Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 5

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1. Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Zeige, dass K keine Extrempunkte besitzt. Untersuche das Krümmungsverhalten von K. Zeichne K. **5P**

1.2 Entscheide und begründe, welche der folgenden Abbildungen das Schaubild K zeigt. **2P**

Abbildung 1

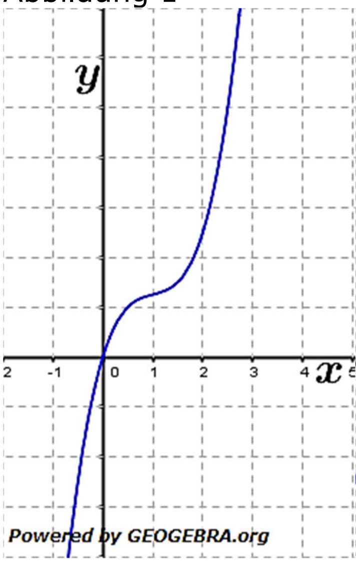


Abbildung 2

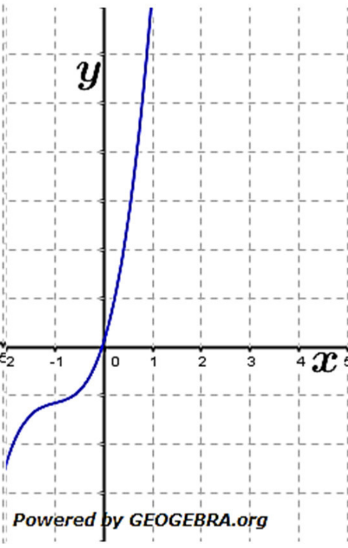
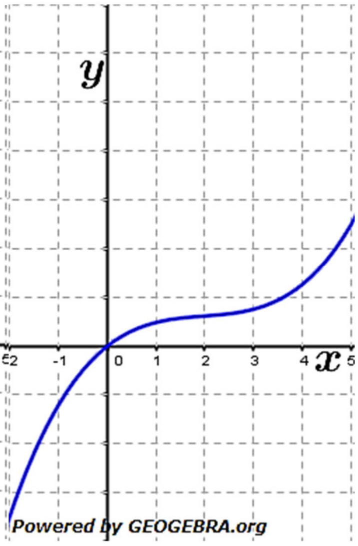


Abbildung 3



1.3 Die Tangente an K im Ursprung begrenzt mit K eine Fläche. Zeichne diese Tangente in die entsprechende Abbildung aus 1.2 ein. Ermittle den Inhalt der Fläche mithilfe einer Stammfunktion. **7P**

1.4 Zeige, dass die erste Winkelhalbierende eine Tangente an das Schaubild darstellt. **3P**

1.5 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b;\ x \in \mathbb{R}$. **3P**
Bestimme a und b so, dass die Tangente an das Schaubild von g in $P(2|2)$ parallel zur Geraden mit der Steigung $y = -x$ verläuft.

Aufgabe A2

2. Bei den olympischen Sommerspielen 2008 in Peking legte der Jamaikaner Usain Bolt die 100 Meter (m) in der damaligen Weltrekordzeit von fabelhaften $9{,}69$ Sekunden (s) zurück. Dabei begann Bolt bereits nach $80\,m$ zu jubeln und verringerte somit vorzeitig seine Geschwindigkeit.
Analysiert man seinen Lauf auf jeweils $10\,m$ langen Abschnitten, ergeben sich die folgenden Daten:

d	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t	0	1,85	2,87	3,78	4,65	5,50	6,32	7,14	7,96	8,79	9,69
$\overline{v}$		5,41	9,80	10,99	11,49	11,76	12,19	12,19	12,19	12,05	11,11

In der Tabelle bedeuten:
- d die zurückgelegte Distanz in m
- t die Zeit in s
- $\overline{v}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit im jeweiligen 10-m-Intervall in $\frac{m}{s}$.

Zum Beispiel ist $5{,}41\frac{m}{s}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ auf den ersten 10 Metern.

2.1 Wie lange benötigte Bolt für die letzten $50\,m$ des Laufs? **5P**
Kann ein Mensch mit einer höheren Geschwindigkeit als $40\,km/h$ rennen?
Welche Zeit hätte Bolt erreicht, wenn er in diesem Lauf die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit aus der Tabelle bis zum Ende des Laufs beibehalten hätte?

2.2 Die Funktion v mit **2P**
$v(t) = 0{,}0382t^3 - 0{,}8158t^2 + 5{,}4828t + 0{,}4546;\ \ t \in [0; 9{,}69]$
modelliert die Momentangeschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Laufzeit t in s.
Zeige, dass Bolt nach diesem Modell zwischen $t = 5{,}4\,s$ und $t = 5{,}5\,s$ die maximale Geschwindigkeit erreichte.

2.3 Formuliere für Bolts Lauf eine passende Frage, deren Antwort die Lösung der Gleichung $\int_3^{3+z} v(t)\,dt = 50$ für $z > 0$ ist. **3P**

Aufgabe A3

3. In einem Bootsverleih kann man sich Boote verschiedenen Typs ausleihen. Die entsprechenden Preise sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Bootstyp	Preis je Stunde
Motorboot	35 €
Elektroboot	25 €
Tretboot	10 €

3.1 An einem heißen Sommertag sind alle 48 Boote gleichzeitig ausgeliehen. Die Einnahmen nach einer Stunde betragen 980 €. Die Anzahl der Tretboote ist doppelt so groß wie die Anzahl der Motorboote. Wie viele Motor-, Elektro- und Tretboote besitzt der Bootsverleih? **5P**

3.2 Für die letzte Stunde des Tages fragt sich Jutta, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind. **5P**
Dazu stellt sie das nachfolgende LGS auf:
$x + y + z = 25$
$35x + 25y + 10z = 525$
Und formt dieses auf die Dreiecksform um:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1{,}5 & -10 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 35 \end{array}\right)$$
Welche Information hat Jutta?
Beantworte Juttas Frage.

Aufgabe A4

4. Ein Kondensator ist ein Bauteil, das elektrische Ladung speichert. Der Ladevorgang eines Kondensators wird im Labor untersucht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Aufladevorgang. Die Stärke des elektrischen Stroms, der beim Aufladen fließt, wird gemessen.
Die Messwerte sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

t in Sekunden (s)	1,0	2,4	4,8	7,2	9,6
I in Milliampere (mA)	9,0	6,0	3,0	1,5	0,75

Der Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Stromstärke I soll durch eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden.

4.1 Bestimme einen Funktionsterm. **2P**

4.2 Wann ist die momentane Änderungsrate der Stromstärke ebenso groß wie ihre durchschnittliche Änderungsrate im Zeitraum von $1{,}0\ s$ bis $2{,}4\ s$? **2P**

4.3 Die Stromstärke I ist die momentane Änderungsrate der Ladung Q. Die Ladung wird in Milliampere-Sekunden (mAs) gemessen.

4.3.1 Bestimme die Ladung, die in den ersten 18 Sekunden auf dem Kondensator gespeichert wird. **4P**

4.3.2 Nach welcher Zeit trägt der Kondensator $60\,\%$ dieser Ladung? Gib einen zugehörigen Rechenansatz an. **2P**

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. Zwei Seiten eines idealen Würfels sind mit S, zwei weitere sind mit A und zwei Seiten sind mit B beschriftet.
Bei einem Schulfest der „Schule am Berg" (SAB) stehen drei derart beschriftete Würfel zur Verfügung. Bei einem Versuch werden diese Würfel gleichzeitig geworfen.

1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: **5P**
A: Alle drei Würfel zeigen des gleichen Buchstaben.
B: Mindestens ein Würfel zeigt den Buchstaben S.
Zeige, dass mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{9}$ mit den gewürfelten Buchstaben das Wort SAB gebildet werden kann.

1.2 Formuliere für den oben beschriebenen Versuch ein Ereignis Dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{27}$ ist. **2P**

1.3 Wie viele Versuche braucht man mindestens, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ mindestens einmal das Wort SAB bilden zu können? **3P**

1.4 Wer nach einem Versuch das Wort SAB bilden kann, erhält einen Preis. **5P**
Ein Spiel besteht aus drei Versuchen. Pro Spiel kann man also maximal drei Preise erhalten.
Wie viele Preise erhält man durchschnittlich pro Spiel?
Gib eine begründete Empfehlung, wie viele Preise die Schule bereithalten sollte, wenn insgesamt maximal 900 Spiele auf dem Schulfest gemacht werden.

Aufgabe A2

2. In der „Fußball-Bundesliga" steigt die Anzahl der Besucher pro Spiel ständig. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu $25\,\%$ weiblich.

2.1 Bei einem Bundesliga-Spiel wird das Geschlecht von 50 zufällig ausgewählten Zuschauern erfasst. **4P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass:
A: genau 17 Zuschauer weiblich sind.
B: mindestens 11 und höchstens 18 Zuschauer weiblich sind.
C: nur die letzten 8 befragten Zuschauer weiblich sind.

2.2 Beschreibe im vorliegenden Sachzusammenhang ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $P = 1 - \sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{1000-k}$ berechnet werden kann. **4P**

2.3 Bei einem Bundesliga-Spiel strömen $20\,000$ Zuschauer ins Stadion, Hierbei wird wiederum angenommen, dass $25\,\%$ der Zuschauer weiblich sind. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist. **3P**
In welchem Intervall liegt die Anzahl der benötigten Flyer mit einer Wahrscheinlichkeit von $95{,}4\,\%$?
Der Geschäftsführer des Unternehmens, welches die Flyer druckt, empfiehlt, die Wahrscheinlichkeit auf $99{,}7\,\%$ zu erhöhen.
Weshalb schlägt der Geschäftsführer dies wohl vor?

2.4 Bei einem Bundesliga-Spiel wird vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über $25\,\%$ gestiegen ist. Von 134 erfassten Zuschauern waren 36 Frauen. **4P**
Bestimme ein $95\,\%$ Vertrauensintervall für den Anteil weiblicher Zuschauer.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1. Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|1|0)$, $B(2|3|0)$ und $P(3|0|2{,}5)$.

1.1 Bestimme eine Koordinatengleichung von E. **5P**
Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1-Achse?
(Teilergebnis: $E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$)

1.2 Zeige, dass das Dreieck ABP gleichschenklig ist. **7P**
Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck mit Diagonalschnittpunkt P.
Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D.
Es gibt senkrechte Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$ und der Höhe 12. Berechne die Koordinaten einer Spitze dieser Pyramiden.

1.3 Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse AB? **3P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 5*

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

2. Die Firma „Backe-Gutsle" stellt verschiedene Plätzchen her, die sie in zwei verschiedenen Verpackungen anbietet. Die Plätzchen werden hauptsächlich aus Butter, Zucker, Mehl und Nüssen hergestellt. Die quantitativen Zusammenhänge sind durch die folgenden Tabellen gegeben.

Menge der Zutaten (g) pro Plätzchen

	Butterplätzchen	Nussplätzchen
Butter	2,5	1,5
Zucker	1,6	1
Mehl	2,5	2,5
Nüsse	0	2,5

Anzahl Plätzchen pro Packung

	Packung 1	Packung II
Butterplätzchen	5	7
Nussplätzchen	7	9

2.1 Stelle den zweistufigen Prozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. **3P**

2.2 Die Firma soll einem Kunden 100 Packungen I und 150 Packungen II liefern. Wie viel Gramm an Zucker und Mehl sind hierfür notwendig? **4P**

2.3 Es wird festgestellt, dass noch 372 g Zucker und 682,5 g Mehl vorhanden sind. Welche Menge der anderen Zutaten muss beschafft werden, wenn alle Zutaten vollständig zu Plätzchen verarbeitet werden sollen. **4P**

2.4 Die Firma möchte eine neue Packung auf den Markt bringen. **4P**
In dieser Packung sollen doppelt so viele Nuss- wie Butterplätzchen enthalten sein. Der Gewichtsverlust beim Backen ist vernachlässigbar. Das Gewicht des Packungsinhaltes soll 200 g nicht überschreiten.
Wie viele Plätzchen von jeder Sorte sind maximal in der neuen Packung?

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 5

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 Extrempunkte mit $f'(x)=0$

$f'(x)=3x^2-6x+\frac{13}{4}$

$3x^2-6x+\frac{13}{4}=0 \qquad | \quad :3$

$x^2-2x+\frac{13}{12}=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{13}{12}} \qquad | \quad p/q$-Formel

$\mathbb{L}=\{\}$

Krümmungsverhalten über $f'''(x)=$ im Wendepunkt.

$f''(x)=6x-6; \quad f'''(x)=6$

$6x-6=0 \Longrightarrow \quad x=1$

$f'''(1)>0$

K wechselt in $x=1$ von rechtsgekrümmt auf linksgekrümmt.

Rechtskrümmung im Intervall $I=]-\infty;1]$, Linkskrümmung im Intervall $I=]1;\infty[$.

$f(1)=1-3+\frac{13}{4}=\frac{5}{4}$

1.2 Abbildung 1 ist das Schaubild von f.

Aus 1.1 ergibt sich der Wendepunkt mit $WP\left(1\middle|\frac{5}{4}\right)$. Nur Abbildung 1 hat einen solchen Wendepunkt.

1.3 Tangente im Ursprung:

$t(x)=f'(0)\cdot x$

$f'(0)=\frac{13}{4}$

$t(x)=\frac{13}{4}\cdot x$

Inhalt der Fläche:

$f(x)\cap t(x)$

$x^3-3x^2+\frac{13}{4}x=\frac{13}{4}x$

$x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0$

$x_1=0; \;\; x_2=3$

$A=\int_0^3 t(x)-f(x)\,dx=\int_0^3 -x^3+3x^2dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$

Die eingeschlossene Fläche hat $\frac{27}{4}$ *FE.*

#1.4 Erste Winkelhalbierende $y=x$.

$f'(x)=1$

$3x^2-6x+\frac{13}{4}=1$

$3x^2-6x+\frac{9}{4}=0 \qquad | \quad :3$

$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1\pm\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1=\frac{3}{2}; \;\; x_2=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}; \;\; f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$t_1(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}; \quad t_2(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

$t_1(x)=x$ **q.e.d.**

1.5 Bedingungen:
$g(2) = 2$
$g'(2) = -1$
(1) $a\sin(\pi) + b = 2 \implies b = 2$
(2) $\frac{2a}{\pi}\cos(\pi) + 2 = -1$
$-\frac{2a}{\pi} = -3$
$a = \frac{3}{2}\pi$
$g(x) = \frac{3}{2}\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$

Lösung A2

2.1 Zeit für letzte $50\,m$ des Laufs:
$t = 9{,}69 - 5{,}50 = 4{,}19$
Bolt benötigte $4{,}19\,s$ für die letzten $50\,m$ seines Laufs.
$40\,km/h$ möglich für einen Menschen?
$40\frac{km}{h} = \frac{40}{3{,}6}\frac{m}{s} = 11{,}11\frac{m}{s}$.
Da in der Tabelle auch Geschwindigkeiten größer als $11{,}11\frac{m}{s}$ vorkommen, kann ein Mensch auch mehr als $40\frac{km}{h}$ erreichen.
Maximale Geschwindigkeit von Bolt war $12{,}19\frac{m}{s}$ bei Erreichen der $80\,m$ Marke. Er hätte somit noch $20\,m$ mit dieser Geschwindigkeit zurücklegen müssen. Hieraus ergibt sich t für die letzten $20\,m$ mit $t = \frac{s}{v} = \frac{20}{12{,}19} = 1{,}64\,s$.
Für die ersten $80\,m$ benötigte Bolt $7{,}96\,s$. $7{,}96 + 1{,}64 = 9{,}6\,s$.
Bei gleichbleibender Geschwindigkeit auf den letzten $20\,m$ hätte Bolt $9{,}6\,s$ benötigt.

2.2 Maximale Geschwindigkeit von Bolt ist Maximum der gegebenen Funktion.
$v'(t) = 0{,}1146t^2 - 1{,}6316t + 5{,}4828$
$v'(5{,}4) = 0{,}014 > 0$; $v'(5{,}5) = -0{,}02435 < 0$;
Wegen VZW von „+“ nach „–“muss zwischen $t = 5{,}4\,s$ und $t = 5{,}5\,s$ ein Hochpunkt vorliegen, also maximale Momentangeschwindigkeit von Bolt.

2.3 Wie lange benötigte Bolt drei Sekunden nach dem Start für die darauffolgenden $50\,m$.

Lösung A3

3.1 Motorboot = x; dann ist Tretboot = $2x$ und Elektroboot = y.
Wir erhalten nachfolgendes LGS:
(1) $x + 2x + y = 48$
$3x + y = 48 \implies y = 48 - 3x$
(2) $x \cdot 35 + 2x \cdot 10 + y \cdot 25 = 980$
$55x + 25y = 980$
$y \rightarrow (2)$
(2) $55x + 25(48 - 3x) = 980$
$-20x + 1200 = 980$
$20x = 220$
$x = 11$
Der Verleih hat 11 Motorboote, 22 Tretboote und 15 Elektroboote.

3.2 Es sind insgesamt $x + y + z = 25$ Boote ausgeliehen. Die Einnahmen aus dieser Ausleihung betragen $35x + 25y + 10z = 525$ €.
Aus der in die Dreiecksform umgeformten Matrix lesen wir ab, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
Zur Aufstellung des Lösungsvektors wählen wir eine Unbekannte frei, z. B. $z = t$ und erhalten
$y + 2{,}5t = 35 \Rightarrow \;\; y = 35 - 2{,}5t$
$x - 1{,}5t = -10 \Rightarrow \;\; x = -10 + 1{,}5t$
Für t kommen nur positive Werte in Betracht, es gibt keine negativen Tretboote. Hieraus folgt:
$z = t \geq 0$
$x = -10 + 1{,}5t \geq 0$ für $t \geq 6{,}\overline{6}$
$y = 35 - 2{,}5t \geq 0$ für $0 \leq t \leq 14$
Alle Bedingungen werden eingehalten, wenn t im Intervall $I = [6{,}\overline{6}; 14]$ liegt. Außerdem müssen x, y und z ganzzahlig sein. Es können also nur die ganzzahligen t-Werte 7 bis 14 vorkommen. Weiterhin müssen auch x und y ganzzahlig sein, sodass nur die t-Werte $t = 8$, $t = 10$, $t = 12$ bzw. $t = 14$ auf ganzzahlige Werte für x und y führen.
Da in der Aufgabe gefragt ist, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind, ist das t gesucht, welches für x die kleinste Zahl ergibt.
$x = -10 + 1{,}5t$ führt für $t = 8$ zum kleinsten Wert:
$x = -10 + 1{,}5 \cdot 8 = 2$
Es müssen also mindestens 2 Motorboote unterwegs sein.

Lösung A4

4.1 Eine Regression mit dem WTR führt zu $I(t) = 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$

4.2 Momentane Änderungsrate über $I'(t) = -0{,}289 \cdot 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$.
Mittlere Änderungsrate im Zeitraum von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$:
$\overline{m} = \frac{f(2{,}4) - f(1)}{2{,}4 - 1} = \frac{6{,}001 - 8{,}994}{1{,}4} = -2{,}14.$
$-2{,}14 = -3{,}470312 \cdot e^{-0{,}289t} \quad | \quad : -3{,}470312$
$e^{-0{,}289t} = 0{,}6167 \quad | \quad ln$
$-0{,}289t = ln(0{,}6167)$
$t = 1{,}6725$
Etwa $1{,}68\,s$ nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Änderungsrate etwa gleich groß wie die mittlere Änderungsrate von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$.

4.3.1 Ladung in den ersten 18 Sekunden:
$Q = \int_0^{18} I(t)\,dt = \int_0^{18} 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t} = \left[-\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-0{,}289t}\right]_0^{18} = -\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-5{,}202} + \frac{12{,}008}{0{,}289}$
$Q = -0{,}2288 + 41{,}55 = 41{,}32$
In den ersten 18 Sekunden beträgt die Ladung etwa $41{,}32\,mAs$.

4.3.2 Die Zeit, nach welcher der Kondensator $60\,\%$ der Ladung trägt, sei x.
Die Auflösung der Gleichung $0{,}6 \cdot 41{,}32 = \int_0^x I(t)\,dt$ nach x gibt die gesuchte Zeit in Sekunden an.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 5

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Gleichzeitige Werfen von drei Würfeln ist zu behandeln wie dreimaliges Werfen hintereinander.

$\Omega_A = \{SSS; AAA; BBB\}$

$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 0{,}1111 = 11{,}1\ \%$

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$\overline{B}$: Kein Würfel zeigt den Buchstaben S.

$P(\overline{B}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} = 0{,}2963 = 29{,}6\ \%$

$P(B) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

Sei das Ereignis C: Mit den gewürfelten Buchstaben das Wort SAB bilden.

$P(C) = 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ **q.e.d.**

1.2 Da jedes einzelne Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ besitzt, muss man ein Ereignis formulieren, welches 7 Ergebnisse beinhaltet. Hierzu gibt es sehr viele Lösungsmöglichkeiten.

Da das Ereignis aus Teilaufgabe 1.1 (die Buchstaben SAB in beliebiger Reihenfolge) schon 6 Ergebnisse beinhaltet, muss dieses nur um ein Ergebnis ergänzt werden.

Ereignis: „Man kann aus den gewürfelten Buchstaben das Wort SAB bilden oder man erhält dreimal S„.

1.3 $P(C) = \frac{2}{9};\ P(\overline{C}) = \frac{7}{9}$ (siehe Teilaufgabe 1.1)

Gesucht ist der Stichprobenumfang n.

$B_{n;\frac{2}{9}}(X \geq 1) > 0{,}9$

$1 - B_{n;\frac{2}{9}}(X = 0) > 0{,}9$

$B_{n;\frac{2}{9}}(X = 0) < 0{,}1$

$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}1$

$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}1$

$n \cdot \ln\left(\frac{7}{9}\right) < \ln(0{,}1)$

$n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)} = 9{,}162$

Man benötigt mindestens 10 Versuche.

1.4 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der erhaltenen Preise an. Gesucht wird der Erwartungswert $E(x)$.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{7}{9}\right)^3=\frac{343}{729}$	$3\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{98}{243}$	$3\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{243}$	$\left(\frac{2}{9}\right)^3=\frac{8}{729}$
$x_i\cdot P(X=x_i)$	0	$\frac{98}{243}$	$\frac{56}{243}$	$\frac{24}{729}$

$E(x)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot P(X=x_i)=0+\frac{98}{243}+\frac{56}{243}+\frac{24}{729}=\frac{2}{3}$

Erwartungswert bei max. 900 Spielen: $900\cdot\frac{2}{3}=600$.

Es ist also mit 600 Preisen im Durchschnitt zu rechnen.

Die Schule sollte somit etwa 700 Preise bereithalten, das sind etwa 100 mehr als im Schnitt zu erwarten ist.

Lösung A2

2.1 Binomialverteilung mit $n=50$ und $p=0{,}25$ für weibliche Besucher.

$P(A)=B_{50;0,25}(X=17)=0{,}0432=4{,}3\ \%$ (WTR)

$P(B)=B_{50;0,25}(11\le X\le 18)=B_{50;0,25}(X\le 18)-B_{50;0,25}(X\le 10)=0{,}7091=70{,}9\ \%$

$P(C)=0{,}75^{42}\cdot 0{,}25^{8}=8{,}6\cdot 10^{-11}\approx 0$

2.2 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 1000 Besuchern eines Fußballspiels mindestens 300 Frauen befinden.

2.3 Wegen der angegebenen Wahrscheinlichkeit 95,4 % muss das $2-\sigma$-Intervall verwendet werden.

$\mu=n\cdot p=20000\cdot 0{,}25=5000;\quad z=2$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{20000\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}=61{,}24$

2-σ-Intervall:

$[5000-2\cdot 61{,}24;5000+2\cdot 61{,}24]=[4877{,}5;5122{,}0]$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % liegt die Anzahl der benötigten Flyer zwischen 4878 und 5122 Stück.

Empfehlung des Geschäftsführers:

Wahrscheinlichkeit von 99,7 % entspricht dem 3-σ-Intervall: $[4817;5182]$.

Der Geschäftsführer möchte mehr Flyer drucken und damit seinen Umsatz steigern.

2.4 95 %-Vertrauensintervall:

$h=\frac{36}{134}=0{,}27;\ \ n=134;\ \ z=1{,}96$

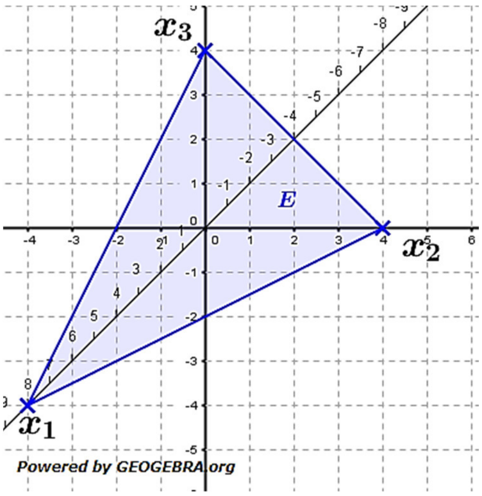
$\left[0{,}27-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}27\cdot(1-0{,}72)}{134}};0{,}27+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}27\cdot(1-0{,}27)}{134}}\right]=[0{,}19;0{,}35]$

Mit 95,4 %-iger Sicherheit liegt der Anteil der weiblichen Zuschauer zwischen 19 % und 35 %.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 5

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1



1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

$6 + 2 + 0 = d \Longrightarrow\ d = 8$

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

Spurpunkte:

$S_{x_1}(8|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

Schnittwinkel mit x_1-Achse über sin:

$$sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{3}$$

$\alpha = arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19{,}47\,°$

1.2 Wegen $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \wedge |\overrightarrow{AP}| \neq |\overrightarrow{AB}|$ ist das Dreieck ABP gleichschenklig.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten sind $C(0|-1|5)$ und $C(4|-3|5)$.

Die Spitzen der Pyramiden liegen auf der Geraden durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\overrightarrow{OS_{1,2}} = \overrightarrow{OP} \pm 4 \cdot \overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \pm 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$

(Hinweis: Die Spitze einer senkrechten Pyramide muss nicht unbedingt durch den gegebenen Punkt P gehen. Senkrechte Pyramiden sind alle Pyramiden, deren Spitze in den parallelen Ebenen zu E im Abstand von jeweils $12\,LE$ liegen. Somit unendlich viele andere Lösungen denkbar.)

1.3 Der Punkt auf der x_1-Achse sei $Q(q_1|0|0)$. Die q_1-Koordinate von Q lässt sich aus $\overrightarrow{AQ} \circ \overrightarrow{BQ} = 0$ errechnen.

$$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 12 + 3 = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 15 = 0$$

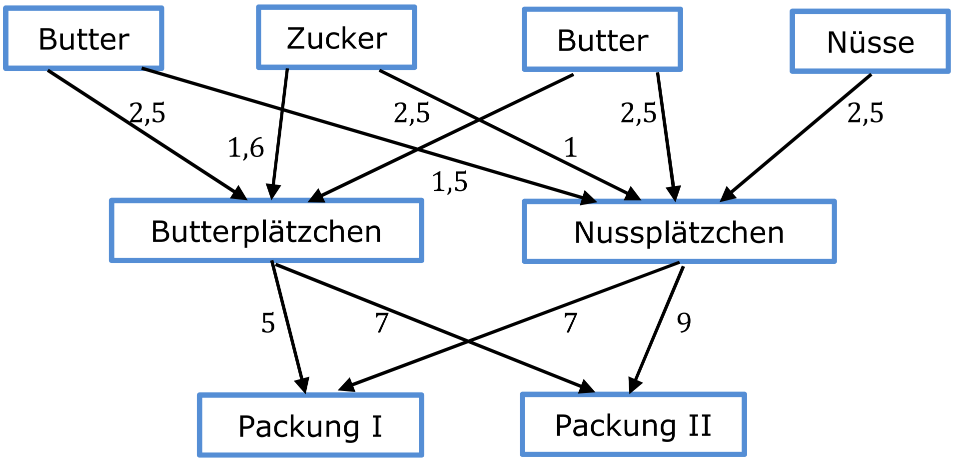
$$q_{1_{1,2}} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

$$q_{1_1} = 5;\ \ q_{1_2} = 3$$

Die Punkte $Q_1(5|0|0)$ und $Q_2(3|0|0)$ bilden mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q.

Lösung A2

2.1 *Verflechtungsdiagramm*



2.2 Im Folgenden bezeichnen $\boldsymbol{A}$ die Zutaten-Plätzchen-Matrix und $\boldsymbol{B}$ die Plätzchen-Packungen-Matrix.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{z} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ folgt: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 4530 \\ 9000 \\ 5125 \end{pmatrix}$

Für die Produktion von 100 Packungen I und 150 Packungen II werden $4530\ g$ Mehl und $9000\ g$ Zucker benötigt.

2.3 Aus $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682{,}5 \\ r_2 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682{,}5 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

(1) $2{,}5z_1 + 1{,}5z_2 = r_1$
(2) $1{,}6z_1 + z_2 = 372$
(3) $2{,}5z_1 + 2{,}5z_2 = 682{,}5$ | (3) - $2{,}5 \cdot$(2)
(4) $2{,}5z_2 = r_2$

(1) $2{,}5z_1 + 1{,}5z_2 = r_1$
(2) $1{,}6z_1 + z_2 = 372$
(3) $-1{,}5z_1 + 0z_2 = -247{,}5 \Rightarrow z_1 = 165$
(4) $2{,}5z_2 = r_2$
$z_1 \longrightarrow (2)$:
(2) $1{,}6 \cdot 165 + z_2 = 372 \Rightarrow z_2 = 108$
$z_1; z_2 \longrightarrow (1)$:
(1) $2{,}5 \cdot 165 + 1{,}5 \cdot 108 = r_1 \Rightarrow r_1 = 574{,}5$
$z_2 \longrightarrow (4)$:
(4) $2{,}5 \cdot 108 = r_2 \Rightarrow r_2 = 270$
Es müssen somit noch $574{,}5\ g$ Butter und $270\ g$ Mehl beschafft werden.

2.4 Die beschriebene Anzahl Plätzchen führt auf $\vec{z} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$:
Die Menger der Zutaten erhält man aus:

$$\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5z \\ 3{,}6z \\ 7{,}5z \\ 5z \end{pmatrix}$$

Das Gesamtgewichtbeträgt somit $5{,}5z + 3{,}6z + 7{,}5z + 5z = 21{,}6z$, welches $200\ g$ nicht überschreiten soll:
$21{,}6z \leq 200$ für $z \leq 9{,}2$.
In der neuen Packung sind somit 9 Butterplätzchen und 18 Nussplätzchen.