

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

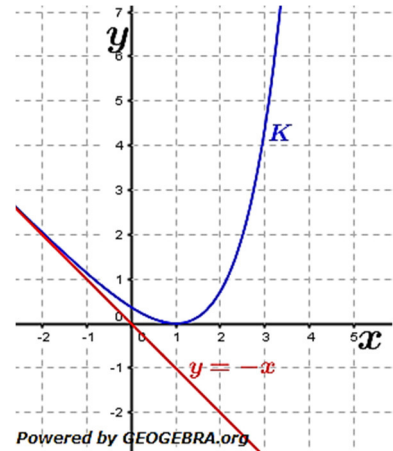
Lösung A1

1.1 Asymptote:

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x$$

Die Gleichung der Asymptote lautet $y = -x$.



1.2 Extrempunkte:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

$$f''(x) = e^{x-1}$$

$$e^{x-1} - 1 = 0$$

$$e^{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(1) = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f(1) = 0$$

$$TP(1|0)$$

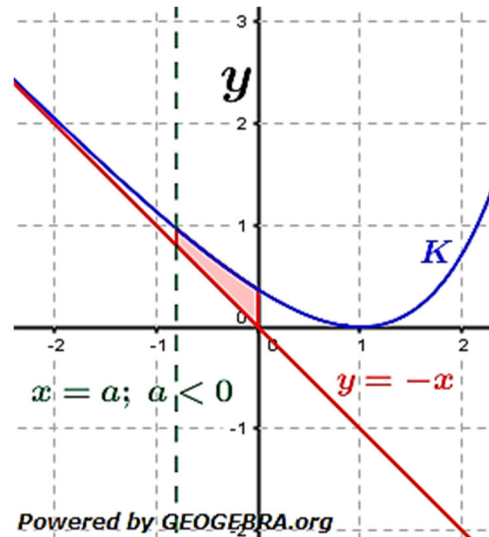
1.3 Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.

$$\int_a^0 e^{x-1} - x - (-x) dx = \int_a^0 e^{x-1} dx$$

$$\int_a^0 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{a-1} = 0$$

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{x-1} dx = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



1.4 $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen aus Text:

$$p(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$p'(1) = -4$$

$$p'(\sqrt{2}) = 0$$

$$p(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$(1) \quad 4a + 2b = -4$$

$$(2) \quad 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$$

$$(1) \quad 2b = -4(x+1) \rightarrow (2)$$

$$8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}(a+1) = 0$$

$$| \quad : 4\sqrt{2}$$

$$2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 4 + 2b = -4 \Rightarrow b = -4$$

$$p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$$

1.5 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$

$$p(x) = ax^3 + 6ax^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 12ax + c$$

$$p''(x) = 6ax + 12a$$

$$6ax + 12a = 0$$

$$6ax = -12a$$

$$x = -2$$

$$| \quad : 6a$$

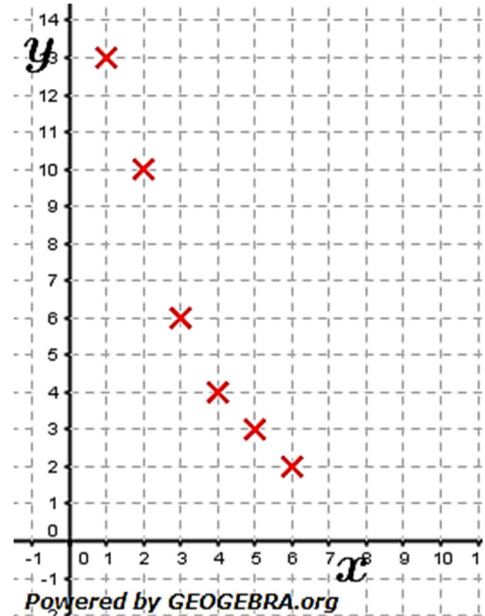
q.e.d.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Lösung A2

2.1 Vorgang des exponentiellen Zerfalls mit $B(t) = B(0) \cdot q^t$ bzw. $b(t) = a \cdot e^{kt}$ und im weiteren Verlauf wahrscheinlich asymptotisch gegen Null läuft. Eine Regression mit dem GTR/WTR ergibt:

$$B(t) = 19,63 \cdot 0,682^t \text{ bzw. } b(t) = 19,63 \cdot e^{-0,382t}.$$



2.2 $0,5 = e^{-0,343t} \quad | \quad \ln$
 $\ln(0,5) = -0,343t$
 $t = -\frac{\ln(0,5)}{0,343} = 2,02$
 Die Halbwertszeit beträgt 2,02 min.

2.3 Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von r entspricht der Menge an entstandenem Wasserstoff. Somit gilt:

$$50 = \int_0^x r(t) dt = \int_0^x (19 \cdot e^{-0,343t}) dt = \left[-\frac{19e^{-0,343t}}{0,343} \right]_0^x = -\frac{19e^{-0,343x}}{0,343} + \frac{19}{0,343}$$

$$50 - \frac{19}{0,343} = -\frac{19e^{-0,343x}}{0,343}$$

$$-5,39 = -\frac{19e^{-0,343x}}{0,343} \quad | \quad \cdot -0,343$$

$$0,09704 = e^{-0,343x} \quad | \quad \ln$$

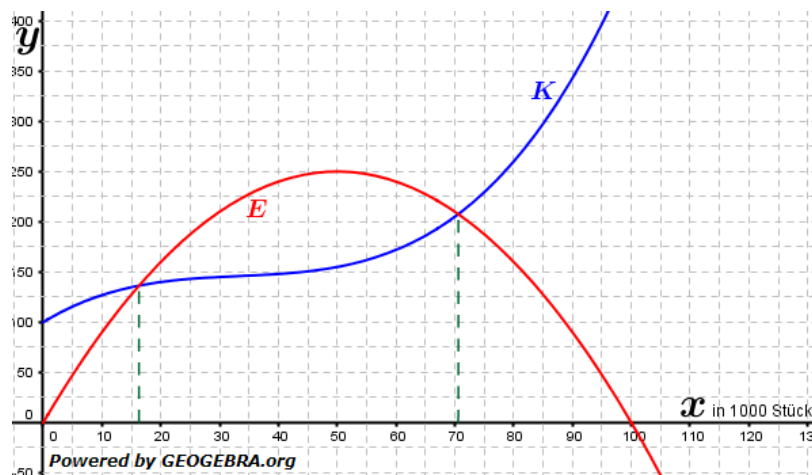
$$\ln(0,09704) = -0,343x$$

$$x = -\frac{\ln(0,09704)}{0,343} = 6,79$$

Es dauert ca. 6,8 min, bis 50 ml Wasserstoff entstanden sind.

Lösung A3

3.1 Schaubild K der Gesamtkostenfunktion, Schaubild E der Erlösfunktion.



Gewinnzone näherungsweise: $x_{GS} = 16300$; $x_{GG} = 70500$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

3.2 Maximalgewinn

Gewinn = Erlös - Kosten

$$G(x) = E(x) - K(x) = -100x^2 + 10000x - (x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000)$$

$$G(x) = -x^3 + 6400x - 100000$$

$$g'(x) = -3x^2 + 6400$$

$$x^2 = \frac{6400}{3} \Rightarrow x = 46,19$$

$$G(46,19) = 97069$$

Bei einer Stückzahl von 46190 Stück macht das Unternehmen den maximalen Gewinn von ca. 97069 US-Dollar.

3.3 Um keinen Verlust zu machen, muss das Unternehmen mindestens seine Kosten decken.

Kosten pro Stück bei 4000 Stück: $\frac{K(4)}{4000} = \frac{112864}{4000} = 28,22$

Das Unternehmen müsste bei einem Absatz von 4000 Kugelschreibern mindestens 28,22 US-Dollar pro Stück verlangen, damit es keinen Verlust macht.

Lösung A4

4.1 Dreifacher Kaninchenbestand:

Bestand zu Beginn der Beobachtung war 150 Kaninchen.

Dreifacher Bestand: 450 Kaninchen.

$$450 = 1000 \cdot (1 - 0,85e^{-0,0153t}) = 1000 - 850e^{-0,0153t}$$

$$850e^{-0,0153t} = 550$$

$$e^{-0,0153t} = \frac{55}{85} = \frac{11}{17} \quad | \quad \ln$$

$$-0,0153t = \ln\left(\frac{11}{17}\right)$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{11}{17}\right)}{0,0153} = 8,49$$

Nach ca. 8,49 Monaten hat sich der Anfangsbestand verdreifacht.

Bestand nicht beliebig groß:

Die gegebene Funktion ist eine Funktion beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $S = 1000$.

4.2 Eine Änderungsrate ist die erste Ableitung der Bestandsfunktion.

$$k(t) = 1000 - 850e^{-0,0153t}$$

$$k'(t) = 0,0153 \cdot 850e^{-0,0153t} = 43,605 \cdot e^{-0,0153t}$$

Änderungsrate am größten:

Eine Änderungsrate ist in einem Wendepunkt am größten bzw. kleinsten. Da $k'(t)$ jedoch streng monoton fallend ist, hat $k(t)$ keine Wendepunkte. Der größte Wert von $k'(t)$ ist somit $k'(0) = 43,605$.

4.3 Mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten:

$$\bar{m} = \frac{1}{5} \int_0^5 f'(t) dt = \frac{1}{5} \cdot (k(5) - k(0)) = \frac{1}{5} \cdot (342,3 - 150) = 38,46$$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten beträgt etwa 38 Kaninchen/Monat.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Bernoulliexperiment mit $n = 40$ und $p = 0,107$.

a) $B_{40;0,107}(X = 4) = 0,2037 \approx 20,4\%$ (WTR)

b) $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,107 = 4,28$

$B_{40;0,107}(X \geq 5) = 1 - B_{40;0,107}(X \leq 4) = 1 - 0,5713 = 0,4287 \approx 42,9\%$ (WTR)

c) $B_{40;0,107}(3 \leq X \leq 5) = B_{40;0,107}(X \leq 5) - B_{40;0,107}(X \leq 2) = 0,5633 \approx 56,3\%$
(WTR)

1.2 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$$B_{n;0,107}(X \geq 1) \geq 0,8$$

$$1 - B_{n;0,107}(X = 0) \geq 0,8$$

$$B_{n;0,107}(X = 0) \leq 0,2$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,107^0 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$n \cdot \ln(0,893) \leq \ln(0,2)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,893)} = 14,22$$

Es müssen mindestens 15 Schachteln eingesammelt werden.

1.3 Aus 100 Stangen (darunter 8 unverzollte) werden nacheinander 5 Stangen ohne Zurücklegen entnommen. $p = 0,08$ für unverzollte Ware.

Die Lieferung wird beschlagnahmt, wenn mindestens eine unverzollte Stange gefunden wird.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0,3468 \approx 34,7\%$$

1.4 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{22}{200} = 0,11; n = 200; z = 1,64$$

$$\left[0,11 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}}; 0,11 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}} \right] = [0,0737; 0,1463]$$

Mit 90 %-iger Sicherheit liegt der Anteil an unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall zwischen 7,37 % und 14,63 %.

Lösung A2

2.1 Würfel 1: $P(1) = \frac{5}{12}$; $P(2) = \frac{3}{12}$; $P(5) = \frac{3}{12}$; $P(6) = \frac{1}{12}$

$$P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{768} = 0,0013$$

$$P(B) = 4! \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} = 24 \cdot \frac{5}{2304} = 0,0521$$

Marc's Behauptung "Alle Zahlen sind gleich" sei das Gegenereignis zu Ereignis B ist falsch.

Das Ereignis A: „Zahlenreihenfolge ist 5 – 6 – 2 – 2“ ist ebenfalls im Gegenereignis von B enthalten. Im Ereignis A sind nur **zwei**, nicht aber **alle** Zahlen gleich.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

2.2 Bei vier Würfeln tritt die Sechs dann häufiger auf als die Eins, wenn die Sechs mindestens dreimal erscheint.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechsen an.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 \\
 &= 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0,1688 + 0,0301 = 0,1989 \approx 19,9\%
 \end{aligned}$$

2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag von Jonas (J) an Marc (M).

x_i	-2	-5	-6	6
Ergebnisse	(M1;J2)	(M1;J5)	(M1;J6)	(M6;J6)
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{144}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{7}{48} - 5 \cdot \frac{7}{48} - 6 \cdot \frac{7}{144} + 6 \cdot \frac{55}{144} = 0,979$

Jonas zahlt durchschnittlich pro Spiel etwa 98 Cent an Marc.

Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1

1.1 Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, wenn es in zwei Seiten übereinstimmt:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| \wedge |\vec{AB}| \neq |\vec{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

Punkt D :

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 4+0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $D(4|4|-2)$.

Innenwinkel der Raute: Schnittwinkel zwischen Vektoren. Es genügt, z.B. den Winkel zwischen \vec{AB} und \vec{BC} zu berechnen, da der Winkel zwischen \vec{AD} und \vec{DC} genauso groß ist und die anderen beiden Winkel jeweils die Ergänzung 180° sind.

\sphericalangle_{ABC} :

$$\cos(\sphericalangle_{ABC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$$\sphericalangle_{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 101,53^\circ$$

$$\sphericalangle_{ADC} = \sphericalangle_{ABC} = 101,53^\circ$$

$$\sphericalangle_{BAD} = 180^\circ - \sphericalangle_{ABC} = 180^\circ - 101,53^\circ = 78,47^\circ$$

$$\sphericalangle_{BCD} = \sphericalangle_{BAD} = 78,47^\circ$$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Raute in Ebene E :

$0 + 4 + 0 = 4$	wahre Aussage		Punktprobe mit A
$0 + 0 + 2 \cdot 2 = 4$	wahre Aussage		Punktprobe mit B
$4 + 0 + 0 = 4$	wahre Aussage		Punktprobe mit C
$4 + 4 + 2 \cdot (-2) = 4$	wahre Aussage		Punktprobe mit D

(Hinweis: Die Punktprobe mit Punkt D ist nicht notwendig, da Punkt D aus einer Linearkombination von \vec{OA} und \vec{BC} errechnet wurde.)

Die Raute liegt in der Ebene E .

1.2 Bestimmung der Koordinatengleichung von E_2 :

$$k \cdot \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d$$

$$2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = d$$

$$d = 5$$

$$E_2: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

Wegen $\vec{n}_{E_1} = \vec{n}_{E_2} \wedge E_1 \neq E_2$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Da der Parameter d Maßzahl des Abstands einer Ebene zum Ursprung ist, berechnet sich d_3 aus $\frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$

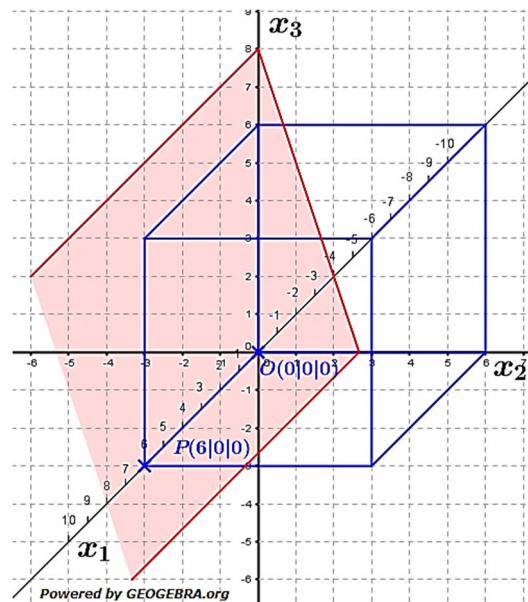
$$E_3: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

1.3.1 Würfel und Ebene E :

Für die Ebene werden die Spurpunkte benötigt:

Da in der Ebenengleichung die x_1 -Koordinate nicht vorkommt, verläuft die Ebene parallel zur x_1 -Achse.

$$S_{x_2} \left(0 \left| \begin{array}{c} 8 \\ 3 \end{array} \right| 0 \right); S_{x_3} (0|0|8)$$



1.3.2 Berechnung des Winkels:

Schnittwinkel von Ebene/Ebene über \cos .

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_{E_1} \circ \vec{n}_{E_2}|}{|\vec{n}_{E_1}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 71,6^\circ$$

Abstand von E zur x_1 -Achse:

$$E: \frac{3x_2 - x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0 \quad | \quad \text{HNF}$$

$$E: d(A, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = 2,53 \quad | \quad \text{Abstand z.B. über Punkt } A(0|0|0)$$

Die Ebene E hat von der x_1 -Achse den Abstand 2,53 LE.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Lösung A2

2.1 Übergangsdigramm

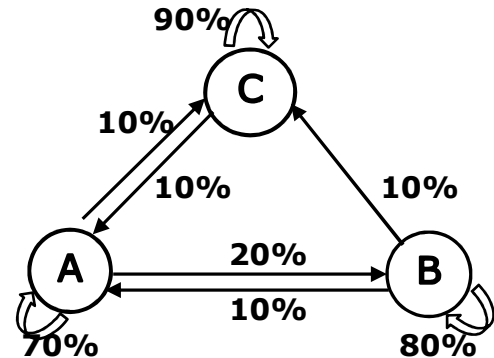
Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

Verteilung nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Verteilung nach zwei Jahren:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1248 \\ 720 \\ 432 \end{pmatrix}$$



Verteilung der 2400 Mitarbeiter auf die drei Standorte:

Standort A: 1248 Mitarbeiter

Standort B: 720 Mitarbeiter

Standort C: 432 Mitarbeiter

2.2 Ansatz für die langfristige Verteilung: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0,7 & y \cdot 0,1 & z \cdot 0,1 \\ x \cdot 0,2 & y \cdot 0,8 & z \cdot 0 \\ x \cdot 0,1 & y \cdot 0,1 & z \cdot 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

(I) $0,7x + 0,1y + 0,1z = x$		$-x$
(II) $0,2x + 0,8y + 0 = y$		$-y$
(III) $0,1x + 0,1y + 0,9z = z$		$-z$
(I) $-0,3x + 0,1y + 0,1z = 0$		
(II) $0,2x - 0,2y + 0 = 0$		$0,3 \cdot II + 0,2 \cdot I$
(III) $0,1x + 0,1y - 0,1z = 0$		$0,3 \cdot III + 0,1 \cdot I$
(I) $-0,3x + 0,1y + 0,1z = 0$		
(II) $0 - 0,04y + 0,02z = 0$		$II \cdot 10$
(III) $0 + 0,04y - 0,02z = 0$		$III + II$
(I) $-0,3x + 0,1y + 0,1z = 0$		
(II) $0 - 0,4y + 0,2z = 0$		
(III) $0 + 0 + 0 = 0$		

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $-0,4y + 0,2z = 0 \Rightarrow y = 0,5z$

$y = 0,5z \rightarrow (I)$

$$-0,3x + 0,1 \cdot 0,5z + 0,1z = 0$$

$$-0,3x + 0,15z = 0 \Rightarrow x = 0,5z$$

Einsetzen in $x + y + z = 2400$

$$0,5z + 0,5z + z = 2400 \Rightarrow z = 1200$$

Das LGS hat die Lösung 1 $y = 600$; $z = 1200$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 3

Für die stationäre Verteilung auf die drei Standorte gilt:

Standort A: 600 Mitarbeiter

Standort B: 600 Mitarbeiter

Standort C: 1200 Mitarbeiter

Hinweis:

Mit $x + y + z = 1$ (100 %) erhält man $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{1}{2}$

2.3 M^{20} ist die Übergangsmatrix, mit welcher, beispielsweise ausgehend von der Anfangsverteilung, die Verteilung in 20 Jahren bestimmt werden kann.

Interpretation der Einträge in der mittleren Zeile:

- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort A arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort B arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 24,4 % der Mitarbeiter, die heute im Standort C arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.

Bei M^{20} fällt auf, dass die Koeffizienten in der ersten Zeile übereinstimmen (auf 3 Stellen). Alle haben den Wert 0,25. Es ist zu vermuten, dass sich dieser Wert langfristig nicht mehr deutlich ändern wird und schon näherungsweise dem Wert der Grenzmatrix entspricht.

Somit werden langfristig ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten. Die Werte in den Zeilen 2 und 3 stimmen z. T. überein oder sind recht ähnlich, sodass eine Prognose zu den entsprechenden Mitarbeiterzahlen abgegeben werden kann.

Langfristig werden ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort B und 50 % am Standort C arbeiten.

Hinweis:

Die exakten Werte in einer Spalte der Grenzmatrix sind: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$