Abituraufgaben Teil 2 bis 4

Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

<u>Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis</u> *Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.*

Aufgabe A1.

Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von g ist K.



1.1 Untersuche K auf Symmetrie. Berechne die Koordinaten der Extrempunkte von K. Zeichne K.

7P

1.2 Die beiden Wendetangenten begrenzen mit *K* eine Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

5P

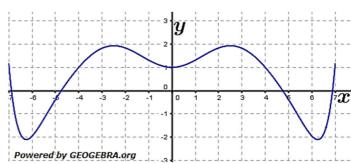
1.3 Betrachte nun die Funktion w mit $w(x) = -4x^2 + 4$; $x \in \mathbb{R}$. Die Schaubilder von g und w schneiden sich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Das Flächenstück, das von den beiden Schaubildern eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Geben Sie einen Rechenansatz zur Berechnung des Volumens des entstehenden Rotationskörpers an.

4P

1.4 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f mit dem Definitions-Bereich [-7;7].

6P

Begründe für jede der folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist.



- (1) Die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x=-2 hat die Steigung -1.
- (2) Das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle x=0 eine waagrechte Tangente.
- (3) Jede Stammfunktion von f hat fünf Wendestellen.
- (4) $\int_0^4 f'(x) dx = 0$





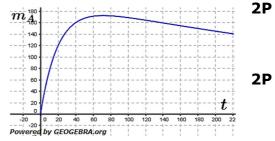
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4 Aufgabe A2

- Im Jahr 1986 gab es in Tschernobyl ein Reaktorunglück, bei dem die radioaktiven Isotope Cäsium-137 und Plutonium-241 freigesetzt wurden. Deren Radioaktivität ist noch immer messbar. Im Folgenden entspricht der Zeitpunkt t=0 dem Jahr 1986, wobei t in Jahren gemessen wird.
- 2.1 Die folgende Tabelle zeigt die geschätzten Werte für die nicht zerfallene Menge an Cäsium-137 (in Gramm), welche auf der Fläche Deutschlands insgesamt zu den angegebenen Zeitpunkten vorhanden waren.

Jahr	1986	1991	1996	2006
Cäsium-137	230,00	204,91	182,55	144,89

Der Zerfall des vorhandenen Cäsiums-137 soll durch eine Funktion m mit $m(t)=a\cdot b^t;\ t\geq 0$ veschrieben werden. Bestimme passende Werte für a und b.

- 2.2 Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Cäsium-137 in Gramm wird **4P** Durch das Modell m_c mit $m_c(t) = 230e^{-0.023t}$; $t \ge 0$ beschrieben. Wie viel Prozent des ursprünglich vorhandenen Cäsiums-137 sind im Jahr 2018 noch vorhanden? In welchem Jahr wird nur noch 1% der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden sein?
- 2.3 Plutonium-241 zerfällt zu Americum-241, welches selbst auch radioaktiv ist und daher weiter zerfällt. Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Americum-241 in Milligramm wird durch das Modell m_A mit $m_A(t) = 200(1-e^{-0.048t})\cdot e^{-0.0016t};\ t\geq 0$ angenähert. Die Abbildung zeigt das zugehörige Schaubild.
- 2.3.1 Begründe mithilfe der Abbildung, dass Plutonium-241 schneller zerfällt als Americum-241.
- 2.3.2 In welchem Jahr ist die Menge des Vorhanden Americums-241 am größten? Bestimme den Zeitpunkt auf ein halbes Jahr genau. (Auf Powered by GEOGEBRA, org einen Nachweis wird verzichtet).



2P



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4 Aufgabe A3

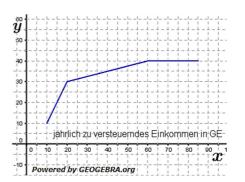
 Im Einkommensteuerbescheid wird unter anderem der Durchschnittsteuersatz angegeben. Eine Geldeinheit (GE) entspricht im Folgenden 1000 EUR.

Der Durchschnittsteuersatz kann aus dem Grenzsteuersatz, der im Schaubild dargestellt ist, berechnet werden. Beispiel:

Bei einem Jahreseinkommen von $15000 \, EUR \, (15 \, GE)$ sind die ersten $10000 \, EUR \, (10 \, GE)$ steuerfrei.

Die restlichen $5000\ EUR$ (5 GE) werden zwischen $10\ \%$ und $20\ \%$ besteuert, also im Mittel mit 5 %.

Die Steuer beträgt demnach $750\,EUR$, und der Durchschnittsteuersatz ist 750 geteilt durch 15000, also $5\,\%$.



Im Folgenden sollen die Informationen für Einkommen bis $85\ GE$ aus dem Schaubild genutzt werden.

3.1 Zeige, dass bei einem Jahreseinkommen von $40000\,EUR$ Steuern in Höhe von $8500\,EUR$ anfallen.

Bestimme den zugehörigen Durchschnittsteuersatz.

- 3.2 Kann der Durchschnittsteuersatz für ein Einkommen 40 % sein? **2P** Begründe.
- 3.3 Für 60 < x < 85 kann der Durchschnittsteuersatz S (in %) in Abhängigkeit des Jahreseinkommens x (in GE) folgendermaßen ermittelt werden:

$$S(x) = \frac{1600 + 40(x - 60)}{x}$$

Berechne, für welches Einkommen der Durchschnittsteursatz $28\,\%$ ist. Erläutere mithilfe des obigen Schaubilds, wie sich der Term für S ergibt.

Aufgabe A4

4. Als Lärmschutzwälle werden zwei Erdwälle der Gesamtbreite $24\,m$ errichtet. Der Verlauf des Querschnitts wird modelliert durch das Schaubild der Funktion g mit

$$g(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2; \ 0 \le x \le 24.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

- 4.1 Zeichne das zugehörige Schaubild in ein geeignetes Koordinatensystem. **3P**
- 4.2 Die beiden Erdwälle werden auf eine Länge von 50 m geplant. **4P** Berechne die hierfür notwendige Erdmenge in Kubikmetern.
- 4.3 Überprüfe die Aussage:
 Die Steigung des Erdwalls beträgt höchstens 100 %.
 - © by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium www.fit-in-mathe-online.de

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de



3P

5P



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

4.4 Der Verlauf des Querschnitts des linken Walls lässt sich näherungsweise auch durch eine Funktion p mit

$$p(x) = kx^2(x - 12)^2$$

beschreiben.

Bestimme k.

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. An einem Kundenschalter einer Elektronik-Fachmarktkette kommen Kunden, die Probleme mit ihrem Smartphone haben. Die Kundenberater am Schalter wissen aufgrund ihrer Erfahrung, dass diese Reklamationen auf folgenden typischen Problemen mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen:

Problem	Bedienungs- fehler		Betriebs- systemfehler	Sonstiger Fehler
Wahrscheinlichkeit	30 %	20 %	10 %	40 %

Von diesen vier Problemen tritt pro Reklamation genau eines auf.

Die Kundenberater können nur dann vor Ort helfen, falls es sich um einen Bedienungsfehler handelt oder wenn der Akku defekt ist. In allen anderen Fällen muss das Smartphone zur Reparatur geschickt werden.

- 1.1 An einem Morgen waren schon vier Kunden mit Smartphone-Reklamationen am Kundenschalter. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
 - A: Der Kundenberater konnte allen vier Kunden vor Ort helfen.
 - B: Ein Bedienungsfehler lag genau bei einem Smartphone vor.
 - *C*: Bei mindestens einem Smartphone lag ein Betriebssystemfehler vor.
- 1.2 Formuliere für die Vorgänge am Kundenschalter eine mathematische Fragestellung, die mit Hilfe der Ungleichung $1-0.9^n>0.5$

beantwortet werden kann.

- 1.3 Einem Kunden mit einem Smartphone-Problem konnten die Kunden-Berater vor Ort helfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lag ein Bedienungsfehler vor?
- 1.4 Nach jeder Bearbeitung einer Reklamation wird der Kunde nach seiner Zufriedenheit befragt.
 Von 150 befragten Kunden sind 105 zufrieden.
 Bestimme ein 95 %-Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Kunden.



5P

2P



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Aufgabe A2

- 2. Bei einem "gezinkten Würfel" beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine "6" zu würfeln, nur 10%. Mit dem Würfel wird 100-mal nacheinander gewürfelt. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Sechsen.
- 2.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 Sechsen auftreten. **3P**Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 16 Sechsen auftreten.
- 2.2 In welchem Intervall liegt die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 %.
- 2.3 Ermittle, wie oft ein Spieler mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal eine "6" zu erhalten.
- 2.4 Mit diesem Würfel führen nun Tristan und Isolde ein Glücksspiel durch. Tristan legt einen bestimmten Geldbetrag, welcher mindestens 4 € beträgt, als Einsatz auf den Tisch. Dann würfelt er einmal. Fällt eine "6", so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe verdoppeln; fällt keine "6", darf Isolde sich 2 € vom Tisch nehmen. Dann wirft Tristan den Würfel ein zweites Mal. Fällt eine "6", so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe wiederum verdoppeln; fällt keine "6", darf Isolde sich erneut 2 € vom Tisch nehmen. Damit ist das Spiel beendet und Tristan erhält den noch auf dem Tisch liegenden Restbetrag. Ermittle, wie groß der Einsatz von Tristan sein muss, damit dieses Spiel fair ist.

<u>Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse</u> Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet "Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

- 1. Die Punkte A(1|2|4), B(1|2|1) und C(5|2|4) sind die Eckpunkte eines Dreiecks
- 1.1 Zeichne das Dreieck *ABC* in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Welche besondere Lage hat das Dreieck *ABC*?
- 1.2 Untersuche, ob das Dreieck *ABC* gleichschenklig ist. **4P** Zeige, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig ist.
- 1.3 Betrachte nun Pyramiden *ABCD* mit der Grundfläche *ABC*. Das Volumen dieser Pyramiden soll 4 Volumeneinheiten betragen.
- 1.3.1 Bestimme einen geeigneten Punkt *D*.

 Beschreibe die Lage von allen möglichen Punkten *D*.
- 1.3.2 Untersuche, ob die Gerade $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ jede dieser Pyramiden schneidet.



Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de





Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet "Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

2. Drei Mobilfunkanbieter A, B und C konkurieren in einer Kleinstadt um 5600 Kunden. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Kunden, den Mobilfunkanbieter zu wechseln. Im Jahr 2015 sind 2000 Kunden bei A und 2000 bei B, die übrigen bei C.

Die Übergangsmatrix beschreibt das Wechselverhalten:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

2.1 Fülle die Leerstellen aus: Zum Jahresende 2015

3P

- wechseln von A zu B und von A zu C.
- wechseln von B zu A und von B zu C.

Wie viele Kunden bleiben bei ihrem Anbieter?

- 2.2 Berechne, wie viele Kunden von den einzelnen Mobilfunkanbietern
 Im Jahr 2015 beliefert werden.
- 2.3 Bei welcher Ausgangssituation würden sich die Anteile der Kunden bei den einzelnen Anbietern durch das angegebene Wechselverhalten nicht ändern?

 Stelle diese Verteilung in einem Kreisdiagramm dar.