Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 Symmetrie von $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$:

Das Schaubild K ist achsensymmetrisch, der Funktionsterm hat nur gerade Potenzen von x. Es gilt:

$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} = g(x)$

Koordinaten der Extrempunkte:

$g'(x) = x^3 - 3x$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

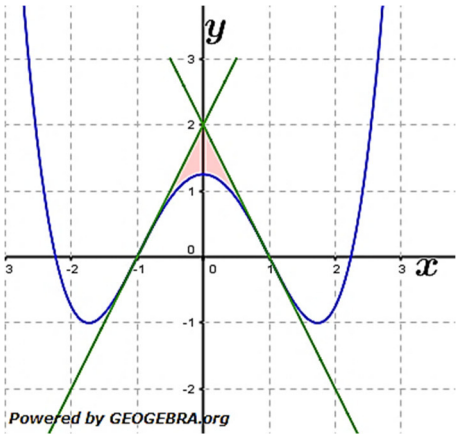
$g(0) = \frac{5}{4};\quad g(-\sqrt{3}) = -1;\quad g(\sqrt{3}) = 1$

$g''(x) = 3x^2 - 3$

$g''(0) = -3 < 0 \implies HP\left(0\middle|\frac{5}{4}\right)$

$g''(-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \implies TP_1(-\sqrt{3}|-1)$

$g''(\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \implies TP_2(\sqrt{3}|-1)$



1.2 Wendetangenten:

$g''(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$

$g'''(x) = 6x;\quad g'''(1) \neq 0;\quad g'''(-1) \neq 0;$

$g'(1) = 1 - 3 = -2;\ \ g'(-1) = -1 + 3 = 2$

$g(1) = 0;\quad g(-1) = 0$

$WP_1(-1|0);\quad WP_2 = (1|0)$

$t_1(x) = g'(1) \cdot (x - 1) + g(1) = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2$

$t_2(x) = g'(-1) \cdot (x + 1) + g(1) = 2(x + 1) + 0 = 2x + 2$

Eingeschlossene Fläche:

$t_1(x) = 0 = -2x + 2 \implies x = 1$

$A_1 = \int_0^1 t_1(x) - g(x)\ dx = \int_0^1 \left(-2x + 2 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right)\right)\ dx$

$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)\ dx = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{3}{4}x\right]_0^1 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}$

$A_1 = \frac{1}{5}$

Da K achsensymmetrisch ist, ist die Gesamtfläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Graphen K eingeschlossen wird gleich $2 \cdot A_1 = \frac{2}{5}$.

1.3 w ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0|4)$ und verläuft somit oberhalb von K. Das Rotationsvolumen bestimmt sich somit aus: $V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (w(x)^2 - g(x)^2)dx$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.4 (1) Die Aussage ist falsch, die Tangente in $x = -1$ hat die Steigung von etwa $-0{,}5$.

(2) Die Aussage ist falsch, das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle mit der Steigung 1, da f in $x = 0$ eine Extremstelle hat.

(3) Die Aussage ist richtig, da f in $\mathbb{D}$ fünf Extremstellen besitzt.

(4) Die Aussage ist richtig, denn:

$$\int_0^4 f'(x)\,dx = 0 = [f(x)]_0^4 = f(4) - f(0) = 1 - 1 = 0$$

Lösung A2

2.1 $m(0) = 230$

$230 = a \cdot b^0 = a$

$m(20) = 144{,}89 = 230 \cdot b^{20}$

$b^{20} = \frac{144{,}89}{230}$ | $\sqrt[20]{}$

$b = 0{,}9772$

$m(t) = 230 \cdot b^{0{,}9772t}$

2.2 $m_c(32) = 230 \cdot e^{-0{,}023 \cdot 32} \approx 110{,}18$

Prozentualer Anteil: $\frac{110{,}18}{230} = 0{,}479 = 47{,}9\,\%$

Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell noch etwa der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden.

$1\,\%$ der ursprünglichen Menge:

$0{,}01 = e^{-0{,}023t}$ | ln

$-0{,}023t = ln(0{,}01)$

$t = -\frac{ln(0{,}01)}{0{,}023} \approx 200{,}22$

Im Laufe des Jahre 2186 wird noch $1\,\%$ an Cäsium-137 vorhanden sein.

2.3.1 Der steile Anstieg des Schaubilds bis zum Hochpunkt (bei) zeigt, dass Plutonium-241 vergleichsweise schnell in Americum-241 zerfällt. Danach fällt die Kurve flacher ab, was bedeutet, dass Americum-241 sehr viel langsamer zerfällt als Plutonium-241.

2.3.2 Die Wertetabelle des WTR liefert:

$m_A(70) = 172{,}6$

$m_A(73) = 172{,}6$

Alle Tabellenwerte von $t = 71$ bis $t = 72$ sind etwa gleich, somit liegt die Maximalstelle bei $t = 71{,}5$

$m_A(71{,}5) = 172{,}61$

$198 + 71{,}5 = 2057{,}5$; also im Laufe des Jahres 2057.

Lösung A3

3.1 Für die ersten $10\,GE$ fallen keine Steuer an. Die darauffolgenden $10\,GE$ werden im Schnitt mit $20\,\%$ besteuert. $20\,\%$ ist der Mittelwert von $10\,\%$ und $30\,\%$. Das entspricht $2\,GE$ Steuern. Die restlichen $20\,GE$ werden im Durchschnitt mit $32{,}5\,\%$ vesteuert. Das ist der Mittelwert von $30\,\%$ und $35\,\%$. Das entspricht $6{,}5\,GE$ Steuern.

Insgesamt fallen somit bei einem Jahreseinkommen von $40\,000$ € Steuern in Höhe von $8\,500$ € an.

Der Durchschnittssteuersatz beträgt $\frac{8500}{40000} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.2 Da stets die ersten $60\,000$ € eines Jahreseinkommens mit einem geringeren Grenzsteuersatz als $40\,\%$ besteuert werden und somit erst der Teil über $60\,000$ € mit dem Grenzsteuersatz von $40\,\%$ besteuert wird, der Durchschnittsteuersatz sich aber aus beiden Teilen zusammensetzt, wird derselbe deshalb stets unter $40\,\%$ liegen.

3.3 Aus der Grafik ermitteln wir:

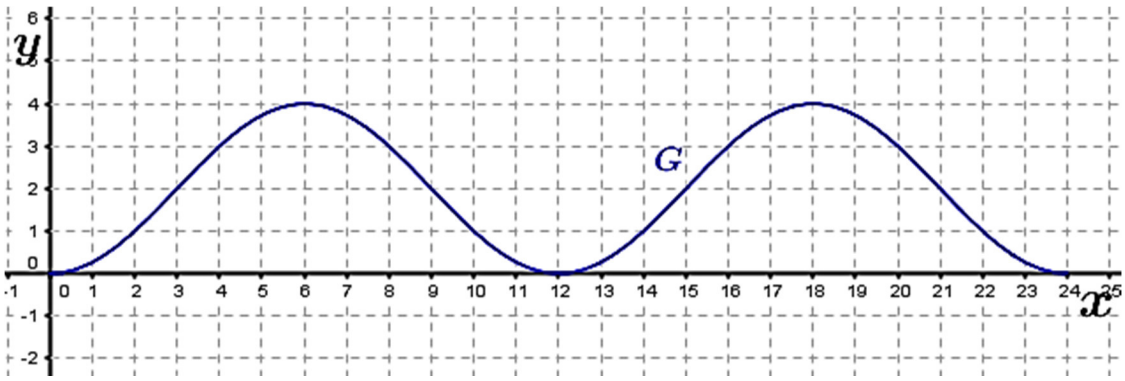
$$\frac{1600+40(x60)}{x} = 28 \qquad | \quad \cdot x$$

$$1600 + 40x - 2400 = 28x \Longrightarrow \quad x = 66{,}67$$

Bei einem Einkommen von $66\,667$ € ist der Durchschnittsteuersatz $28\,\%$.

Lösung A4

4.1



4.2 $V = 50 \cdot \int_0^{24} \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2\right) dx = \left[-\frac{12}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x\right]_0^{24} \approx 50 \cdot 48 = 2400$

Zum Aufschütten der Wälle werden $2400\,m^3$ Erde benötigt.

4.3 Eine Steigung ist am größ0ten in einem Wendepunkt mit positiver Steigung. Dieser Wendepunkt liegt bei $x = 3$.

$g'(x) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

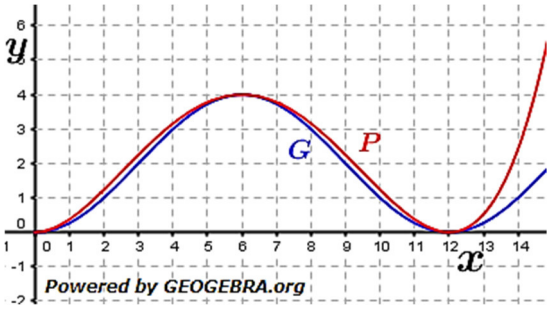
$g'(3) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}05 = 105\,\%$

Die Aussage ist falsch. Die größte Steigung ist größer als $100\,\%$.

4.4 Einer Punktprobe mit $P(6|4)$ ergibt:

$4 = k \cdot 36(6-12)^2 = 1296k$

$k = \frac{4}{36 \cdot 36} = \frac{1}{324}$



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Bernoullikette mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$ für Hilfe vor Ort.
$P(A) = B_{4;0,5}(X = 4) = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$ (WTR)
$P(B) = B_{4;0,3}(X = 1) = 0{,}4116 = 41{,}2\,\%$ (WTR)
$P(C) = B_{4;0,1}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,1}(X = 0) = 1 - 0{,}6561 = 0{,}3439 = 34{,}4\,\%$ (WTR)

1.2 Wie viele Reklamationen müssen mindestens erfolgen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $50\,\%$ mindestens 1 Betriebssystemfehler auftritt.

1.3 Fragestellung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Das Vorwissen, dass die Kundenberater vor Ort helfen konnten, wird als Ereignis D bezeichnet.
D: Kundenberater kann vor Ort helfen (also Bedienungsfehler oder defekter Akku) mit $P(D) = 0{,}5$.
E: Bedienungsfehler liegt vor.
$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5} = 60\,\%$
Wenn (bekannt ist, dass) die Kundenberater vor Ort helfen konnten, so liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von $60\,\%$ ein Bedienungsfehler vor.

1.4 $90\,\%$-Vertrauensintervall:
$h = \frac{105}{150} = 0{,}7;\ \ n = 150;\ \ z = 1{,}96$
$$\left[0{,}7 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot (1-0{,}7)}{150}}; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot (1-0{,}7)}{150}}\right] = [0{,}6267; 0{,}7733]$$
Der Anteil der zufriedenen Kunden liegt mit $95\,\%$-iger Wahrscheinlichkeit zwischen $62{,}7\,\%$ und $77{,}3\,\%$.

Lösung A2

2.1 Bernoulliexperiment mit $n = 100$ und $p = 0{,}1$ und $X = 1$ für eine „6".
10 mal eine Sechs:
$B_{100;0,1}(X = 10) = 0{,}1319 = 13{,}2\,\%$ (WTR)
Mindestens 16 Sechsen:
$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) = 1 - 0{,}9601 = 0{,}0399 = 4\,\%$ (WTR)

2.2 Wegen der Angabe von $68{,}3\,\%$ muss das 1-σ-Intervall gebildet werden.
$n = 100;\ \ p = 0{,}1;\ \ \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10;\ \ z = 1$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = 3$
1-σ-Intervall:
$[10 - 1 \cdot 3; 10 + 1 \cdot 3] = [7; 13]$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $68{,}3\,\%$ kommen mindestens 7 und höchstens 13 Sechsen in der Stichprobe vor.

2.3 Gesucht ist der Stichprobenumfang.
$B_{n;0,1}(X \geq 1) \geq 0{,}95$
$1 - B_{n;0,1}(X = 0) \geq 0{,}95$
$B_{n;0,1}(X = 0) \leq 0{,}05$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \leq 0{,}05$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}9^n \leq 0{,}05$

$0{,}9^n \leq 0{,}05 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln(0{,}9) \leq ln(0{,}05)$

$n \geq \frac{ln(0{,}05)}{ln(0{,}9)} = 28{,}43$

Es müssen mindestens 29 *Würfe erfolgen.*

2.4 Der Einsatz, den Tristan auf den Tisch legt, wird mit a (in EUR) bezeichnet. Es gibt für Tristan vier verschiedene Spielausgänge:

1. Zwei Sechsen: Isolde verdoppelt den Einsatz a EUR zwei Mal. Tristan nimmt $4a$ EUR vom Tisch, wovon $3a$ EUR Gewinn sind.
   $P(6;6) = 0{,}1^2 = 0{,}01$.
2. Sechs und andere Zahl: Isolde verdoppelt den Einsatz einmal und nimmt sich dann 2 EUR. Es bleiben $2a - 2$ EUR für Tristan, wovon $a - 2$ EUR Gewinn sind.
   $P(6;\overline{6}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09$.
3. Andere Zahl und Sechs: Luisa nimmt sich zunächst 2 EUR und verdoppelt dann den Betrag auf dem Tisch, sodass Tristan $(a-2) \cdot 2 = 2a - 4$ EUR vom Tisch nimmt, davon sind $a - 4$ EUR Gewinn.
   $P(\overline{6};6) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$.
4. Zwei andere Zahlen: Isolde nimmt sich insgesamt 4 EUR, sodass Tristan $a - 4$ EUR bleiben, dies entspricht einem Verlust von 4 EUR.
   $P(\overline{6};\overline{6}) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

Berechnung des Erwartungswertes des Gewinns von Max:

$E = 0{,}01 \cdot 3a + 0{,}09 \cdot (a-2) + 0{,}09 \cdot (a-4) + 0{,}81 \cdot (-4) = 0{,}21a - 3{,}78$

Faires Spiel für $E = 0$:

$0{,}21a - 3{,}78 = 0 \Longrightarrow \quad a = 18$

Damit das Spiel fair ist, muss der Einsatz von Tristan 18 *EUR betragen.*

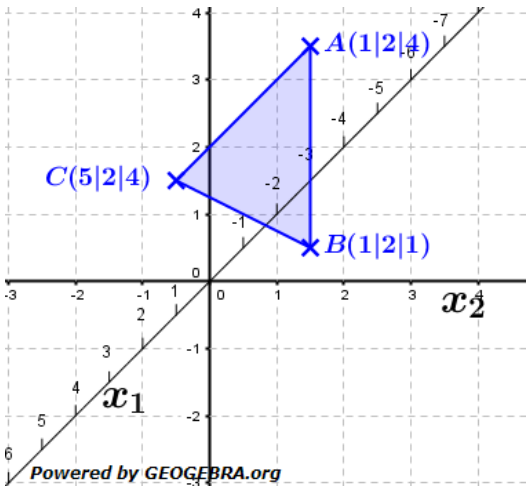
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 4

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1

1.1 Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft, da alle x_2-Koordinaten denselben Wert aufweisen.



1.2 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \circ |\overrightarrow{AC}| = 0$ ist das Dreieck ABC bei A rechtwinklig.

1.3.1 Ebenengleichung der Grundfläche:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 = d$
$2 = d$
$E\colon\ x_2 = 2$

Sei $D(1|x_2|4)$, dann gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 24$$

$|-12x_2 + 24| = 24$
$x_{2_1} = 0;\ x_{2_2=4}$

Beispiel für mögliche D:
$D_1 = (1|0|4);\ D_2 = (1|4|4)$

Alle möglichen Punkte D liegen in einer der parallelen Ebenen, die von der Ebene durch A, B und C den Abstand 2 haben, also:
$E_1\colon\ x_2 = 0;\ E_2\colon\ x_2 = 4$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

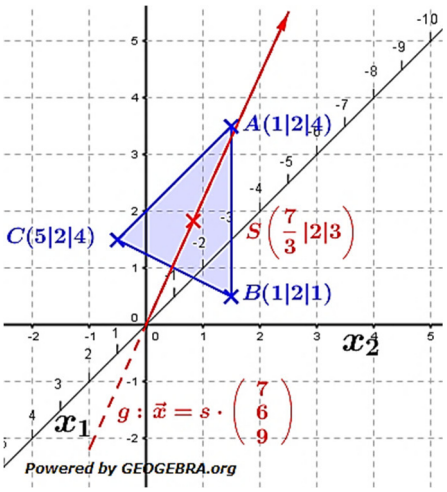
1.3.2 $E\colon\ x_2 = 2;\quad g\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E \cap g$

$x_2 = 3s \implies s = \frac{2}{3}$

$S = \left(\frac{7}{3} | 2 | 3\right)$

Da A, B, C und S dieselbe x_2-Koordinaten haben und außerdem $0 \le s \le 1$, ist S ein gemeinsamer Schnittpunkt von g mit allen Pyramiden, die ABC als Grundfläche besitzen.



Lösung A2

2.1 Von A wechseln $50\,\%$ zu B und $10\,\%$ zu C.
Von B wechseln $20\,\%$ zu A und $10\,\%$ zu C.
$40\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger A, also 800.
$70\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger B, also 1400.
$40\,\%$ bleiben bei ihrem Versorger C, also 640.

2.2 $\boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1360 \\ 3200 \\ 1040 \end{pmatrix}$

Mobilfunkanbieter A beliefert 1360 Kunden, B 3200 Kunden und C 1040 Kunden.

2.3 Ansatz für die langfristige Verteilung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x + y + z = 5600$.

$\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{M}) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0{,}6 & -y \cdot 0{,}2 & -z \cdot 0{,}1 \\ -x \cdot 0{,}5 & y \cdot 0{,}3 & -z \cdot 0{,}5 \\ -x \cdot 0{,}1 & -y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}6 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $-0{,}5x + 0{,}3y - 0{,}5z = 0$ | $0{,}6 \cdot II + 0{,}5 \cdot I$
(III) $-0{,}1x - 0{,}1y + 0{,}6z = 0$ | $0{,}6 \cdot III + 0{,}1 \cdot I$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}08y - 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot II$
(III) $0 - 0{,}08y + 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot III + II$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}8y - 3{,}5z = 0$
(III) $0 + 0 + 0 = 0$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $0{,}8y - 3{,}5z = 0 \implies y = 4{,}375z$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 4

$y = 4{,}375z \longrightarrow (I)$

$0{,}6x - 0{,}2 \cdot 4{,}375z - 0{,}1z = 0$

$0{,}6x - 0{,}975z = 0 \Longrightarrow \quad x = 1{,}625z$

Einsetzen in $x + y + z = 5600$

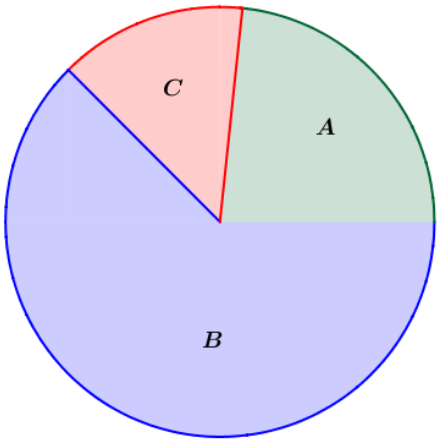
$1{,}625z + 4{,}375z + z = 5600 \Longrightarrow \quad z = 800$

Das LGS hat die Lösung $x = 1300; \;\; y = 3500; \;\; z = 800$

Wenn 1300 *Kunden von* A*,* 3500 *von* B *und* 800 *von* C *beliefert werden, gibt es keine Änderung.*

Kreisdiagramm:

A: $\frac{1300}{5600} \;\triangleq\; 84°$

B: $\frac{3500}{5600} \;\triangleq\; 225°$

A: $\frac{800}{5600} \;\triangleq\; 51°$