

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu besonderen Pyramiden

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020  
7 Aufgaben im Dokument

## Aufgabe W2a/2014

Eine regelmäßige achtseitige Pyramide hat die Grundkante  $a = 12,0 \text{ cm}$ .

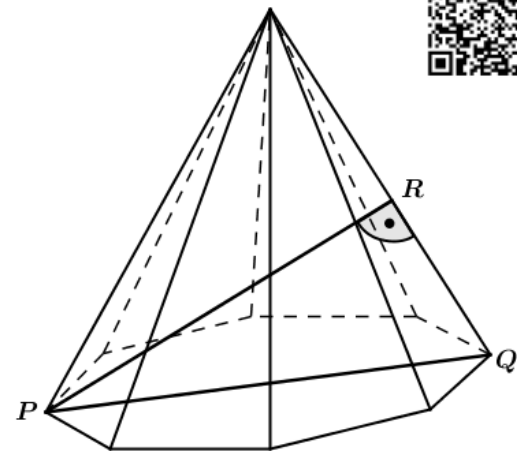
Berechnen Sie die Länge  $\overline{PQ}$ .

Diese Pyramide hat das Volumen

$V = 836 \text{ cm}^3$ . Berechnen Sie die Länge  $\overline{PR}$ .

**Tipp:** Kosinussatz für Seitenkante der acht gleichseitigen Dreiecke der Grundfläche, trigonometrischer Flächeninhalt eines Dreiecks für Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide.

Lösung:  $\overline{PQ} = 31,4 \text{ cm}$

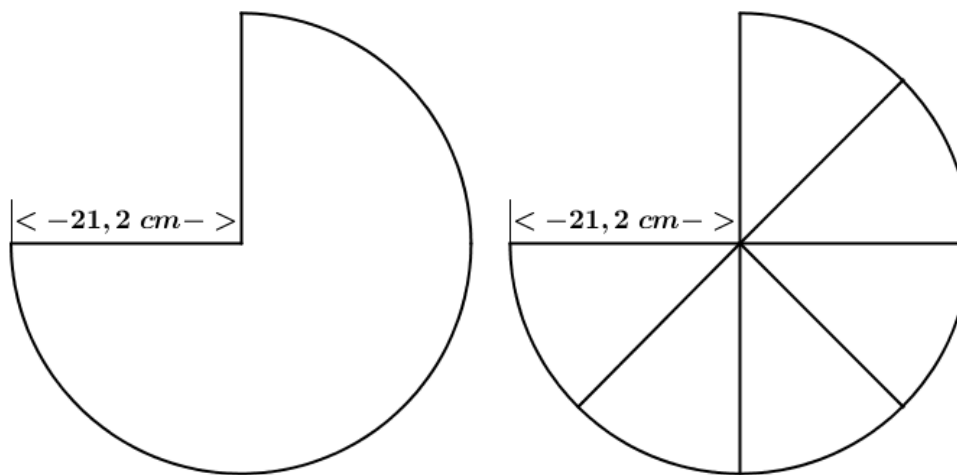


Powered by GEOGEBRA.org

$$\overline{PR} = 28,8 \text{ cm}$$

## Aufgabe W2a/2015

Gegeben sind zwei Dreiviertelkreise. Aus ihnen werden der Mantel eines Kegels und der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide gefertigt.



Powered by GEOGEBRA.org

Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.

Lösung:  $h_{\text{Kegel}} = 14,02 \text{ cm}$   
 $h_{\text{Pyramide}} = 13,64 \text{ cm}$

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu besonderen Pyramiden

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

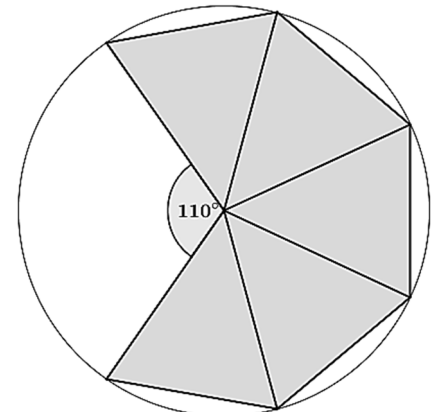
## Aufgabe W2a/2016

Aus einer Kreisfläche wird die Mantelfläche einer regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide ausgeschnitten.

Der Kreis hat einen Radius von  $8,3 \text{ cm}$ .

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung:  $V_{\text{Pyr}} = 163 \text{ cm}^3$



Powered by GEOGEBRA.org

## Aufgabe W2a/2017

Für einen Zylinder gilt:

$$r = 3,5 \text{ cm}$$

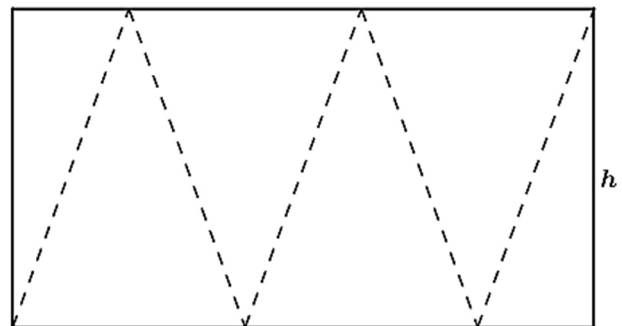
$$h = 12,0 \text{ cm}$$

Die Mantelfläche des Zylinders wird abgerollt (siehe Skizze).

Mit den Einzelteilen dieses Rechtecks wird die Mantelfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide vollständig beklebt.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Lösung:  $V_{\text{Pyr}} = 460,3 \text{ cm}^3$



Powered by GEOGEBRA.org

## Aufgabe W2a/2018

Ein massiver Kegel hat folgende Maße:

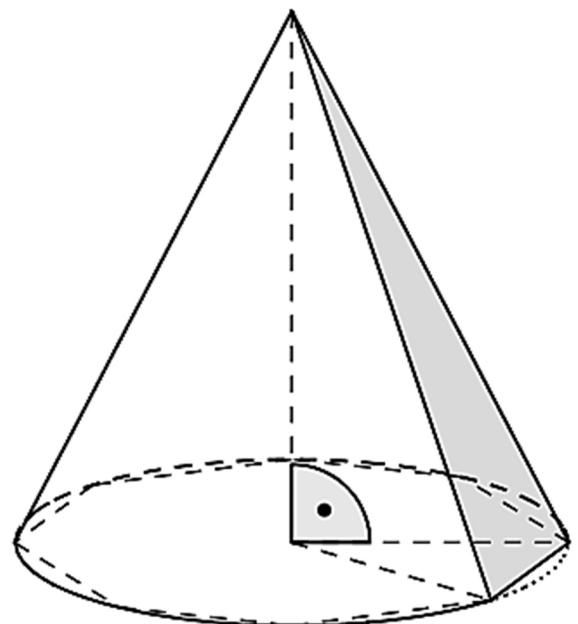
$$V_{\text{Kegel}} = 500 \text{ cm}^3$$

$$d_{\text{Kegel}} = 13,0 \text{ cm}$$

Dieser Kegel wird so bearbeitet, dass eine regelmäßige achtseitige Pyramide gleicher Höhe entsteht. Ein Manteldreieck ist bereits sichtbar.

Berechnen Sie das Volumen der entstehenden Pyramide.

Lösung:  $V_{\text{Pyr}} = 450 \text{ cm}^3$



Powered by GEOGEBRA.org

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu besonderen Pyramiden

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

## Aufgabe W2a/2019

In einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide liegt das gleichschenklige Dreieck  $BCM$ .

Es gilt:

$$\overline{BM} = \overline{CM} = 8,0 \text{ cm}$$

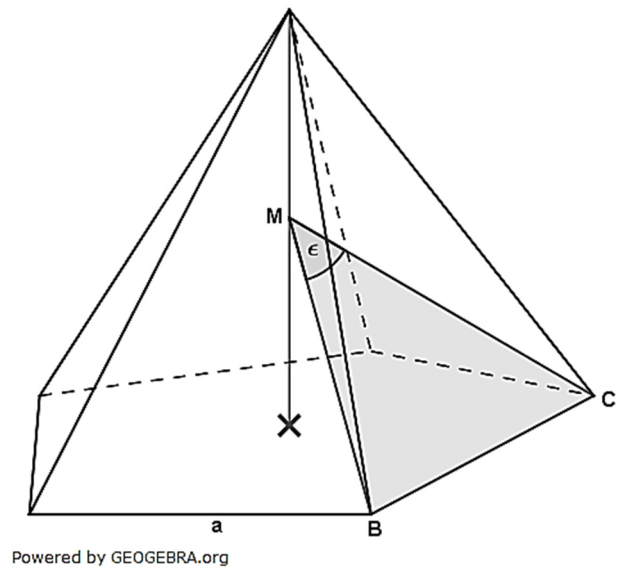
$$\epsilon = 48^\circ$$

$M$  halbiert die Höhe der Pyramide.

Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Der Punkt  $M$  bewegt sich auf der Höhe der Pyramide. Dadurch entsteht das Dreieck  $BCM'$ .

Berechnen Sie den minimalen und maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck  $BCM'$  annehmen kann.



Lösungen:  $h_{pyr} = 11,5 \text{ cm}$

$$A_{BCM'_{min}} = 14,6 \text{ cm}^2$$

$$A_{BCM'_{max}} = 40,3 \text{ cm}^2$$

## Aufgabe W2a/2020

In einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide sind bekannt:

$$a = 6,2 \text{ cm}$$

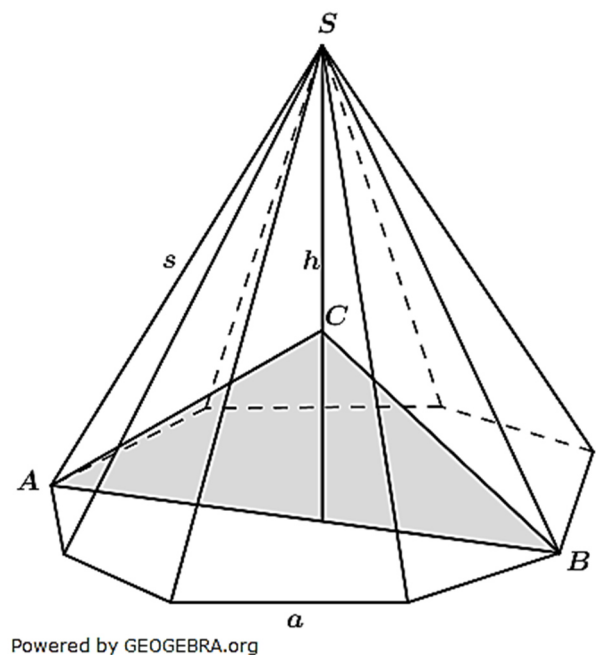
$$s = 32 \text{ cm}$$

Der Punkt  $C$  liegt auf der Höhe der Pyramide.

Das Dreieck  $ABC$  soll den gleichen Flächeninhalt haben wie eines der Manteldreiecke.

Berechnen Sie die Länge von  $\overline{SC}$ .

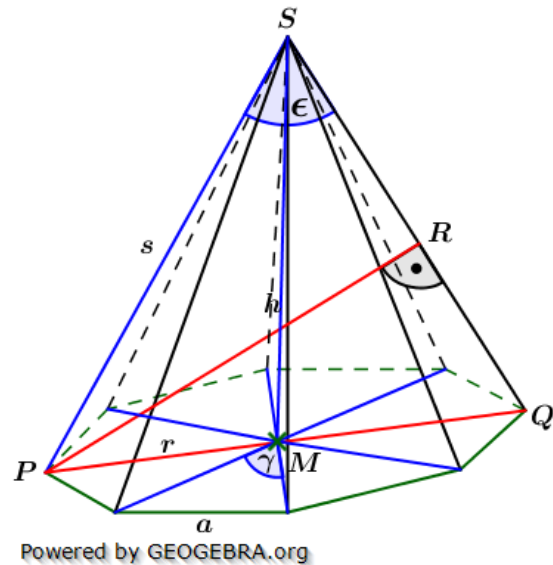
$$\text{Lösung: } \overline{SC} = 18,77 \text{ cm}$$



### Lösung W2a/2014

#### Lösungslogik

Die Grundfläche der regelmäßigen achteckigen Pyramide lässt sich in acht gleichschenklige Dreiecke unterteilen mit der Grundseite  $a$  und den Seitenkanten  $r$  (siehe Formelsammlung). Hieraus bestimmt sich der Scheitelwinkel  $\gamma$  dieser Dreiecke aus  $\gamma = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ . Über den Kosinussatz lässt sich nun die Seitenlänge  $r$  eines solchen Dreiecks berechnen. Die Strecke  $\overline{PQ}$  ist dann  $2r$  lang. Zur Berechnung der Strecke  $\overline{PR}$  benötigen wir zuerst die Höhe  $h$  und die Seitenkante  $s$  der Pyramide sowie den Spitzenwinkel  $\epsilon$ .



Powered by GEOGEBRA.org

Für die Berechnung von  $h$  benötigen wir den Flächeninhalt der Grundfläche aus acht gleichseitigen Dreiecken. Die Dreiecksfläche errechnet sich mithilfe des trigonometrischen Flächeninhalts.

Mithilfe der nun bekannten Höhe  $h$  der Pyramide und Seitenkante  $r$  des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche lässt sich  $s$  über den Satz des Pythagoras und der halbe Winkel  $\epsilon$  über den  $\tan$  ermitteln. Letztendlich berechnen wir dann die Strecke  $\overline{PR}$  aus  $s$  und dem Winkel  $\epsilon$  über den  $\sin$ .

#### Klausuraufschrieb

$$\begin{aligned} \overline{PQ}: & \quad \overline{PQ} = 2 \cdot r \\ r: & \quad a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\gamma & | & \text{Kosinussatz} \\ & \quad a^2 = 2r^2(1 - \cos\gamma) \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{a^2}{2(1 - \cos\gamma)}} \\ \gamma: & \quad \gamma = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \\ r &= \sqrt{\frac{12^2}{2(1 - \cos 45^\circ)}} = 15,6787 \\ \overline{PQ} &= 2 \cdot 15,6787 = 31,3575 \end{aligned}$$

Die Strecke  $\overline{PQ}$  ist 31,4 cm lang.

$$\begin{aligned} \overline{PR}: & \quad \frac{\overline{PR}}{s} = \sin\epsilon \Rightarrow \overline{PR} = s \cdot \sin\epsilon \\ s: & \quad s^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow s = \sqrt{h^2 + r^2} & | & \text{Satz des Pythagoras} \\ h: & \quad V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V_{\text{Pyr}}}{G} \end{aligned}$$

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

## zu besonderen Pyramiden

## Lösungen

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

$$G: \quad G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \gamma \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$G = 4 \cdot 15,6787^2 \cdot \sin 45^\circ = 695,2886$$

$$h = \frac{3 \cdot 8346}{695,2886} = 36,01$$

$$s = \sqrt{36,01^2 + 15,6787^2} = 39,2752 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\epsilon: \quad \tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{r}{h} = \frac{15,6787}{36,01} = 0,4354$$

$$\frac{\epsilon}{2} = \tan^{-1}(0,4354) = 23,53^\circ$$

$$\epsilon = 47,06^\circ$$

$$\overline{PR} = 39,2752 \cdot \sin(47,06^\circ) = 28,75$$

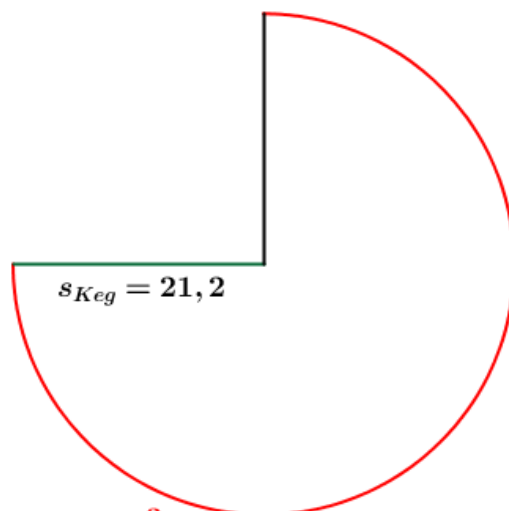
Die Strecke  $\overline{PR}$  ist 28,8 cm lang.

## Lösung W2a/2015

### Lösungslogik

#### Kegel:

Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge  $s_{Keg}$  des Kegels. Die Länge des Kreisbogens des Dreiviertelkreises wird zum Umfang des Grundkreises des Kegels. Über diesen Umfang ermitteln wir den Radius  $r_{Keg}$  des Kegels. Mithilfe des Satz des Pythagoras ergibt sich dann die Höhe  $h_{Keg}$  des Kegels.



$$u_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 21,2 = 2\pi \cdot r_{Keg}$$

Powered by GEOGEBRA.org

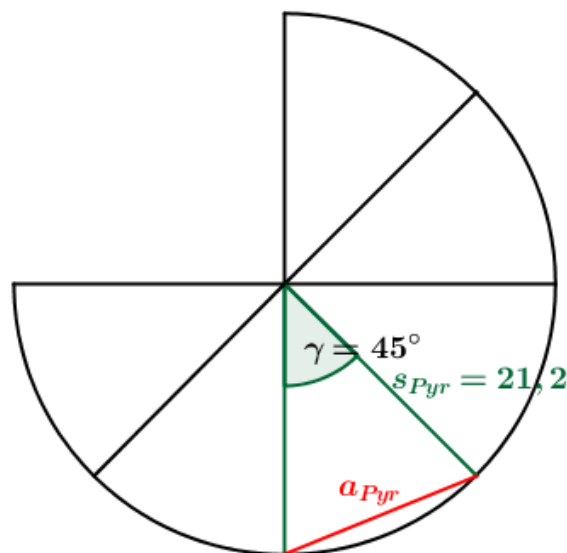
#### Sechseckpyramide:

Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge  $s_{Pyr}$  der Pyramide. Der Spitzenwinkel eines Seitendreiecks ergibt sich aus dem Öffnungswinkel des Dreiviertelkreises von  $270^\circ$  dividiert durch 6 zu  $\gamma = 45^\circ$ .

Wir berechnen nun die Seitenkante  $a_{Pyr}$  der Pyramide über den  $\sin \frac{\gamma}{2}$ .

Die Grundfläche  $G$  der Sechseckpyramide ist ein gleichmäßiges Sechseck. Ein Teildreieck dieses Sechsecks ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen  $a_{Pyr}$ . Die Höhe  $h$  der Pyramide lässt sich nun über den Satz des Pythagoras ermitteln aus

$$h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2}$$



Powered by GEOGEBRA.org

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu besonderen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

## Klausuraufschrift

**Kegel:**

$$s_{Keg} = 21,2$$

$$u_{\frac{3}{4}}: \quad u_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 21,2 = 99,90$$

$$r_{Keg}: \quad u_{\frac{3}{4}} = 2\pi \cdot r_{Keg} = 99,90 \quad | \quad : 2\pi$$

$$r_{Keg} = \frac{99,90}{2\pi} = 15,9$$

$$h_{Keg}: \quad h_{Keg} = \sqrt{s_{Keg}^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{21,2^2 - 15,9^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{Keg} = \sqrt{196,63} = 14,02$$

**Sechseckpyramide:**

$$s_{Pyr} = 21,2$$

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{270^\circ}{6} = 45^\circ$$

$$a_{Pyr}: \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{s_{Pyr}} \quad | \quad \cdot s_{Pyr}$$

$$\frac{a_{Pyr}}{2} = s_{Pyr} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad | \quad \cdot 2$$

$$a_{Pyr} = 2 \cdot s_{Pyr} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 21,2 \cdot \sin 22,5^\circ = 16,2258$$

$$h_{Pyr}: \quad h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2} = \sqrt{21,2^2 - 16,2258^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

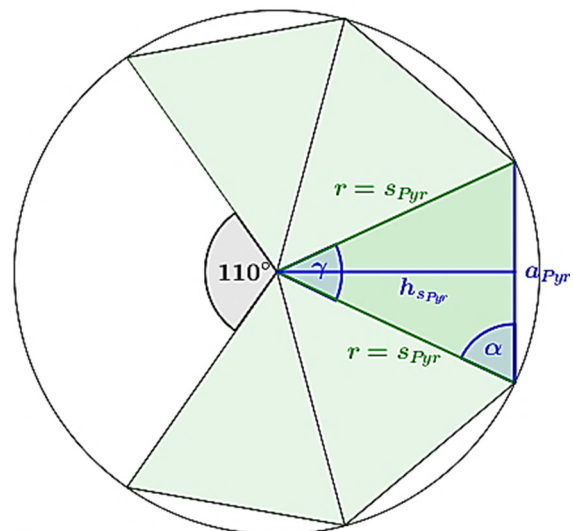
$$h_{Pyr} = \sqrt{186,1634} = 13,64$$

## Lösung W2a/2016

### Lösungslogik

In der gegebenen Aufgabengrafik wird ein Teildreieck zur Seitenfläche der Pyramide. Zur Berechnung der regelmäßigen fünfseitigen Grundfläche der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Seitenkante  $a_{Pyr}$ . Der gegebene Radius wird zur Seitenkante  $s_{Pyr}$  der Pyramide. Weiterhin benötigen wir später für die Berechnung der Höhe der Pyramide die Länge der Höhe der Seitenfläche  $h_{s_{Pyr}}$ .

Wir bestimmen als erstes die Winkel  $\gamma$  und  $\alpha$  der Seitenfläche und berechnen daraus die zuvor beschriebenen Werte.



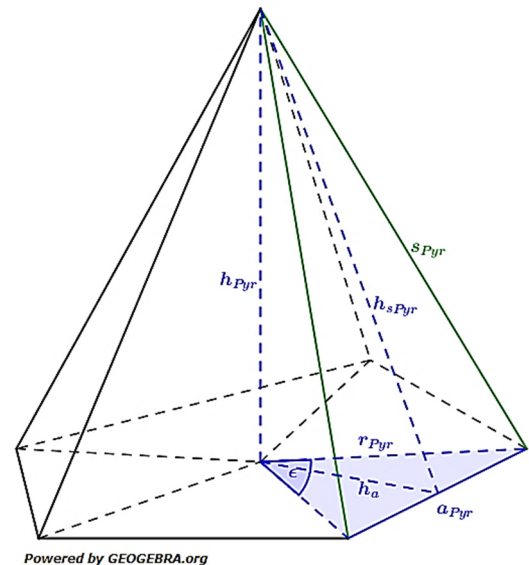
Powered by GEOGEBRA.org

#### Fünfeckpyramide:

Die nebenstehende Grafik zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir die Größe der Grundfläche sowie die Höhe  $h_{Pyr}$  der Pyramide.

Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge  $a_{Pyr}$  und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken. Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel  $\epsilon$  und mittels  $\sin \frac{\epsilon}{2}$  und  $\frac{a_{Pyr}}{2}$  dann  $r_{Pyr}$ . Mittels dem trigonometrischen Flächeninhalt für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks.

Abschließend benötigen wir noch die Höhe  $h_{Pyr}$  der Pyramide, die wir über den Satz des Pythagoras mithilfe von  $r_{Pyr}$  und  $s_{Pyr}$  berechnen.



#### Klausuraufschrieb

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{360^\circ - 110^\circ}{5} = 50^\circ$$

$$\alpha: \quad \alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$a_{Pyr}: \quad \frac{a_{Pyr}}{\sin \gamma} = \frac{r}{\sin \alpha} \quad | \quad \cdot \sin \gamma$$

$$a_{Pyr} = \frac{r \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{8,3 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 65^\circ} = 7,02$$

$$s_{Pyr}: \quad s_{Pyr} = r = 8,3$$

$$\epsilon: \quad \epsilon = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad | \quad \text{Spitzenwinkel im Fünfeck}$$

$$r_{Pyr}: \quad \sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{r_{Pyr}} \quad | \quad \cdot r_{Pyr}; \quad \cdot \sin \frac{\epsilon}{2}$$

$$r_{Pyr} = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{\sin \frac{\epsilon}{2}} = \frac{3,51}{\sin 36^\circ} = 5,9716$$

$$A_\Delta: \quad A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot r_{Pyr} \cdot r_{Pyr} \cdot \sin \epsilon \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5,9716^2 \cdot \sin 72^\circ = 16,9573$$

$$G_{Pyr}: \quad G_{Pyr} = 5 \cdot A_\Delta = 5 \cdot 16,9573 = 84,7865$$

$$h_{Pyr}: \quad h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - r_{Pyr}^2} = \sqrt{8,3^2 - 5,9716^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{Pyr} = \sqrt{33,223} = 5,7645$$

$$V_{Pyr}: \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G_{Pyr} \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 84,7867 \cdot 5,7645 = 162,9176$$

Das Volumen der Pyramide beträgt etwa  $163 \text{ cm}^3$ .

### Lösung W2a/2017

#### Lösungslogik

Das Rechteck der Zylinderabwicklung gemäß Aufgabe wird in fünf gleichseitige Dreiecke geschnitten, die den Mantel einer fünfeckigen Pyramide bilden. Dabei ist die Höhe der Seitenfläche gleich der gegebenen Höhe des Zylinders, also  $h_{s_{pyr}} = h = 12$ .

Die Grundseite der Pyramide  $a_{pyr}$  errechnet sich über den Kreisumfang der Zylinder-Grundfläche mit  $u = 2\pi \cdot r_{zyl}$ . Die Länge der Seitenkante der Pyramide ist dann  $a = \frac{u}{2,5} = \frac{2\pi r_{zyl}}{2,5}$ .

Weiterhin benötigen wir für die Berechnung des Volumens der Pyramide deren Höhe  $h_{pyr}$ . Da der Mantel der Pyramide ja der Rechteckfläche des abgewickelten Zylinders entspricht, können wir diese Höhe berechnen.

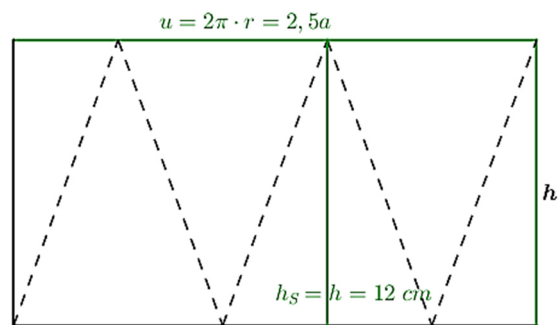
#### Fünfeckpyramide:

Die Grafik rechts zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir noch die Größe der Grundfläche der Pyramide.

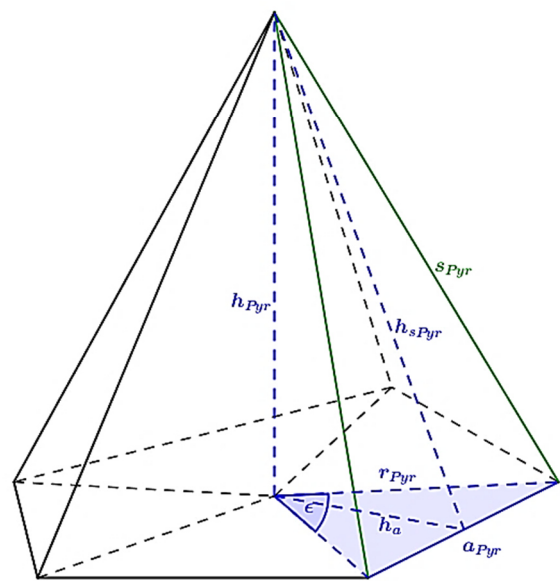
Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge  $a_{pyr}$  und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken.

Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel  $\epsilon$  und mittels  $\tan \frac{\epsilon}{2}$  und  $\frac{a_{pyr}}{2}$  dann  $h_a$ . Mittels der Flächenformel für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks und daraus letztendlich die Fläche des Fünfecks.

Zur Berechnung des Volumens der Pyramide benötigen wir noch deren Höhe. Nachdem jedoch  $h_a$  und  $h_{s_{pyr}}$  bekannt sind, errechnet sich die Höhe über den Satz des Pythagoras. Nun kann über die Volumenformel für Pyramiden die Lösung der Aufgabe berechnet werden.



Powered by GEOGEBRA.org



Powered by GEOGEBRA.org



# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

## zu besonderen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

### Klausuraufschrift

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h_{\text{Pyr}}$$

$G$ : Die Grundfläche der Pyramide ist nach Aufgabenstellung ein regelmäßiges Fünfeck.

$$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{\text{Pyr}} \cdot h_a$$

$a_{\text{Pyr}}$ : In die Länge des Rechtecks des abgewickelten Zylinders passt die Grundkante der Pyramidengrundfläche 2,5 mal hinein (siehe Grafik der Aufgabenstellung). Die Länge des Rechtecks entspricht dem Umfang des Grundkreises des Zylinders mit  $u = 2\pi r_{\text{Zyl}}$ .

$$a_{\text{Pyr}} = \frac{u_{\text{Zyl}}}{2,5} = \frac{2\pi \cdot 3,5}{2,5} = 8,7965$$

Die Grundkante  $a_{\text{Pyr}}$  der Pyramide beträgt 8,8 cm.

$$h_a: \tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{a_{\text{Pyr}}}{2 \cdot h_a}$$

$$h_a = \frac{a_{\text{Pyr}}}{2 \cdot \tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}$$

$\epsilon$ :  $\epsilon = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$  | Mittelpunkt-Winkel eines Fünfecks

$$h_a = \frac{8,8}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = 6,06$$

$$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{\text{Pyr}} \cdot h_a = 2,5 \cdot 8,8 \cdot 6,06 = 133,3$$

$$h_{\text{Pyr}}: h_{\text{Pyr}} = \sqrt{h_{\text{SPyr}}^2 - h_a^2} = \sqrt{12^2 - 6,06^2} = \sqrt{107,2764} = 10,36$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 133,3 \cdot 10,36 = 460,3293$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 460,3 cm<sup>3</sup>.

### Lösung W2a/2018

#### Lösungslogik

Über die Volumenformel des Kegels können wir  $h_{\text{Pyr}} = h_{\text{Keg}}$  bestimmen.

Die Volumenformel einer Pyramide lautet

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyr}}$$

Da wir  $h_{\text{Pyr}}$  bereits kennen, benötigen wir nur noch die Größe der Grundfläche  $G$ . Diese ist ein gleichmäßiges Achteck.

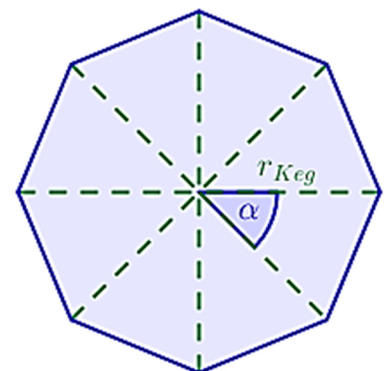
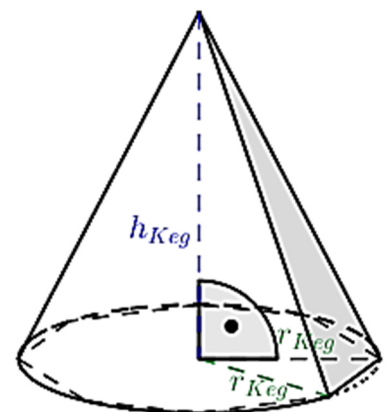
Der Mittelpunktswinkel der Grundfläche ist

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Damit ergibt sich die Fläche des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche über den trigonometrischen

$$\text{Flächeninhalt } A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Keg}}^2 \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 6,5^2 \cdot \sin(45^\circ)$$

Die Grundfläche setzt sich aus acht solcher Teildreiecke zusammen, sodass wir das Volumen nun berechnen können.



Powered by GEOGEBRA.org

#### Klausuraufschrieb

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyr}$$

$$h_{Pyr}: \quad V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$

$$500 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6,5^2 h_{Keg}$$

$$500 = 44,2441 \cdot h_{Keg} \quad | \quad : 44,2441$$

$$h_{Keg} = \frac{500}{44,2441} = 11,30 = h_{Pyr}$$

$$\alpha: \quad \alpha = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

G: Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Achteck, dessen Fläche sich aus acht gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzt mit einer Schenkellänge von  $s = r_{Keg} = 6,50$  und einem Spitzenwinkel von  $\alpha = 45^\circ$ .

$$G = 8 \cdot A_{Dreieck}$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_{Keg}^2 \cdot \sin(\alpha) \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$G = 4 \cdot 6,5^2 \cdot \sin(45^\circ) = 119,50$$

$$V_{Pyr}: \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 119,5 \cdot 11,3 = 450,12$$

Das Volumen der Pyramide beträgt  $450 \text{ cm}^3$ .

#### Lösung W2b/2019

##### Lösungslogik

Höhe  $h_{Pyr}$  der Fünfeckpyramide:

Zur Berechnung der Höhe  $h_{Pyr}$  der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Grundkante  $a$ . Da das Dreieck  $BCS$  gleichschenkelig ist, halbiert die Höhe  $h_M$  die Seitenkante  $a = \overline{BC}$  als auch den Winkel  $\epsilon$ .

Somit gilt  $\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_M}$ . Die Höhe  $h_M$  folgt nun aus dem Satz des Pythagoras:

$$h_M = \sqrt{h_{Pyr}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Wir betrachten nun das Teildreieck  $BFC$  der Pyramidengrundfläche. Der Winkel  $\gamma$  errechnet sich bei einem regelmäßigen Fünfeck aus

$$\gamma = \frac{360^\circ}{5}. \quad \text{Für die Höhe } h_F \text{ gilt nun } \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F}.$$

Die Strecke  $\overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2}$  folgt aus dem Satz des Pythagoras mit  $\frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$ .

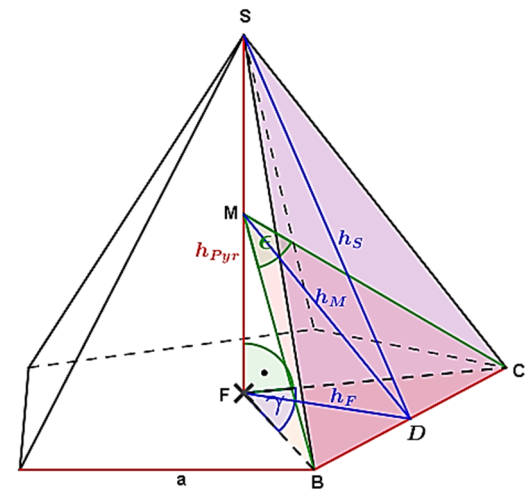
**Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks  $BCM'$ :**

Aus der Grafik erkennen wir, dass der minimale Flächeninhalt dann entsteht, wenn der Punkt  $M$  mit dem Punkt  $F$  zusammenfällt und der maximale Flächeninhalt dann, wenn der Punkt  $M$  mit dem Punkt  $S$  zusammenfällt.

$$A_{BCM'_{min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F, \quad \text{alle Werte bereits bekannt.}$$

$$A_{BCM'_{max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S.$$

$h_S$  muss noch ermittelt werden über den Satz des Pythagoras aus  $h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{Pyr}^2}$ .



Powered by GEOGEBRA.org

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu besonderen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

## Klausuraufschrieb

$$a: \quad \overline{BD} = \frac{a}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}} \quad | \quad \cdot \overline{BM}$$

$$\frac{a}{2} = \overline{BM} \cdot \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = 8,0 \cdot \sin(24^\circ) = 3,254 \quad | \quad \cdot 2$$

$$a = 6,51$$

$$h_{\text{pyr}}: \quad \overline{FM} = \frac{h_{\text{pyr}}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$$

$$h_M: \quad h_M = \sqrt{\overline{BM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_M = \sqrt{8,0^2 - 3,254^2} = 7,308$$

$$h_F: \quad \gamma = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F} \quad | \quad \cdot h_F; \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$h_F = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3,254}{\tan(36^\circ)} = 4,479$$

$$h_{\text{pyr}}: \quad \overline{FM} = \frac{h_{\text{pyr}}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\frac{h_{\text{pyr}}}{2} = \sqrt{7,308^2 - 4,479^2} = 5,775 \quad | \quad \cdot 2$$

$$h_{\text{pyr}} = 11,549$$

Die Höhe der Pyramide beträgt 11,5 cm

Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks BCM':

$$A_{BCM'_{\min}}: \quad A_{BCM'_{\min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F$$

$$A_{BCM'_{\min}} = \frac{1}{2} \cdot 6,51 \cdot 4,479 = 14,579$$

$$A_{BCM'_{\max}} \quad A_{BCM'_{\max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S$$

$$h_S: \quad h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{\text{pyr}}^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_S = \sqrt{4,479^2 + 11,549^2} = 12,387$$

$$A_{BCM'_{\max}} \quad A_{BCM'_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot 6,51 \cdot 12,387 = 40,32$$

Die minimale Fläche eines Dreiecks BCM' beträgt 14,6 cm<sup>2</sup>, die maximale Fläche beträgt 40,3 cm<sup>2</sup>.

### Lösung W2a/2020

#### Lösungslogik

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Die Fläche des Dreiecks  $DES$  soll gleich der Fläche des Dreiecks  $ABC$  sein.

$A_{DES}$  ist das Dreieck einer Seitenfläche. Sein Flächeninhalt erhalten wir über

$$A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s.$$

Hierzu benötigen wir zunächst  $h_s$  über den Satz des Pythagoras.

Die Fläche des Dreiecks  $ABC$  errechnet sich aus:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{ABC}$$

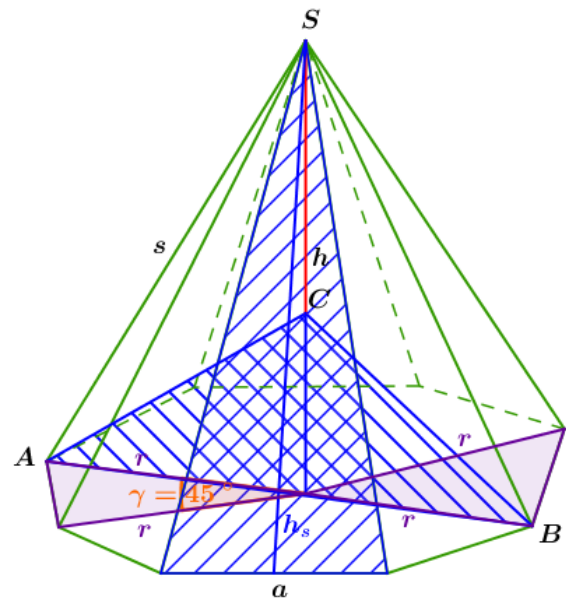
Hierzu benötigen wir zunächst die Länge von  $\overline{AB}$  mit  $\overline{AB} = 2r$ .

Wir benötigen also, was die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der achteckigen Grundfläche ist. Wir berechnen  $r$  über den  $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$  mit  $\gamma = 45^\circ$ .

Da ja  $A_{DES} = A_{ABC}$  sein soll, können wir nun über die Gleichsetzung  $h_{ABC}$  ermitteln.

Verbleibt noch zum Schluss die Berechnung der Höhe der Pyramide, denn die gesuchte Strecke  $\overline{SC}$  errechnet sich aus  $h_{pyr} - h_{ABC}$ .

$h_{pyr}$  errechnen wir über den Satz des Pythagoras unter Verwendung von  $r$  und  $s$ .



Powered by GEOGEBRA

#### Klausuraufschrieb

Flächeninhalt einer Seitenfläche:

$$A_{DES}: A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

$$h_s: h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$h_s = \sqrt{32^2 - 3,1^2} = 31,85$$

$$A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot 6,2 \cdot 31,85 = 98,735$$

| Satz des Pythagoras

Flächeninhalt Dreieck  $ABC$ :

$$A_{ABC}: A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{ABC}$$

$$\overline{AB} = 2r$$

$$r: \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r}$$

$$r = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3,1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\gamma: \gamma = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$r = \frac{3,1}{\sin(22,5^\circ)} = 8,1$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16,2 \cdot h_{ABC}$$

|  $\cdot r; \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

## zu besonderen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss besondere Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

$$h_{ABC}: A_{DES} = A_{ABC}$$

$$98,735 = \frac{1}{2} \cdot 16,2 \cdot h_{ABC}$$

$$98,735 = 8,1 \cdot h_{ABC}$$

$$h_{ABC} = 12,19$$

| :8,1

$$h_{Pyr}: h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$h_{Pyr} = \sqrt{32^2 - 8,1^2} = 30,96$$

| Satz des Pythagoras

$$\overline{SC}: \overline{SC} = h_{Pyr} - h_{ABC} = 30,96 - 12,19 = 18,77$$

Die Strecke  $\overline{SC}$  ist 18,77 cm lang.