Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1.

Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4};\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K.

1.1 Untersuche K auf Symmetrie. **7P**
Berechne die Koordinaten der Extrempunkte von K.
Zeichne K.

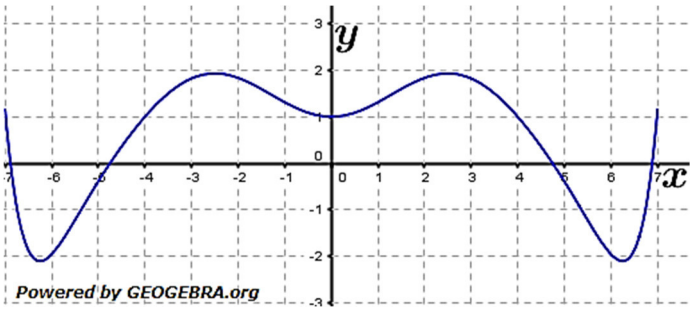
.

1.2 Die beiden Wendetangenten begrenzen mit K eine Fläche. **5P**
Berechne den Inhalt dieser Fläche.

1.3 Betrachte nun die Funktion w mit $w(x) = -4x^2 + 4;\ x \in \mathbb{R}$. **4P**
Die Schaubilder von g und w schneiden sich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Das Flächenstück, das von den beiden Schaubildern eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Geben Sie einen Rechenansatz zur Berechnung des Volumens des entstehenden Rotationskörpers an.

1.4 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f mit dem Definitions-Bereich $[-7; 7]$. **6P**

Begründe für jede der folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist.



(1) Die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $x = -2$ hat die Steigung -1.
(2) Das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 0$ eine waagrechte Tangente.
(3) Jede Stammfunktion von f hat fünf Wendestellen.
(4) $\int_0^4 f'(x)dx = 0$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Aufgabe A2

2. Im Jahr 1986 gab es in Tschernobyl ein Reaktorunglück, bei dem die radioaktiven Isotope Cäsium-137 und Plutonium-241 freigesetzt wurden. Deren Radioaktivität ist noch immer messbar. Im Folgenden entspricht der Zeitpunkt $t = 0$ dem Jahr 1986, wobei t in Jahren gemessen wird.

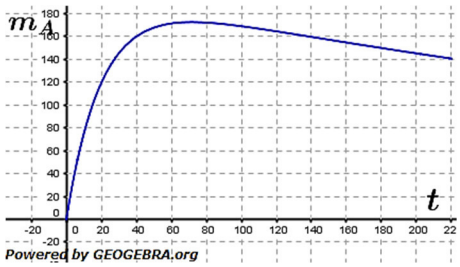
2.1 Die folgende Tabelle zeigt die geschätzten Werte für die nicht zerfallene Menge an Cäsium-137 (in Gramm), welche auf der Fläche Deutschlands insgesamt zu den angegebenen Zeitpunkten vorhanden waren. **2P**

Jahr	1986	1991	1996	2006
Cäsium-137	230,00	204,91	182,55	144,89

Der Zerfall des vorhandenen Cäsiums-137 soll durch eine Funktion m mit $m(t) = a \cdot b^t;\ t \geq 0$ veschrieben werden.
Bestimme passende Werte für a und b.

2.2 Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Cäsium-137 in Gramm wird Durch das Modell m_c mit $m_c(t) = 230e^{-0{,}023t};\ t \geq 0$ beschrieben. **4P**
Wie viel Prozent des ursprünglich vorhandenen Cäsiums-137 sind im Jahr 2018 noch vorhanden?
In welchem Jahr wird nur noch $1\,\%$ der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden sein?

2.3 Plutonium-241 zerfällt zu Americum-241, welches selbst auch radioaktiv ist und daher weiter zerfällt. Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Americum-241 in Milligramm wird durch das Modell m_A mit $m_A(t) = 200(1 - e^{-0{,}048t}) \cdot e^{-0{,}0016t};\ t \geq 0$ angenähert.
Die Abbildung zeigt das zugehörige Schaubild.

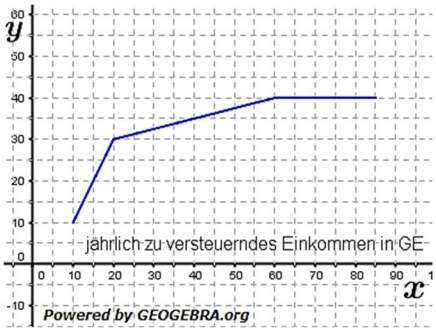


2.3.1 Begründe mithilfe der Abbildung, dass Plutonium-241 schneller zerfällt als Americum-241. **2P**

2.3.2 In welchem Jahr ist die Menge des Vorhanden Americums-241 am größten? Bestimme den Zeitpunkt auf ein halbes Jahr genau. (Auf einen Nachweis wird verzichtet). **2P**

Aufgabe A3

3. Im Einkommensteuerbescheid wird unter anderem der Durchschnittsteuersatz angegeben. Eine Geldeinheit (GE) entspricht im Folgenden $1000\,EUR$.
Der Durchschnittsteuersatz kann aus dem Grenzsteuersatz, der im Schaubild dargestellt ist, berechnet werden.
Beispiel:
Bei einem Jahreseinkommen von $15000\,EUR$ $(15\,GE)$ sind die ersten $10000\,EUR$ $(10\,GE)$ steuerfrei.
Die restlichen $5000\,EUR$ $(5\,GE)$ werden zwischen $10\,\%$ und $20\,\%$ besteuert, also im Mittel mit $5\,\%$.
Die Steuer beträgt demnach $750\,EUR$, und der Durchschnittsteuersatz ist 750 geteilt durch 15000, also $5\,\%$.



Im Folgenden sollen die Informationen für Einkommen bis $85\,GE$ aus dem Schaubild genutzt werden.

3.1 Zeige, dass bei einem Jahreseinkommen von $40000\,EUR$ Steuern in Höhe von $8500\,EUR$ anfallen. **3P**
Bestimme den zugehörigen Durchschnittsteuersatz.

3.2 Kann der Durchschnittsteuersatz für ein Einkommen $40\,\%$ sein? Begründe. **2P**

3.3 Für $60 < x < 85$ kann der Durchschnittsteuersatz S (in $\%$) in Abhängigkeit des Jahreseinkommens x (in GE) folgendermaßen ermittelt werden: **5P**

$$S(x) = \frac{1600+40(x-60)}{x}$$

Berechne, für welches Einkommen der Durchschnittsteursatz $28\,\%$ ist.
Erläutere mithilfe des obigen Schaubilds, wie sich der Term für S ergibt.

Aufgabe A4

4. Als Lärmschutzwälle werden zwei Erdwälle der Gesamtbreite $24\,m$ errichtet. Der Verlauf des Querschnitts wird modelliert durch das Schaubild der Funktion g mit

$$g(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2;\;\; 0 \le x \le 24.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

4.1 Zeichne das zugehörige Schaubild in ein geeignetes Koordinatensystem. **3P**

4.2 Die beiden Erdwälle werden auf eine Länge von $50\,m$ geplant. **4P**
Berechne die hierfür notwendige Erdmenge in Kubikmetern.

4.3 Überprüfe die Aussage:
Die Steigung des Erdwalls beträgt höchstens $100\,\%$. **1P**

4.4 Der Verlauf des Querschnitts des linken Walls lässt sich näherungsweise auch durch eine Funktion p mit **2P**

$$p(x) = kx^2(x-12)^2$$

beschreiben.
Bestimme k.

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. An einem Kundenschalter einer Elektronik-Fachmarktkette kommen Kunden, die Probleme mit ihrem Smartphone haben. Die Kundenberater am Schalter wissen aufgrund ihrer Erfahrung, dass diese Reklamationen auf folgenden typischen Problemen mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen:

Problem	Bedienungs-fehler	Defekter Akku	Betriebs-systemfehler	Sonstiger Fehler
Wahrscheinlichkeit	30 %	20 %	10 %	40 %

Von diesen vier Problemen tritt pro Reklamation genau eines auf.

Die Kundenberater können nur dann vor Ort helfen, falls es sich um einen Bedienungsfehler handelt oder wenn der Akku defekt ist. In allen anderen Fällen muss das Smartphone zur Reparatur geschickt werden.

1.1 An einem Morgen waren schon vier Kunden mit Smartphone-Reklamationen am Kundenschalter. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: **5P**

A: Der Kundenberater konnte allen vier Kunden vor Ort helfen.
B: Ein Bedienungsfehler lag genau bei einem Smartphone vor.
C: Bei mindestens einem Smartphone lag ein Betriebssystemfehler vor.

1.2 Formuliere für die Vorgänge am Kundenschalter eine mathematische Fragestellung, die mit Hilfe der Ungleichung **2P**

$$1 - 0{,}9^n > 0{,}5$$

beantwortet werden kann.

1.3 Einem Kunden mit einem Smartphone-Problem konnten die Kunden-Berater vor Ort helfen. **4P**
Mit welcher Wahrscheinlichkeit lag ein Bedienungsfehler vor?

1.4 Nach jeder Bearbeitung einer Reklamation wird der Kunde nach seiner Zufriedenheit befragt. **4P**
Von 150 befragten Kunden sind 105 zufrieden.
Bestimme ein 95 %-Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Kunden.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Aufgabe A2

2. Bei einem „gezinkten Würfel" beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine „6" zu würfeln, nur $10\,\%$. Mit dem Würfel wird 100-mal nacheinander gewürfelt. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Sechsen.

2.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 Sechsen auftreten. **3P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 16 Sechsen auftreten.

2.2 In welchem Intervall liegt die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von $68{,}3\,\%$. **3P**

2.3 Ermittle, wie oft ein Spieler mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $95\,\%$ mindestens einmal eine „6" zu erhalten. **3P**

2.4 Mit diesem Würfel führen nun Tristan und Isolde ein Glücksspiel durch. Tristan legt einen bestimmten Geldbetrag, welcher mindestens $4\,€$ beträgt, als Einsatz auf den Tisch. Dann würfelt er einmal. **6P**
Fällt eine „6", so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe verdoppeln; fällt keine „6", darf Isolde sich $2\,€$ vom Tisch nehmen. Dann wirft Tristan den Würfel ein zweites Mal. Fällt eine „6", so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe wiederum verdoppeln; fällt keine „6", darf Isolde sich erneut $2\,€$ vom Tisch nehmen. Damit ist das Spiel beendet und Tristan erhält den noch auf dem Tisch liegenden Restbetrag.
Ermittle, wie groß der Einsatz von Tristan sein muss, damit dieses Spiel fair ist.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1. Die Punkte $A(1|2|4)$, $B(1|2|1)$ und $C(5|2|4)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks.

1.1 Zeichne das Dreieck ABC in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Welche besondere Lage hat das Dreieck ABC? **3P**

1.2 Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist. **4P**
Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

1.3 Betrachte nun Pyramiden $ABCD$ mit der Grundfläche ABC. Das Volumen dieser Pyramiden soll 4 Volumeneinheiten betragen.

1.3.1 Bestimme einen geeigneten Punkt D. **4P**
Beschreibe die Lage von allen möglichen Punkten D.

1.3.2 Untersuche, ob die Gerade $g\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ **4P**
jede dieser Pyramiden schneidet.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

2. Drei Mobilfunkanbieter A, B und C konkurieren in einer Kleinstadt um 5600 Kunden. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Kunden, den Mobilfunkanbieter zu wechseln. Im Jahr 2015 sind 2000 Kunden bei A und 2000 bei B, die übrigen bei C.
Die Übergangsmatrix beschreibt das Wechselverhalten:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

2.1 Fülle die Leerstellen aus: Zum Jahresende 2015 **3P**
- wechseln …… von A zu B und …… von A zu C.
- wechseln …… von B zu A und …… von B zu C.

Wie viele Kunden bleiben bei ihrem Anbieter?

2.2 Berechne, wie viele Kunden von den einzelnen Mobilfunkanbietern Im Jahr 2015 beliefert werden. **2P**

2.3 Bei welcher Ausgangssituation würden sich die Anteile der Kunden bei den einzelnen Anbietern durch das angegebene Wechselverhalten nicht ändern? **10P**
Stelle diese Verteilung in einem Kreisdiagramm dar.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 Symmetrie von $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$:

Das Schaubild K ist achsensymmetrisch, der Funktionsterm hat nur gerade Potenzen von x. Es gilt:

$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} = g(x)$

Koordinaten der Extrempunkte:

$g'(x) = x^3 - 3x$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

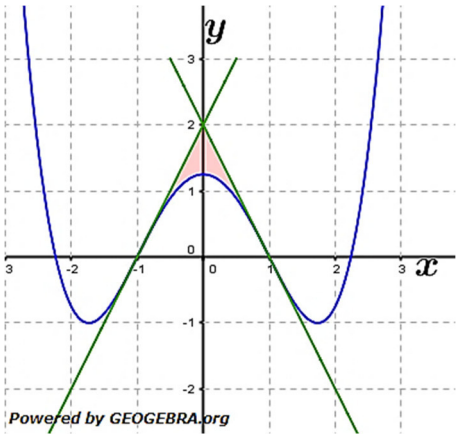
$g(0) = \frac{5}{4};\quad g(-\sqrt{3}) = -1;\quad g(\sqrt{3}) = 1$

$g''(x) = 3x^2 - 3$

$g''(0) = -3 < 0 \implies HP\left(0\middle|\frac{5}{4}\right)$

$g''(-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \implies TP_1(-\sqrt{3}|-1)$

$g''(\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \implies TP_2(\sqrt{3}|-1)$



1.2 Wendetangenten:

$g''(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$

$g'''(x) = 6x;\quad g'''(1) \neq 0;\quad g'''(-1) \neq 0;$

$g'(1) = 1 - 3 = -2;\ \ g'(-1) = -1 + 3 = 2$

$g(1) = 0;\quad g(-1) = 0$

$WP_1(-1|0);\quad WP_2 = (1|0)$

$t_1(x) = g'(1) \cdot (x - 1) + g(1) = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2$

$t_2(x) = g'(-1) \cdot (x + 1) + g(1) = 2(x + 1) + 0 = 2x + 2$

Eingeschlossene Fläche:

$t_1(x) = 0 = -2x + 2 \implies x = 1$

$A_1 = \int_0^1 t_1(x) - g(x)\ dx = \int_0^1 \left(-2x + 2 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right)\right)\ dx$

$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)\ dx = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{3}{4}x\right]_0^1 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}$

$A_1 = \frac{1}{5}$

Da K achsensymmetrisch ist, ist die Gesamtfläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Graphen K eingeschlossen wird gleich $2 \cdot A_1 = \frac{2}{5}$.

1.3 w ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0|4)$ und verläuft somit oberhalb von K. Das Rotationsvolumen bestimmt sich somit aus: $V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (w(x)^2 - g(x)^2)dx$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.4 (1) Die Aussage ist falsch, die Tangente in $x = -1$ hat die Steigung von etwa $-0{,}5$.

(2) Die Aussage ist falsch, das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle mit der Steigung 1, da f in $x = 0$ eine Extremstelle hat.

(3) Die Aussage ist richtig, da f in $\mathbb{D}$ fünf Extremstellen besitzt.

(4) Die Aussage ist richtig, denn:

$$\int_0^4 f'(x)\,dx = 0 = [f(x)]_0^4 = f(4) - f(0) = 1 - 1 = 0$$

Lösung A2

2.1 $m(0) = 230$

$230 = a \cdot b^0 = a$

$m(20) = 144{,}89 = 230 \cdot b^{20}$

$b^{20} = \frac{144{,}89}{230}$ | $\sqrt[20]{}$

$b = 0{,}9772$

$m(t) = 230 \cdot b^{0{,}9772t}$

2.2 $m_c(32) = 230 \cdot e^{-0{,}023 \cdot 32} \approx 110{,}18$

Prozentualer Anteil: $\frac{110{,}18}{230} = 0{,}479 = 47{,}9\,\%$

Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell noch etwa der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden.

$1\,\%$ der ursprünglichen Menge:

$0{,}01 = e^{-0{,}023t}$ | ln

$-0{,}023t = ln(0{,}01)$

$t = -\frac{ln(0{,}01)}{0{,}023} \approx 200{,}22$

Im Laufe des Jahre 2186 wird noch $1\,\%$ an Cäsium-137 vorhanden sein.

2.3.1 Der steile Anstieg des Schaubilds bis zum Hochpunkt (bei) zeigt, dass Plutonium-241 vergleichsweise schnell in Americum-241 zerfällt. Danach fällt die Kurve flacher ab, was bedeutet, dass Americum-241 sehr viel langsamer zerfällt als Plutonium-241.

2.3.2 Die Wertetabelle des WTR liefert:

$m_A(70) = 172{,}6$

$m_A(73) = 172{,}6$

Alle Tabellenwerte von $t = 71$ bis $t = 72$ sind etwa gleich, somit liegt die Maximalstelle bei $t = 71{,}5$

$m_A(71{,}5) = 172{,}61$

$198 + 71{,}5 = 2057{,}5$; also im Laufe des Jahres 2057.

Lösung A3

3.1 Für die ersten $10\,GE$ fallen keine Steuer an. Die darauffolgenden $10\,GE$ werden im Schnitt mit $20\,\%$ besteuert. $20\,\%$ ist der Mittelwert von $10\,\%$ und $30\,\%$. Das entspricht $2\,GE$ Steuern. Die restlichen $20\,GE$ werden im Durchschnitt mit $32{,}5\,\%$ vesteuert. Das ist der Mittelwert von $30\,\%$ und $35\,\%$. Das entspricht $6{,}5\,GE$ Steuern.

Insgesamt fallen somit bei einem Jahreseinkommen von $40\,000$ € Steuern in Höhe von $8\,500$ € an.

Der Durchschnittssteuersatz beträgt $\frac{8500}{40000} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

3.2 Da stets die ersten $60\,000$ € eines Jahreseinkommens mit einem geringeren Grenzsteuersatz als $40\,\%$ besteuert werden und somit erst der Teil über $60\,000$ € mit dem Grenzsteuersatz von $40\,\%$ besteuert wird, der Durchschnittsteuersatz sich aber aus beiden Teilen zusammensetzt, wird derselbe deshalb stets unter $40\,\%$ liegen.

3.3 Aus der Grafik ermitteln wir:

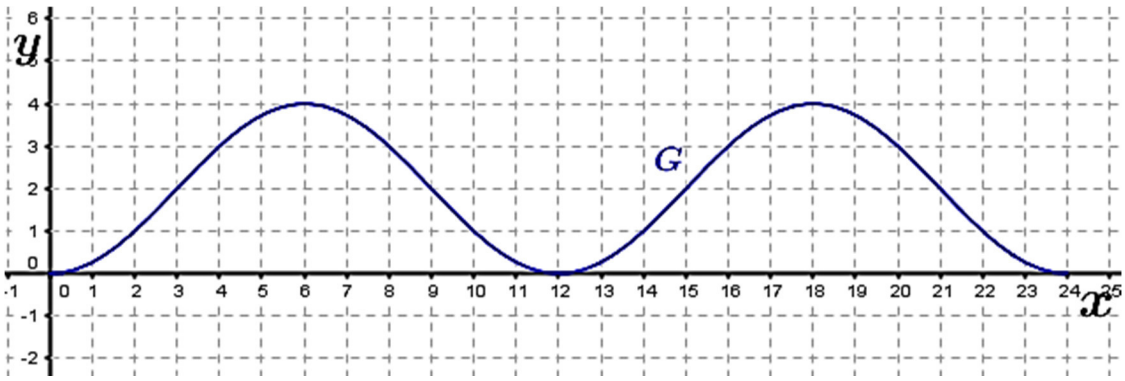
$$\frac{1600+40(x60)}{x} = 28 \qquad | \quad \cdot x$$

$$1600 + 40x - 2400 = 28x \Longrightarrow \quad x = 66{,}67$$

Bei einem Einkommen von $66\,667$ € ist der Durchschnittsteuersatz $28\,\%$.

Lösung A4

4.1



4.2 $V = 50 \cdot \int_0^{24} \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2\right) dx = \left[-\frac{12}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x\right]_0^{24} \approx 50 \cdot 48 = 2400$

Zum Aufschütten der Wälle werden $2400\,m^3$ Erde benötigt.

4.3 Eine Steigung ist am größ0ten in einem Wendepunkt mit positiver Steigung. Dieser Wendepunkt liegt bei $x = 3$.

$g'(x) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

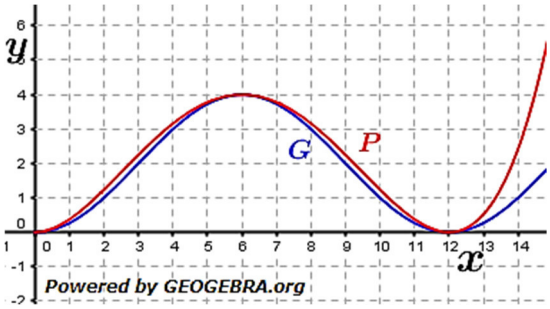
$g'(3) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}05 = 105\,\%$

Die Aussage ist falsch. Die größte Steigung ist größer als $100\,\%$.

4.4 Einer Punktprobe mit $P(6|4)$ ergibt:

$4 = k \cdot 36(6-12)^2 = 1296k$

$k = \frac{4}{36 \cdot 36} = \frac{1}{324}$



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Bernoullikette mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$ für Hilfe vor Ort.
$P(A) = B_{4;0,5}(X = 4) = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$ (WTR)
$P(B) = B_{4;0,3}(X = 1) = 0{,}4116 = 41{,}2\,\%$ (WTR)
$P(C) = B_{4;0,1}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,1}(X = 0) = 1 - 0{,}6561 = 0{,}3439 = 34{,}4\,\%$ (WTR)

1.2 Wie viele Reklamationen müssen mindestens erfolgen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $50\,\%$ mindestens 1 Betriebssystemfehler auftritt.

1.3 Fragestellung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Das Vorwissen, dass die Kundenberater vor Ort helfen konnten, wird als Ereignis D bezeichnet.
D: Kundenberater kann vor Ort helfen (also Bedienungsfehler oder defekter Akku) mit $P(D) = 0{,}5$.
E: Bedienungsfehler liegt vor.
$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5} = 60\,\%$
Wenn (bekannt ist, dass) die Kundenberater vor Ort helfen konnten, so liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von $60\,\%$ ein Bedienungsfehler vor.

1.4 $90\,\%$-Vertrauensintervall:
$h = \frac{105}{150} = 0{,}7;\ \ n = 150;\ \ z = 1{,}96$
$$\left[0{,}7 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot (1-0{,}7)}{150}}; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot (1-0{,}7)}{150}}\right] = [0{,}6267; 0{,}7733]$$
Der Anteil der zufriedenen Kunden liegt mit $95\,\%$-iger Wahrscheinlichkeit zwischen $62{,}7\,\%$ und $77{,}3\,\%$.

Lösung A2

2.1 Bernoulliexperiment mit $n = 100$ und $p = 0{,}1$ und $X = 1$ für eine „6".
10 mal eine Sechs:
$B_{100;0,1}(X = 10) = 0{,}1319 = 13{,}2\,\%$ (WTR)
Mindestens 16 Sechsen:
$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) = 1 - 0{,}9601 = 0{,}0399 = 4\,\%$ (WTR)

2.2 Wegen der Angabe von $68{,}3\,\%$ muss das 1-σ-Intervall gebildet werden.
$n = 100;\ \ p = 0{,}1;\ \ \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10;\ \ z = 1$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = 3$
1-σ-Intervall:
$[10 - 1 \cdot 3; 10 + 1 \cdot 3] = [7; 13]$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $68{,}3\,\%$ kommen mindestens 7 und höchstens 13 Sechsen in der Stichprobe vor.

2.3 Gesucht ist der Stichprobenumfang.
$B_{n;0,1}(X \geq 1) \geq 0{,}95$
$1 - B_{n;0,1}(X = 0) \geq 0{,}95$
$B_{n;0,1}(X = 0) \leq 0{,}05$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \leq 0{,}05$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}9^n \leq 0{,}05$

$0{,}9^n \leq 0{,}05 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln(0{,}9) \leq ln(0{,}05)$

$n \geq \frac{ln(0{,}05)}{ln(0{,}9)} = 28{,}43$

Es müssen mindestens 29 *Würfe erfolgen.*

2.4 Der Einsatz, den Tristan auf den Tisch legt, wird mit a (in EUR) bezeichnet. Es gibt für Tristan vier verschiedene Spielausgänge:

1. Zwei Sechsen: Isolde verdoppelt den Einsatz a EUR zwei Mal. Tristan nimmt $4a$ EUR vom Tisch, wovon $3a$ EUR Gewinn sind.
   $P(6;6) = 0{,}1^2 = 0{,}01$.
2. Sechs und andere Zahl: Isolde verdoppelt den Einsatz einmal und nimmt sich dann 2 EUR. Es bleiben $2a - 2$ EUR für Tristan, wovon $a - 2$ EUR Gewinn sind.
   $P(6;\overline{6}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09$.
3. Andere Zahl und Sechs: Luisa nimmt sich zunächst 2 EUR und verdoppelt dann den Betrag auf dem Tisch, sodass Tristan $(a-2) \cdot 2 = 2a - 4$ EUR vom Tisch nimmt, davon sind $a - 4$ EUR Gewinn.
   $P(\overline{6};6) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$.
4. Zwei andere Zahlen: Isolde nimmt sich insgesamt 4 EUR, sodass Tristan $a - 4$ EUR bleiben, dies entspricht einem Verlust von 4 EUR.
   $P(\overline{6};\overline{6}) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

Berechnung des Erwartungswertes des Gewinns von Max:

$E = 0{,}01 \cdot 3a + 0{,}09 \cdot (a-2) + 0{,}09 \cdot (a-4) + 0{,}81 \cdot (-4) = 0{,}21a - 3{,}78$

Faires Spiel für $E = 0$:

$0{,}21a - 3{,}78 = 0 \Longrightarrow \quad a = 18$

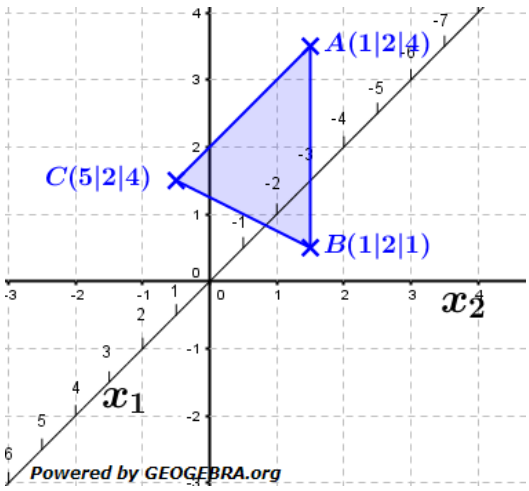
Damit das Spiel fair ist, muss der Einsatz von Tristan 18 *EUR betragen.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1

1.1 Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft, da alle x_2-Koordinaten denselben Wert aufweisen.



1.2 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \circ |\overrightarrow{AC}| = 0$ ist das Dreieck ABC bei A rechtwinklig.

1.3.1 Ebenengleichung der Grundfläche:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 = d$
$2 = d$
$E\colon\ x_2 = 2$

Sei $D(1|x_2|4)$, dann gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 24$$

$|-12x_2 + 24| = 24$
$x_{2_1} = 0;\ x_{2_2=4}$

Beispiel für mögliche D:
$D_1 = (1|0|4);\ D_2 = (1|4|4)$

Alle möglichen Punkte D liegen in einer der parallelen Ebenen, die von der Ebene durch A, B und C den Abstand 2 haben, also:
$E_1\colon\ x_2 = 0;\ E_2\colon\ x_2 = 4$

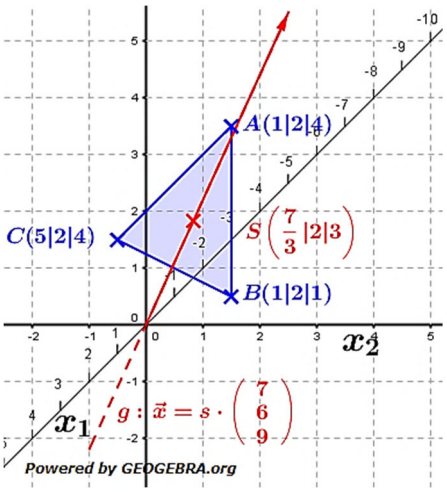
1.3.2 $E\colon\ x_2 = 2;\quad g\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E \cap g$

$x_2 = 3s \implies s = \frac{2}{3}$

$S = \left(\frac{7}{3} | 2 | 3\right)$

Da A, B, C und S dieselbe x_2-Koordinaten haben und außerdem $0 \le s \le 1$, ist S ein gemeinsamer Schnittpunkt von g mit allen Pyramiden, die ABC als Grundfläche besitzen.



Lösung A2

2.1 Von A wechseln $50\,\%$ zu B und $10\,\%$ zu C.
Von B wechseln $20\,\%$ zu A und $10\,\%$ zu C.
$40\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger A, also 800.
$70\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger B, also 1400.
$40\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger C, also 640.

2.2 $\boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1360 \\ 3200 \\ 1040 \end{pmatrix}$

Mobilfunkanbieter A beliefert 1360 Kunden, B 3200 Kunden und C 1040 Kunden.

2.3 Ansatz für die langfristige Verteilung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x + y + z = 5600$.

$\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{M}) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0{,}6 & -y \cdot 0{,}2 & -z \cdot 0{,}1 \\ -x \cdot 0{,}5 & y \cdot 0{,}3 & -z \cdot 0{,}5 \\ -x \cdot 0{,}1 & -y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}6 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $-0{,}5x + 0{,}3y - 0{,}5z = 0$ | $0{,}6 \cdot II + 0{,}5 \cdot I$
(III) $-0{,}1x - 0{,}1y + 0{,}6z = 0$ | $0{,}6 \cdot III + 0{,}1 \cdot I$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}08y - 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot II$
(III) $0 - 0{,}08y + 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot III + II$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}8y - 3{,}5z = 0$
(III) $0 + 0 + 0 = 0$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $0{,}8y - 3{,}5z = 0 \implies y = 4{,}375z$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 4

$y = 4{,}375z \longrightarrow (I)$

$0{,}6x - 0{,}2 \cdot 4{,}375z - 0{,}1z = 0$

$0{,}6x - 0{,}975z = 0 \Longrightarrow \quad x = 1{,}625z$

Einsetzen in $x + y + z = 5600$

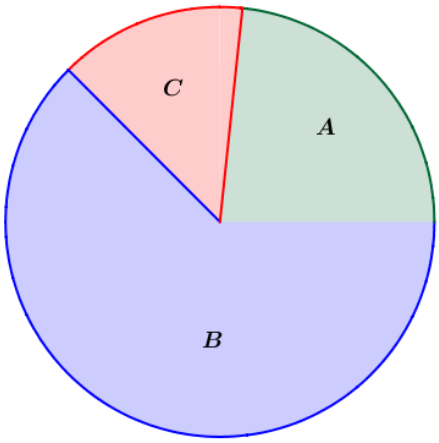
$1{,}625z + 4{,}375z + z = 5600 \Longrightarrow \quad z = 800$

Das LGS hat die Lösung $x = 1300; \;\; y = 3500; \;\; z = 800$

Wenn 1300 *Kunden von* A*,* 3500 *von* B *und* 800 *von* C *beliefert werden, gibt es keine Änderung.*

Kreisdiagramm:

A: $\frac{1300}{5600} \;\triangleq\; 84°$

B: $\frac{3500}{5600} \;\triangleq\; 225°$

A: $\frac{800}{5600} \;\triangleq\; 51°$