Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

## Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

## Lösung A1

1.1 $f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Das Schaubild von $f$ geht aus dem Schaubild von $y = sin(x)$ hervor durch:

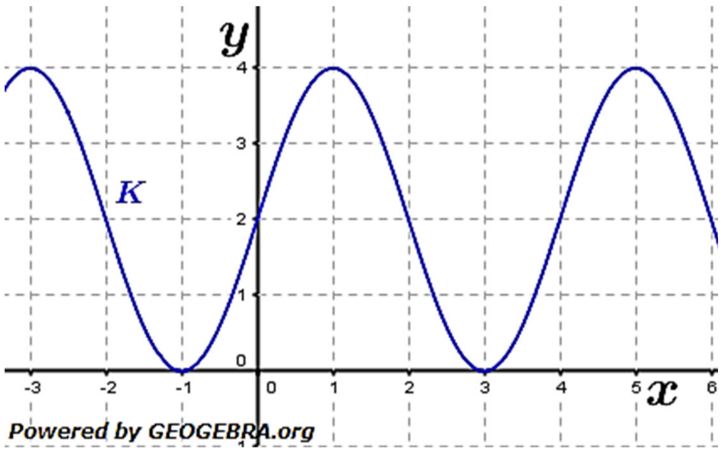
(1) Streckung in $y$-Richtung mit dem Faktor $k = 2$;

(2) Streckung in $x$-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$;

(3) Verschiebung in $y$-Richtung um zwei Stellen nach oben.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$\mathbb{W}_f = \{0; 4\}$




1.2 Bestimmung von zwei benachbarten Wendepunkten:

<u>Einfache Lösung:</u>

Wendepunkte einer in $x$-Richtung unverschobenen Sinuskurve liegen bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{p}{2}$ und $x_3 = p$. Zwei benachbarte Wendepunkte sind somit

$WP_1(0|2)$; $WP_2(2|2)$

<u>Umständliche Lösung</u>

$f''(x) = -\frac{8}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$-\frac{8}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$

$sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{p}{2} - x_1 = 2$

$f(0) = 2 + 2\,sin(0) = 2$

$f(2) = 2 + 2\,sin(\pi) = 2$

$WP_1(0|2)$; $WP_2(2|2)$

$f'(x) = \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f'(0) = \frac{4}{\pi} cos(0) = \frac{4}{\pi}$

$f'(2) = \frac{4}{\pi} cos(\pi) = -\frac{4}{\pi}$

Bestimmung des Schnittwinkels:

Schnittwinkel mit der $x$-Achse:

$tan\alpha = \frac{4}{\pi}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right) = 51{,}85°$

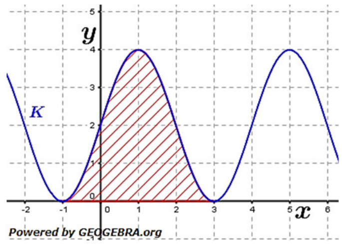
Aus Symmetriegründen ist der Schnittwinkel für $-\frac{4}{\pi}$ mit der $x$-Achse ebenfalls 51,85°, sodass für den Schnittwinkel der Tangenten gilt:

$\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 2 \cdot 51{,}85° = 76{,}3°$

## Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 6

1.3 Bestimmung von zwei benachbarter Tiefpunkten:

$TP_1(-1|0); \quad TP_2(3|0)$




$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$

$0 = -2 - \frac{4}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C \qquad |$ Punktprobe $P(-1|0)$

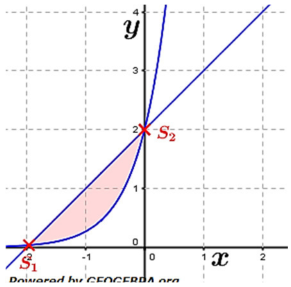
$-2 + C = 0 \Longrightarrow \quad C = 2$

$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$

$F(3) = 6 - \frac{4}{\pi} cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 8$

$A = \int_{-1}^{3} 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[2x - \frac{4}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{3} = 6 - 0 - (-2 - 0) = 8$

1.4 Situation siehe Skizze.
Berechnung der beiden Schnittpunkte über $g \cap x + 2$.
Erhalte $x_1$ und $x_2$.
Volumenberechnung über
$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} ((x+2)^2 - g(x)^2)\,dx$.




## Lösung A2

2.1 Die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl dann immer größer, wenn $K(x)$ keine Extremstellen besitzt und monoton steigend ist.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}}$

Wegen $\frac{100}{9} - \frac{120}{9} < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$

Für $x \longrightarrow \infty$ läuft $K(x) \longrightarrow \infty$, ist also streng monoton steigend.

$K(x)$ besitzt keine Extremstellen und ist streng monoton steigend, die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl immer größer.

2.2 $E(x) = 50x; \;\; G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 50x - x^3 + 10x^2 - 40x - 100 = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100$

$G'(x) = -3x^2 + 20x + 10$

$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$:

$-3x^2 + 20x + 10 = 0 \qquad | \quad :-3$

$x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{10}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{30}{9}} = 3{,}33 \pm 3{,}8$

$x_1 = 7{,}13; \;\; x_2 = -0{,}47$

$G''(7{,}13) = -6 \cdot 7{,}13 + 20 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt (Maximum)

$G(7{,}13) = -7{,}13^3 + 10 \cdot 7{,}13^2 + 10 \cdot 7{,}13 - 100 = 117{,}20$

*Der maximale Gewinn liegt bei* $117{,}20$ *GE für* $7{,}13$ *produzierte und verkaufte ME.*

### *Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4* *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 6*

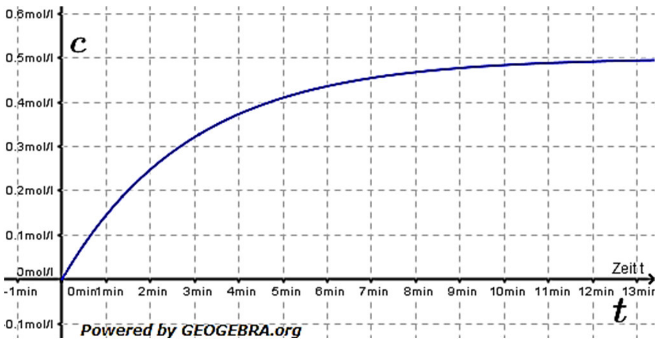
2.3 Der Vorschlag ist falsch. Mit Toms Vorschlag wird die Stelle mit der geringsten Steigung der Kostenfunktion ermittelt, also die Stelle des momentanen geringsten Kostenzuwachses (Wendestelle).

Richtig ist, das Minimum der Stückkostenfunktion mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ zu ermitteln. Hier liegt das Betriebsoptimum bzw. die langfristige Preisuntergrenze.

## Lösung A3

3.1 Für $c \longrightarrow \infty$ gilt $c(t) \longrightarrow 0{,}5$ (obere Schranke).

Die Konzentration nähert sich dem Wert $0{,}5\frac{mol}{l}$.




3.2 Reaktionsgeschwindigkeit entspricht der Steigung des Graphen von $c$. In obiger Grafik erkennen wir, dass die Steigung bei $t = 0$ maximal ist:

$c'(t) = 0{,}5 \cdot 0{,}343e^{-0{,}343t} = 0{,}1715e^{-0{,}343t}$

$c'(0) = 0{,}1715$

*Die maximale Reaktionsgeschwindigkeit ist* $0{,}1715\frac{mol}{l \cdot min}$.

Abbruch der Messung bei $c'(t) = 0{,}002$:

$0{,}002 = 0{,}1715e^{-0{,}343t} \quad | \quad :0{,}1715$

$e^{-0{,}343t} = 0{,}0117 \quad | \quad ln$

$-0{,}343t = ln(0{,}0117) \quad | \quad :-0{,}343$

$t = \frac{\ln(0{,}0117)}{-0{,}343} = 12{,}97$

*Nach etwa* $13$ *Minuten wird die Messung abgebrochen.*

3.3 Mögliche Näherungsfunktionen (WTR):

Quadratische Regression: $q(t) = 0{,}39286t^2 - 4{,}97857t + 17{,}8$

Exponentielle Regression: $e(t) = 19{,}6327 \cdot 0{,}68237^t$ bzw.
$e(t) = 19{,}6327 \cdot e^{-0{,}3822t}$

Bewertung:

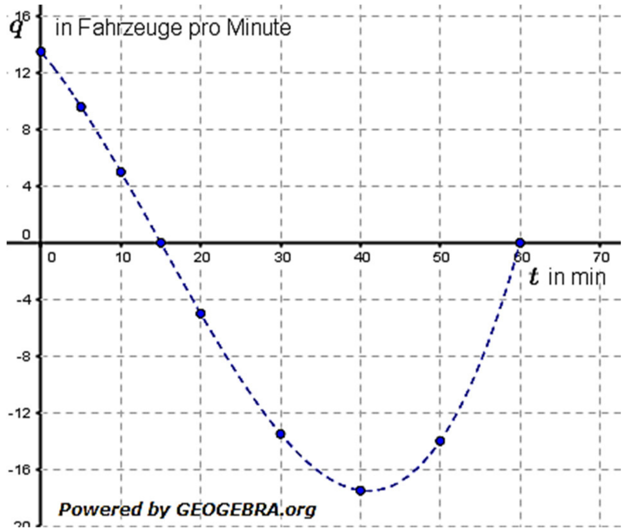
Wegen $r^2 = 0{,}9930$ für $q$ bzw. $r^2 = 0{,}9940$ für $e$ werden die Daten durch die Näherung sehr gut beschrieben.

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6*

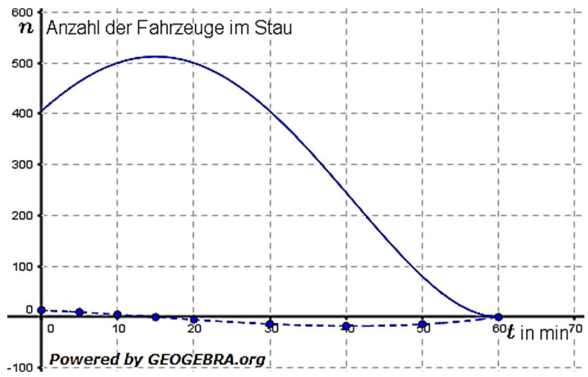
## Lösung A4

4.1 In den ersten $15$ Minuten wird der Stau länger $(q > 0)$, danach nimmt seine Länge ab. Die Staulänge hat ihr Maximum nach $15$ Minuten erreicht ($q$ wechselt von $+$ nach $-$).

Nach $40$ Minuten baut sich der Stau am schnellsten ab, da $q$ hier minimal ist.




Zur Zeit $t = 0$ sind $405$ Fahrzeuge im Stau. Bis $t = 15$ ist $q$ positiv, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau vergrößert sich. Ab $t = 15$ ist $q$ neghativ, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau verringert sich. Bei $t \approx 40$ ist ein Wendepunkt. Nach $t = 60$ hat sich der Stau aufgelöst.




4.2 Ansatz: $q(t) = a(t + 30)((t - b)(t - c))$
$b$ und $c$ liest man über die Nullstellen $x_1 = 15$ und $x_2 = 60$ ab.
Zur Ermittlung von $a$ machen wir eine Punktprobe mit $P(0|13{,}5)$.

$$q(t) = a(t + 30)((t - 15)(t - 60))$$
$$13{,}5 = a(30)(-15)(60)$$
$$a = \frac{13{,}5}{27000} = \frac{1}{2000}$$
$$q(t) = \frac{1}{2000}(t + 30)((t - 15)(t - 60))$$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6

## Teil3 - Stochastik

## Lösung A1

1.1 Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$ für „2. Wahl"-Fliesen.

$A$: In einer Packung sind genau vier „2. Wahl"-Fliesen.

$P(A) = B_{20;0,2}(X = 4) = 0{,}2182 = 21{,}8\,\%$

$B$: In einer Packung sind mindestens $90\,\%$ der Fliesen „1.-Wahl"-Fliesen.

$20 \cdot 0{,}9 = 18$ „1. Wahl"-Fliesen, also höchstens zwei „2. Wahl"-Fliesen.

$P(B) = B_{20;0,2}(X \leq 2) = 0{,}2061 = 20{,}6\,\%$

$C$: Eine Packung enthält höchstens um $2$ von der erwarteten Anzahl der „2.-Wahl"-Fliesen abweichende Anzahl „2. Wahl"-Fliesen.

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

$\mu - 2 = 2;\;\; \mu + 2 = 6$

$P(C) = B_{20;0,2}(2 \leq X \leq 6) = B_{20;0,2}(X \leq 6) - B_{20;0,2}(X \leq 1) = 0{,}8441 = 84{,}4\,\%$

1.2 Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reihe nur aus „1. Wahl"-Fliesen besteht:

$P = 0{,}8^5 = 0{,}3277$ (5 Fliesen)

Mindestens eine Reihe nur aus „1. Wahl"-Fliesen über das Gegenereignis „Keine Reihe besteht nur aus „1. Wahl"-Fliesen".

$P = 1 - (1 - 0{,}3277)^4 = 1 - (0{,}6723)^4 = 0{,}7957 = 79{,}6\,\%$ (4 Reihen)

1.3 Es sei $W1$: Fliese „1. Wahl"; $W2$: Fliese „2. Wahl", weiterhin $a$: aussortiert; $\overline{a}$: nicht aussortiert.

$E$: Eine zufällig ausgewählte Fliese wird als „1. Wahl"-Fliese nicht aussortiert.

$\Omega_{\mathrm{E}} = \{W1;\overline{a}, W2\overline{a};\}$

$P(E) = 0{,}8 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}78 = 78\,\%$

*Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl" einstuft (also nicht aussortiert) beträgt* $78\,\%$.

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die Fliese nicht aussortiert wurde, $P(E) = 0{,}78$

$F$: Fliese ist „2. Wahl", $P(F) = 0{,}2$

$P_E(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}78} = 0{,}0256$

*Mit einer Wahrscheinlichkeit von* $2{,}56\,\%$ *ist eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit „2. Wahl".*

## Lösung A2

2.1 Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}2$ für RWE-Fans mit Alkohol.

$P(A) = B_{4;0,2}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,2}(X = 0) = 0{,}5944 = 59{,}4\,\%$ (WTR)

$P(B) = B_{4;0,2}(X = 2) = 0{,}1536 = 15{,}4\,\%$ (WTR)

$P(C) = B_{4;0,2}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,2}(X \leq 2) = 0{,}0272 = 2{,}7\,\%$ (WTR)

2.2 Anteil der neutralen Zuschauer:

Da $15\,\%$ aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, muss gelten:

$0{,}48 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}22 \cdot x = 0{,}15$

$x = 0{,}109$

*Ca.* $10{,}9\,\%$ *der neutralen Zuschauer haben also Alkohol bei sich.*

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die ausgewählte Person Alkohol bei sich hat.

$B$: Person hat Alkohol bei sich (Vorwissen); $P(B) = 0{,}15$

$A$: Person ist TuS-Fan (gesuchtes Ereignis)

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1}{0{,}15} = 0{,}2$

*Mit einer Wahrscheinlichkeit von* $20\,\%$ *ist die Person ein TuS-Fan.*

2.3 $90\,\%$-Vertrauensintervall:

$h = \frac{66}{200} = 0{,}33;\ n = 200; \gamma = 0{,}9$ ergibt $z = 1{,}64$

$$\left[0{,}33 - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot (1-0{,}33)}{200}}; 0{,}33 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot (1-0{,}33)}{200}}\right] = [0{,}2755; 0{,}3845]$$

Anzahl der Zuschauer mit Alkohol:

$0{,}2755 \cdot 12000 = 3306;\quad 0{,}3845 \cdot 12000 = 4614$

*Mit* $90\,\%$*-iger Sicherheit haben mindestens* $3306$ *und höchstens* $4614$ *Zuschauer Alkohol dabei.*

## Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

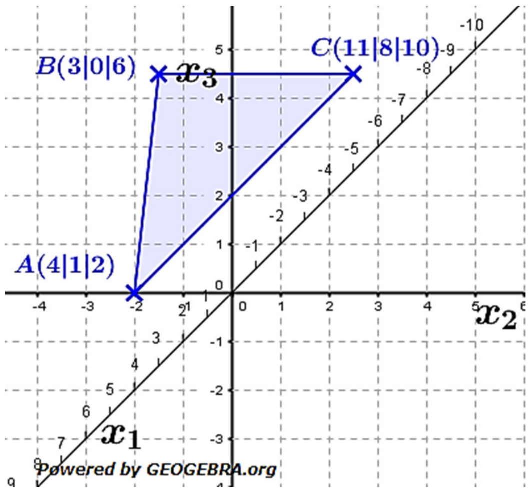
## Lösung A1

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} \stackrel{?}{=} 0$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$, ist das Dreieck $ABC$ bei rechtwinklig.




1.2 Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$. Wegen Rechtwinkligkeit bei $B$ ist dies $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{144} = 6 \cdot \sqrt{18}$.

Nun bestimmen wir noch den Abstand z. B. des Punktes $A$ von der Ebene $H$ über die HNF.

$d(A; H) = \frac{|-x_1 + x_2 - 17|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4+1-17|}{\sqrt{2}} = 6 \cdot 20 \cdot \sqrt{9} = 360$

Das Volumen der Verpackung beträgt $360\,VE$.

1.3 Gerade durch $A$ und $B$:

$$h:\ x = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsvektoren von $g$ und $h$ sind die beiden Geraden parallel.

Abstand zweier Geraden:

$d(g;h) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Vektor zwischen den beiden Aufpunkten und $\overrightarrow{rv_g}$ als Richtungsvektor einer Geraden.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}6-4\\3-1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}9\\-9\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = \sqrt{9} = 3$$

*Der Abstand der beiden Geraden beträgt $3\ LE$.*

## Lösung A1

1.1 *Bestimmung von $a$ und $b$:*

Multiplikation von Zeile $1$ der (R,Z)-Matrix mit Spalte $1$ der (Z,E)-Matrix ergibt:

$2+9+a = 13 \implies a = 2$

Multiplikation von Zeile $1$ der (R,Z)-Matrix mit Spalte $2$ der (Z,E)-Matrix ergibt:

$4+21+5 = b \implies b = 30$

1.2.1 Es gilt: $\boldsymbol{B}_{ZE}\cdot\begin{pmatrix}15\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&7\\2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}51\\171\\120\end{pmatrix}$

*Für diesen Auftrag sind $51\ ME\ \ Z1$, $171\ ME\ \ Z2$ und $120\ ME\ \ Z3$ erforderlich.*

1.2.2 $\boldsymbol{M}_{RZ}\cdot\vec{z} = \begin{pmatrix}600\\800\\1600\end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{M}_{RZ} = \begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&2\\4&7&3\end{pmatrix}$ führt zu:

$\begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&2\\4&7&3\end{pmatrix}\cdot\vec{z} = \begin{pmatrix}600\\800\\1600\end{pmatrix}$ und dem LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\4&7&3&1600\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\0&1&1&400\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&600\\0&2&2&800\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wir wählen einen Parameter frei, z. B. $z_3 = t$.

$2z_2 + 2t = 800 \implies z_2 = 400 - t$

$2z_2 + 3\cdot(400-t) + t = 600 \implies z_1 = t - 300$

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 6*

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ sind:

$z_3 = t \geq 0$

$z_2 = 400 - t \geq 0$ für $t \leq 400$

$z_1 = t - 300 \geq 0$ für $t \geq 300$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} t-300 \\ 400-t \\ t \end{pmatrix}$ ist ökonomisch sinnvoll für $300 \leq t \leq 400$.

*Eine mögliche sinnvolle Lösung:*

$\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$