Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 6*

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right);\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Beschreibe, wie K aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = sin(x)$ hervorgeht. **8P**
Gib die Periode und die Wertemenge von f an.
Zeichne K für $-3 \leq x \leq 5$.

1.2 Bestimme den Schnittwinkel der Tangente an K in zwei benachbarter Wendepunkten von K. **3P**

1.3 Zwischen zwei benachbarten Tiefpunkten von K schließen K und die x-Achse eine Fläche ein. **6P**
Ermittle die Stammfunktion F von f, deren Schaubild durch den Punkt $P(-1|0)$ verläuft. Dem Funktionswert $F(3)$ entspricht der Inhalt Einer Fläche in deiner Zeichnung aus 1.1. Schraffiere diese Fläche.
Berechne den Inhalt dieser Fläche.

1.4 Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2e^{2x}$ und die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ begrenzen ein Flächenstück. Dieses rotiert um die x-Achse. **3P**
Notiere einen Ansatz zur Berechnung des dadurch erzeugten Rotationskörpers.

Aufgabe A2

2. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion K mit
$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 100;\ x \in [0; 11]$$
beschrieben.
Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE).

2.1 Prüfe, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist. **2P**

2.2 Der Verkaufspreis beträgt 50 GE. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge. Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten. **5P**
Berechne den maximalen Gewinn.

2.3 Um die Produktionsmenge zu ermitteln, bei welcher die minimalen Stückkosten anfallen, schlägt Tom vor, das Minimum der Ableitungs-Funktion K zu ermitteln. **3P**
Bewerte diesen Vorschlag und mache gegebenenfalls einen begründeten Gegenvorschlag.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

Aufgabe A3

3. In einem chemischen Experiment wird die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Reaktion von Zink mit Salzsäure betrachtet. Man gibt Zink in verdünnte Salzsäure. Dabei entstehen unter anderem Zinkionen und Wasserstoff. Die Konzentration der Zinkionen in Abhängigkeit von der Zeit wird näherungsweise durch die Funktion c beschrieben:

$$c(t) = 0{,}5(1 - e^{-0{,}343t}); \quad t \geq 0.$$

t ist hierbei die Zeit in Minuten, $c(t)$ ist die Konzentration der Zinkionen in Mol pro Liter.

Die Reaktionsgeschwindigkeit (gemessen in $\frac{mol}{l \cdot min}$) ist die momentane Änderungsrate von c.

3.1 Zeichne das Schaubild von c für die ersten 12 Minuten. **3P**
Welchem Wert nähert sich die Konzentration im Laufe der Zeit an?

3.2 Gib die maximale Reaktionsgeschwindigkeit an. **4P**
Die Messung wird abgebrochen, wenn die Reaktionsgeschwindigkeit unter $0{,}002$ gefallen ist. Nach wie vielen Minuten ist dies der Fall?

Anwendungsorientierte Analysis Musteraufgaben (mit Hilfsmittel)

3.3 Bei dem Experiment wird der entstehende Wasserstoff in einem Standzylinder aufgefangen. Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens: **3P**

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

Bestimme eine geeignete Näherungsfunktion für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens in Abhängigkeit von der Zeit und bewerte dessen Güte.

Aufgabe A4

4. Nach einem Unfall auf einer Autobahn wird die Überholspur gesperrt. Der Verkehr rollt auf der anderen Fahrspur mit verminderter Geschwindigkeit an der Unfallstelle vorbei. Infolge des hohen Verkehrsaufkommens bildet sich ein Stau mit zunächst zunehmender Länge.

Nachdem die Unfallstelle geräumt ist, löst dich der Stau allmählich wieder auf. Die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Minute in den Staubereich hineinfahren, ist q_1. Die Anzahl der pro Minute aus dem Staubereich herausfahrenden Fahrzeuge ist q_2.

Die folgende Tabelle zeigt den Fahrzeugfluss $q = q_1 - q_2$ in Abhängigkeit von der Zeit t.
In einer vereinfachten Betrachtung gibt q die Zahl der Fahrzeuge pro Minute an, um die sich die Staulänge verändert.

t (Minuten)	0	5	10	15	20	30	40	50	60
q (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute)	13,5	9,6	5	0	−5	−13,5	−17,5	−14	0

4.1 Stelle q in Abhängigkeit von t grafisch dar. Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und den Zeitpunkt, zu dem sich der Stau am schnellsten abbaut. **8P**
Skizziere in einem Koordinatensystem die Anzahl der Fahrzeuge im Stau in Abhängigkeit von der Messzeit.
Erläutere deine Vorgehensweise.

4.2 Die zeitliche Entwicklung des Fahrzeugflusses während der Messzeit kann durch folgende Funktion q beschrieben werden: **2P**

$$q(t) = a(t+30)((t-b)(t-c)) \text{ mit } t \in [0; 60].$$

Bestimme die Konstanten a, b und c anhand der obigen Tabelle.

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. Eine Firma stellt Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl" gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl" bezeichnet.
Eine zufällig ausgewählte Fliese ist erfahrungsgemäß „2. Wahl" mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$.
Jede Packung enthält 20 Fliesen.

1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung genau vier „2. Wahl"-Fliesen enthalten sind. **4P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mindestens 90 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl" haben.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung die Anzahl der „21. Wahl"-Fliesen höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl abweicht.

1.2 Die 20 Fliesen einer Packung wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt. Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthält. **2P**

1.3 Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium" angeboten werden, die nur aus „1. Wahl"-Fliesen besteht. **4P**
Dazu will die Firma die „2. Wahl"-Fliesen aus der Produktion aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert.
Das Testgerät erkennt eine „2. Wahl"-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1. Wahl"-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $5\,\%$ zu Unrecht als „2. Wahl" aussortiert.
Gib die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl" einstuft (also nicht aussortiert).
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2, Wahl"-Fliese ist.

Aufgabe A2

2. Die Polizei plant für das Spiel der beiden Fußballvereine Rot-Weiß Essen (RWE) und TuS Bottrop (TuS) einen Einsatz.
Sie geht davon aus, dass $48\,\%$ der Zuschauer Fans von RWE und $30\,\%$ vom TuS sind. Keiner der Fans ist Fan von beiden Vereinen. Die restlichen Zuschauer werden als neutral eingestuft.
Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass $15\,\%$ aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, unter den RWE-Fans sind es sogar $20\,\%$ und unter den TuS-Fans nur $10\,\%$.

2.1 Die Polizei kontrolliert vor dem Stadion vier zufällig ausgewählte Personen aus einer Gruppe von RWE-Fans. **6P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Mindestens eine Person hat Alkohol dabei.
B: Genau zwei Personen haben Alkohol dabei.
C: Höchstens eine Person hat keinen Alkohol dabei.

2.2 Wie viel Prozent der neutralen Zuschauer haben Alkohol bei sich? **5P**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von allen Personen, die Alkohol dabeihaben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist?

2.3 Bei einem anderen Fußballspiel wurden 200 Zuschauer kontrolliert, von welchen 66 Alkohol bei sich hatten. Insgesamt sind 12000 Zuschauer im Stadion. **4P**
Bestimme ein Intervall zum Vertrauensniveau von $90\,\%$ für die Anzahl an Zuschauern im Stadion, die Alkohol dabeihaben.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie“ im Unterricht behandelt.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|1|2)$, $B(3|0|6)$ und $C(11|8|10)$ gegeben.

1.1 Die Punkte A, B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeige, dass dieses Dreieck einen rechten Winkel im Punkt B aufweist. **3P**

1.2 Ein Süßwarenhersteller beauftragt eine Werbefirma, eine neue Form Für eine Verpackung zu kreieren. Die Werbefirma schlägt ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche vor. **6P**
Berechne das Volumen der Verpackung für den Fall, dass A, B und C Eckpunkte der Grundfläche sind und die Deckfläche in der Ebene $H: -x_1 + x_2 = 17$ liegt.

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse“ im Unterricht behandelt.

1. Die BIKERIDE GmbH stellt die Rahmen der Fahrradmodelle City und Tour in Eigenfertigung her. Um sich von der Konkurrenz abzuheben, werden für diese Rahmen jedes Jahr neue modische Lackierungen produziert. Dabei werden in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den drei Ausgangsfarben R_1, R_2 und R_3 die drei Modefarben Z_1, Z_2 und Z_3 gemischt und aus diesen dann die Lackierungen für die Modelle City (E_1) und Tour (E_2) hergestellt.
Es gelten folgende Mengenbeziehungen (in ME) mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	1
R_2	0	2	2
R_3	3	5	4

	E_1	E
Z_1	1	2
Z_2	3	7
Z_3	a	5

	E_1	E
R_1	13	b
R_2	10	24
R_3	26	61

1.1 Berechne die Zahlenwerte für a und b in den Tabellen mithilfe der Matrizenrechnung. **3P**

1.2 Im Folgenden seine $a = 2$ und $b = 30$.

1.2.1 Die BIKERIDE GmbH benötigt für einen Auftrag 15 ME der Lackierung E_1 und 18 ME der Lackierung E_2. **3P**
Berechne, wie viele ME der drei Modefarben Z_1, Z_2 und Z_3 für diesen Auftrag erforderlich sind.

1.2.2 Für eine Sonderlackierung können im Rahmen eines alternativen Produktionsprozesses die Modefarben Z_1, Z_2 und Z_3 auch entsprechend der folgenden Matrix gemischt werden: **9P**

$$\boldsymbol{M_{RZ}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen Sanierungsarbeiten am Boden der Lagerhalle muss das Rohstofflager kurzfristig geräumt werden. Der Lagerbestand von R_1 beträgt 600 ME, der von R_2 beträgt 800 ME und von R_3 befinden sich noch 1600 ME im Lager.

Bestimme den ökonomisch sinnvollen Lösungsvektor, mit welchem der Lagerbestand im Rahmen des alternativen Produktionsprozesses ohne Rest aufgebraucht wird. Gib eine sinnvolle Lösung an.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 $f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild von $y = sin(x)$ hervor durch:

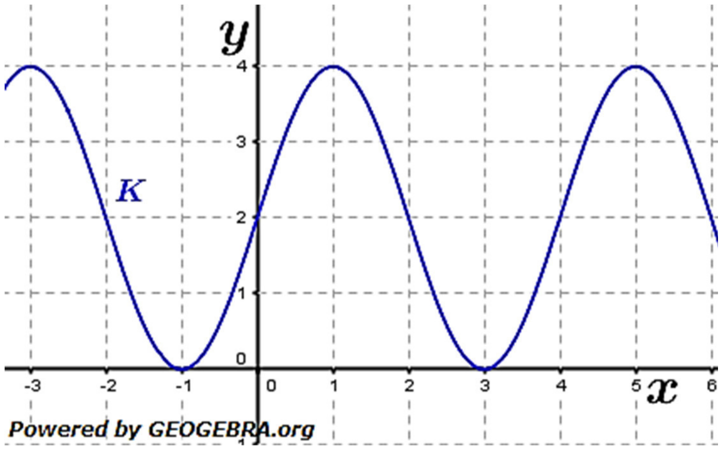
(1) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = 2$;

(2) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$;

(3) Verschiebung in y-Richtung um zwei Stellen nach oben.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$\mathbb{W}_f = \{0; 4\}$



1.2 Bestimmung von zwei benachbarten Wendepunkten:

Einfache Lösung:

Wendepunkte einer in x-Richtung unverschobenen Sinuskurve liegen bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{p}{2}$ und $x_3 = p$. Zwei benachbarte Wendepunkte sind somit

$WP_1(0|2)$; $WP_2(2|2)$

Umständliche Lösung

$f''(x) = -\frac{8}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$-\frac{8}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$

$sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{p}{2} - x_1 = 2$

$f(0) = 2 + 2\,sin(0) = 2$

$f(2) = 2 + 2\,sin(\pi) = 2$

$WP_1(0|2)$; $WP_2(2|2)$

$f'(x) = \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f'(0) = \frac{4}{\pi} cos(0) = \frac{4}{\pi}$

$f'(2) = \frac{4}{\pi} cos(\pi) = -\frac{4}{\pi}$

Bestimmung des Schnittwinkels:

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan\alpha = \frac{4}{\pi}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right) = 51{,}85°$

Aus Symmetriegründen ist der Schnittwinkel für $-\frac{4}{\pi}$ mit der x-Achse ebenfalls 51,85°, sodass für den Schnittwinkel der Tangenten gilt:

$\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 2 \cdot 51{,}85° = 76{,}3°$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

1.3 Bestimmung von zwei benachbarter Tiefpunkten:

$TP_1(-1|0)$; $\quad TP_2(3|0)$

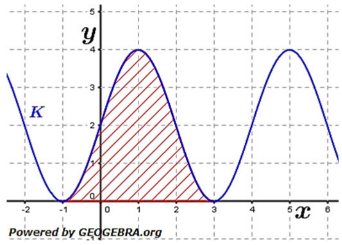
$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$

$0 = -2 - \frac{4}{\pi} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C$ $\quad$ | Punktprobe $P(-1|0)$

$-2 + C = 0 \Longrightarrow \quad C = 2$

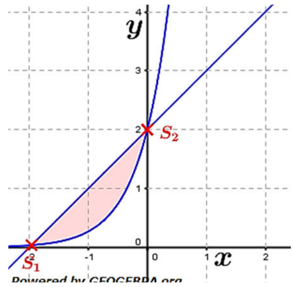
$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$

$F(3) = 6 - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 8$



$A = \int_{-1}^{3} 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[2x - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{3} = 6 - 0 - (-2 - 0) = 8$

1.4 Situation siehe Skizze.
Berechnung der beiden Schnittpunkte über $g \cap x + 2$.
Erhalte x_1 und x_2.
Volumenberechnung über
$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} ((x + 2)^2 - g(x)^2)\, dx$.



Lösung A2

2.1 Die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl dann immer größer, wenn $K(x)$ keine Extremstellen besitzt und monoton steigend ist.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0$ $\quad$ | $\quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}}$

Wegen $\frac{100}{9} - \frac{120}{9} < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$

Für $x \longrightarrow \infty$ läuft $K(x) \longrightarrow \infty$, ist also streng monoton steigend.

$K(x)$ besitzt keine Extremstellen und ist streng monoton steigend, die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl immer größer.

2.2 $E(x) = 50x$; $\; G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 50x - x^3 + 10x^2 - 40x - 100 = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100$

$G'(x) = -3x^2 + 20x + 10$

$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$:

$-3x^2 + 20x + 10 = 0$ $\quad$ | $\quad : -3$

$x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{10}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{30}{9}} = 3{,}33 \pm 3{,}8$

$x_1 = 7{,}13$; $\; x_2 = -0{,}47$

$G''(7{,}13) = -6 \cdot 7{,}13 + 20 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt (Maximum)

$G(7{,}13) = -7{,}13^3 + 10 \cdot 7{,}13^2 + 10 \cdot 7{,}13 - 100 = 117{,}20$

Der maximale Gewinn liegt bei $117{,}20$ *GE für* $7{,}13$ *produzierte und verkaufte ME.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *Mustersatz 6*

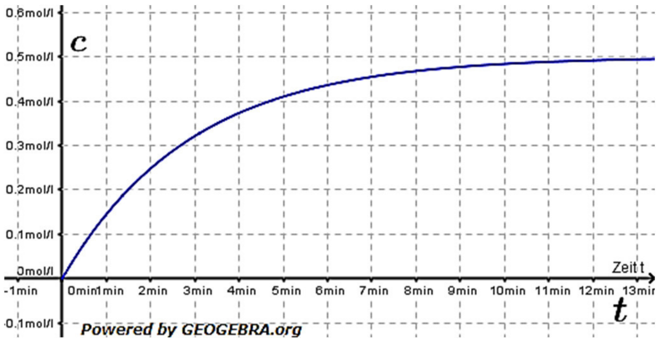
2.3 Der Vorschlag ist falsch. Mit Toms Vorschlag wird die Stelle mit der geringsten Steigung der Kostenfunktion ermittelt, also die Stelle des momentanen geringsten Kostenzuwachses (Wendestelle).

Richtig ist, das Minimum der Stückkostenfunktion mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ zu ermitteln. Hier liegt das Betriebsoptimum bzw. die langfristige Preisuntergrenze.

<u>Lösung A3</u>

3.1 Für $c \longrightarrow \infty$ gilt $c(t) \longrightarrow 0{,}5$ (obere Schranke).

Die Konzentration nähert sich dem Wert $0{,}5\frac{mol}{l}$.



3.2 Reaktionsgeschwindigkeit entspricht der Steigung des Graphen von c. In obiger Grafik erkennen wir, dass die Steigung bei $t = 0$ maximal ist:
$c'(t) = 0{,}5 \cdot 0{,}343e^{-0{,}343t} = 0{,}1715e^{-0{,}343t}$
$c'(0) = 0{,}1715$
Die maximale Reaktionsgeschwindigkeit ist $0{,}1715\frac{mol}{l \cdot min}$.
Abbruch der Messung bei $c'(t) = 0{,}002$:
$0{,}002 = 0{,}1715e^{-0{,}343t} \quad | \quad :0{,}1715$
$e^{-0{,}343t} = 0{,}0117 \quad | \quad ln$
$-0{,}343t = ln(0{,}0117) \quad | \quad :-0{,}343$
$t = \frac{\ln(0{,}0117)}{-0{,}343} = 12{,}97$
Nach etwa 13 *Minuten wird die Messung abgebrochen.*

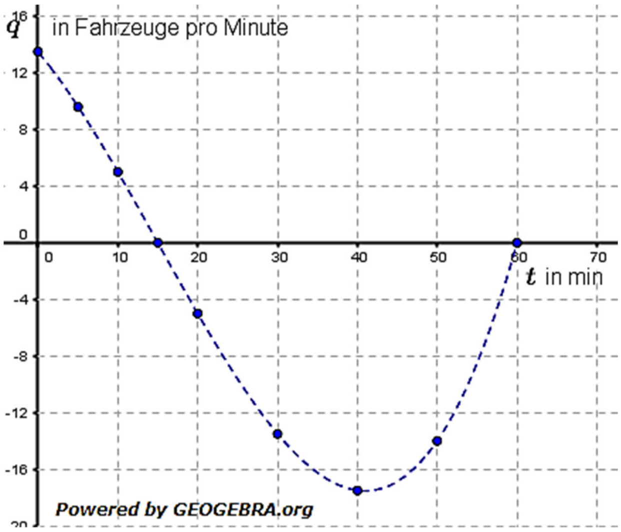
3.3 Mögliche Näherungsfunktionen (WTR):
Quadratische Regression: $q(t) = 0{,}39286t^2 - 4{,}97857t + 17{,}8$
Exponentielle Regression: $e(t) = 19{,}6327 \cdot 0{,}68237^t$ bzw.
$e(t) = 19{,}6327 \cdot e^{-0{,}3822t}$

Bewertung:
Wegen $r^2 = 0{,}9930$ für q bzw. $r^2 = 0{,}9940$ für e werden die Daten durch die Näherung sehr gut beschrieben.

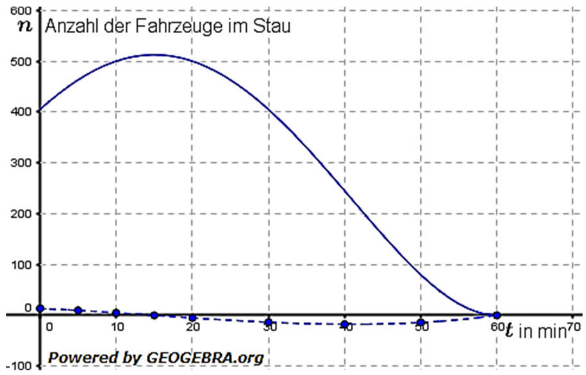
Lösung A4

4.1 In den ersten 15 Minuten wird der Stau länger $(q > 0)$, danach nimmt seine Länge ab. Die Staulänge hat ihr Maximum nach 15 Minuten erreicht (q wechselt von $+$ nach $-$).

Nach 40 Minuten baut sich der Stau am schnellsten ab, da q hier minimal ist.



Zur Zeit $t = 0$ sind 405 Fahrzeuge im Stau. Bis $t = 15$ ist q positiv, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau vergrößert sich. Ab $t = 15$ ist q neghativ, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau verringert sich. Bei $t \approx 40$ ist ein Wendepunkt. Nach $t = 60$ hat sich der Stau aufgelöst.



4.2 Ansatz: $q(t) = a(t + 30)((t - b)(t - c))$
b und c liest man über die Nullstellen $x_1 = 15$ und $x_2 = 60$ ab.
Zur Ermittlung von a machen wir eine Punktprobe mit $P(0|13{,}5)$.

$q(t) = a(t + 30)((t - 15)(t - 60))$

$13{,}5 = a(30)(-15)(60)$

$a = \frac{13{,}5}{27000} = \frac{1}{2000}$

$q(t) = \frac{1}{2000}(t + 30)((t - 15)(t - 60))$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$ für „2. Wahl"-Fliesen.

A: In einer Packung sind genau vier „2. Wahl"-Fliesen.

$P(A) = B_{20;0,2}(X = 4) = 0{,}2182 = 21{,}8\ \%$

B: In einer Packung sind mindestens $90\ \%$ der Fliesen „1.-Wahl"-Fliesen.

$20 \cdot 0{,}9 = 18$ „1. Wahl"-Fliesen, also höchstens zwei „2. Wahl"-Fliesen.

$P(B) = B_{20;0,2}(X \leq 2) = 0{,}2061 = 20{,}6\ \%$

C: Eine Packung enthält höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl der „2.-Wahl"-Fliesen abweichende Anzahl „2. Wahl"-Fliesen.

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

$\mu - 2 = 2;\ \ \mu + 2 = 6$

$P(C) = B_{20;0,2}(2 \leq X \leq 6) = B_{20;0,2}(X \leq 6) - B_{20;0,2}(X \leq 1) = 0{,}8441 = 84{,}4\ \%$

1.2 Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reihe nur aus „1. Wahl"-Fliesen besteht:

$P = 0{,}8^5 = 0{,}3277$ (5 Fliesen)

Mindestens eine Reihe nur aus „1. Wahl"-Fliesen über das Gegenereignis „Keine Reihe besteht nur aus „1. Wahl"-Fliesen".

$P = 1 - (1 - 0{,}3277)^4 = 1 - (0{,}6723)^4 = 0{,}7957 = 79{,}6\ \%$ (4 Reihen)

1.3 Es sei $W1$: Fliese „1. Wahl"; $W2$: Fliese „2. Wahl", weiterhin a: aussortiert; $\overline{a}$: nicht aussortiert.

E: Eine zufällig ausgewählte Fliese wird als „1. Wahl"-Fliese nicht aussortiert.

$\Omega_{\mathrm{E}} = \{W1; \overline{a}, W2\overline{a};\}$

$P(E) = 0{,}8 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}78 = 78\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl" einstuft (also nicht aussortiert) beträgt $78\ \%$.

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die Fliese nicht aussortiert wurde, $P(E) = 0{,}78$

F: Fliese ist „2. Wahl", $P(F) = 0{,}2$

$P_E(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}78} = 0{,}0256$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2{,}56\ \%$ *ist eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit „2. Wahl".*

Lösung A2

2.1 Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}2$ für RWE-Fans mit Alkohol.

$P(A) = B_{4;0,2}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,2}(X = 0) = 0{,}5944 = 59{,}4\ \%$ (WTR)

$P(B) = B_{4;0,2}(X = 2) = 0{,}1536 = 15{,}4\ \%$ (WTR)

$P(C) = B_{4;0,2}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,2}(X \leq 2) = 0{,}0272 = 2{,}7\ \%$ (WTR)

2.2 Anteil der neutralen Zuschauer:

Da $15\ \%$ aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, muss gelten:

$0{,}48 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}22 \cdot x = 0{,}15$

$x = 0{,}109$

Ca. $10{,}9\ \%$ *der neutralen Zuschauer haben also Alkohol bei sich.*

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die ausgewählte Person Alkohol bei sich hat.

B: Person hat Alkohol bei sich (Vorwissen); $P(B) = 0{,}15$

A: Person ist TuS-Fan (gesuchtes Ereignis)

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1}{0{,}15} = 0{,}2$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $20\,\%$ *ist die Person ein TuS-Fan.*

2.3 $90\,\%$-Vertrauensintervall:

$h = \frac{66}{200} = 0{,}33;\ n = 200; \gamma = 0{,}9$ ergibt $z = 1{,}64$

$$\left[0{,}33 - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot (1-0{,}33)}{200}}; 0{,}33 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot (1-0{,}33)}{200}}\right] = [0{,}2755; 0{,}3845]$$

Anzahl der Zuschauer mit Alkohol:

$0{,}2755 \cdot 12000 = 3306;\quad 0{,}3845 \cdot 12000 = 4614$

Mit $90\,\%$*-iger Sicherheit haben mindestens* 3306 *und höchstens* 4614 *Zuschauer Alkohol dabei.*

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

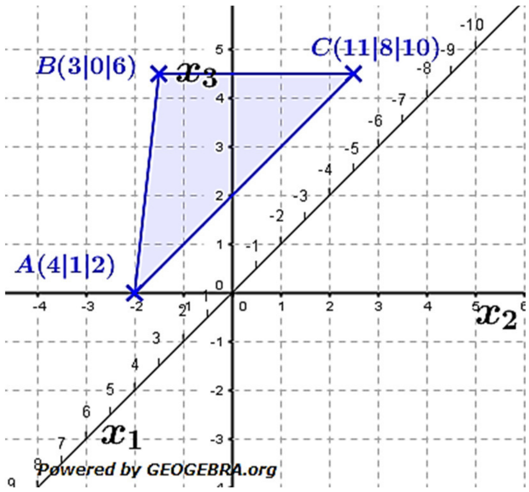
Lösung A1

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} \stackrel{?}{=} 0$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$, ist das Dreieck ABC bei rechtwinklig.



1.2 Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Wegen Rechtwinkligkeit bei B ist dies $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{144} = 6 \cdot \sqrt{18}$.

Nun bestimmen wir noch den Abstand z. B. des Punktes A von der Ebene H über die HNF.

$d(A; H) = \frac{|-x_1 + x_2 - 17|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4+1-17|}{\sqrt{2}} = 6 \cdot 20 \cdot \sqrt{9} = 360$

Das Volumen der Verpackung beträgt $360\,VE$.

1.3 Gerade durch A und B:

$$h:\ x = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsvektoren von g und h sind die beiden Geraden parallel.

Abstand zweier Geraden:

$d(g;h) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Vektor zwischen den beiden Aufpunkten und $\overrightarrow{rv_g}$ als Richtungsvektor einer Geraden.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}6-4\\3-1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}9\\-9\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt $3\ LE$.

Lösung A1

1.1 *Bestimmung von a und b:*

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 1 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$2 + 9 + a = 13 \implies \quad a = 2$

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 2 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$4 + 21 + 5 = b \implies \quad b = 30$

1.2.1 Es gilt: $\boldsymbol{B}_{ZE} \cdot \begin{pmatrix}15\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&7\\2&5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}15\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}51\\171\\120\end{pmatrix}$

Für diesen Auftrag sind $51\ ME\ \ Z1$, $171\ ME\ \ Z2$ und $120\ ME\ \ Z3$ erforderlich.

1.2.2 $\boldsymbol{M}_{RZ} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix}600\\800\\1600\end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{M}_{RZ} = \begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&2\\4&7&3\end{pmatrix}$ führt zu:

$\begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&2\\4&7&3\end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix}600\\800\\1600\end{pmatrix}$ und dem LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\4&7&3&1600\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\0&1&1&400\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wir wählen einen Parameter frei, z. B. $z_3 = t$.

$2z_2 + 2t = 800 \implies \quad z_2 = 400 - t$

$2z_2 + 3 \cdot (400 - t) + t = 600 \implies \quad z_1 = t - 300$

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ sind:

$z_3 = t \geq 0$

$z_2 = 400 - t \geq 0$ für $t \leq 400$

$z_1 = t - 300 \geq 0$ für $t \geq 300$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} t-300 \\ 400-t \\ t \end{pmatrix}$ ist ökonomisch sinnvoll für $300 \leq t \leq 400$.

Eine mögliche sinnvolle Lösung:

$\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$