 Jahren bestimmt werden kann.
Interpretation der Einträge in der mittleren Zeile:

- $25{,}6\,\%$ der Mitarbeiter, die heute im Standort A arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- $25{,}6\,\%$ der Mitarbeiter, die heute im Standort B arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- $24{,}4\,\%$ der Mitarbeiter, die heute im Standort C arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.

Bei $\boldsymbol{M}^{20}$ fällt auf, dass die Koeffizienten in der ersten Zeile übereinstimmen (auf 3 Stellen). Alle haben den Wert $0{,}25$. Es ist zu vermuten, dass sich dieser Wert langfristig nicht mehr deutlich ändern wird und schon näherungsweise dem Wert der Grenzmatrix entspricht.
Somit werden langfristig ca. $25\,\%$ aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten. Die Werte in den Zeilen 2 und 3 stimmen z. T. überein oder sind recht ähnlich, sodass eine Prognose zu den entsprechenden Mitarbeiterzahlen abgegeben werden kann.
Langfristig werden ca. $25\,\%$ aller Mitarbeiter in Standort B und $50\,\%$ am Standort C arbeiten.
<u>Hinweis:</u>
Die exakten Werte in einer Spalte der Grenzmatrix sind: $\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$