Realschulabschluss Funktionen (Pflichtteil A2) ab 2021
3 Aufgabe im Dokument

Aufgabe A4/2021
Die Parabel p hat die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 10$.
Eine Gerade g besitzt die Steigung $m = -2$.
Sie geht durch den Scheitelpunkt S der Parabel p.

- Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt Q der Parabel p mit der Geraden g.

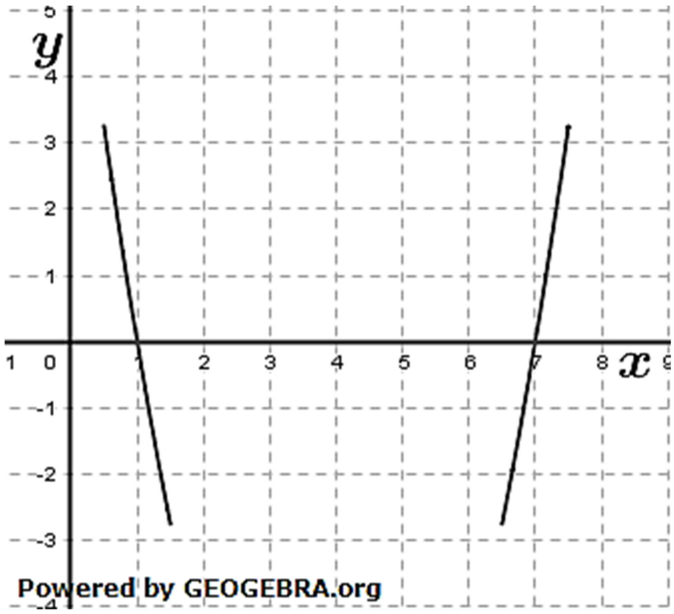
Die Gerade h verläuft senkrecht zur Geraden g und geht durch den Punkt Q.

- Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden h.

Lösungen: $Q(1|5)$
h: $y = 0{,}5x + 4{,}5$

Aufgabe A4/2022
Das Schaubild zeigt den Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p.

- Bestimme die Funktionsgleichung von p.



Die Wertetabelle gehört zur Parabel p.

x	-3	-2	-1	0
y				

- Ergänze die fehlenden Werte in der Wertetabelle.

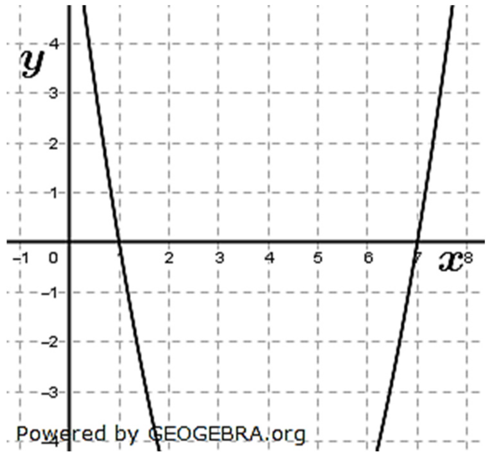
Die Gerade g mit der Funktions-gleichung $y = -2x + 2$ schneidet die Parabel p in den Punkten A und B.

- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B.

Lösungen: p: $y = x^2 - 8x + 7$
$A(1|0)$; $B(5|-8)$

Aufgabe A4/2023

Die Abbildung zeigt den Ausschnitt einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p.



- Bestimme die Funktionsgleichung der Normalparabel p. Entnimm dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.

Eine Gerade g schneidet die y-Achse im Punkt $T(0|2)$ und hat die Steigung $m = -2$.

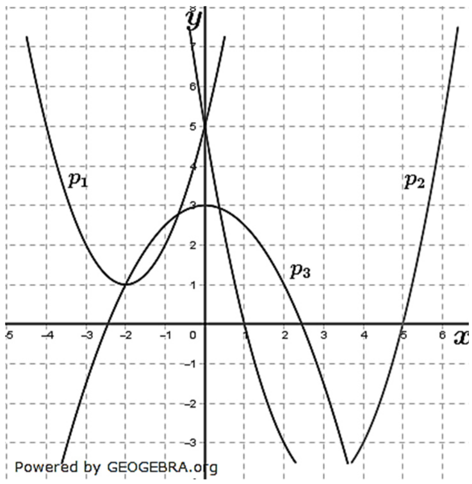
- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte A und B der Parabel mit der Geraden.

Lösung: p: $y = (x-4)^2 - 9$
$A = (1|0)$; $B(5|-8)$

Aufgabe A3/2023

Gegeben sind drei Funktionsgleichung und drei Graphen:

(A) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ (B) $y = (x-3)^2 + e$ (C) $y = x^2 + 4x + 5$



- Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- Bestimmen Sie den Wert für e mithilfe des Schaubildes.

Die Gerade g verläuft durch den Scheitelpunkt S_2 von p_2 und durch den Punkt $P(0|2)$.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.

Lösungen: (A)=p_3 (B)=p_2 (C)=p_1; $e = -4$; g: $y = -2x + 2$

Lösung A5/2021

Lösungslogik

Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes durch Umstellung der Normalgleichung in die Scheitelpunktgleichung von p.
Aufstellung der Geraden mit Steigung $m=-2$ durch $S(3|1)$.
Gleichsetzung von Parabelgleichung p mit der Geradengleichung g und Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten x. Einsetzen der ermittelten x-Werte in die Geradengleichung g zur Ermittlung der y-Koordinate der Schnittpunkte.
Für die Steigung der orthogonalen Geraden h gilt: $m_g \cdot m_h = -1$. Hiermit berechnen wir m_h. Dann Punktprobe mit Q in h.

Klausuraufschrieb

Scheitelpunkt S von p aus der Normalform in Scheitelpunktgleichung umstellen:

p: $y = x^2 - 6x + 10$ | allgemeine Form Parabelgleichung
$y = (x-3)^2 - 9 + 10$ | quadratische Ergänzung
$y = (x-3)^2 + 1$ | Scheitelpunktgleichung
$S(3|1)$

Geradengleichung von g mit $m=-2$ durch S:

g: $y = -2x + b$
$1 = -2 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit S
$b = 7$
$y = -2x + 7$ | $+3$

Schnittpunkte von p und g durch Gleichsetzung:

$x^2 - 6x + 10 = -2x + 7$ | $+2x;\ -7$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$ | p/q-Formel
$x_1 = 3;\ \ x_2 = 1$
$x_2 \rightarrow g$
$y = -2 \cdot 1 + 7 = 5 \ \ => \ \ Q(1|5)$

Der zweite Schnittpunkt Q hat die Koordinaten $Q(1|5)$

Geradengleichung von $h \perp g$ durch $Q(1|5)$:

h: $m_g \cdot m_h = -1$

$m_h = -\frac{l}{m_g} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$y = 0{,}5x + b$

$5 = 0{,}5 \cdot 1 + b$ | Punktprobe mit Q

$b = 4{,}5$

$y = 0{,}5x + 4{,}5$

<u>Lösung A4/2022</u>

<u>Lösungslogik</u>

Normalgleichung von p:

Zur Bestimmung der Normalgleichung von p verwenden wir die Nullstellengleichung $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit den beiden gegebenen Nullstellen in der Grafik $N_1(1|0)$ und $N_2(7|0)$. Durch Ausmultiplizieren der Nullstellengleichung erhalten wir die Normalgleichung der Parabel.

Wertetabelle ausfüllen:

Über die soeben gewonnene Normalengleichung der Parabel berechnen wir die
y-Werte zu den y-Werten der vorgegebenen Tabelle.

Koordinaten von zwei Schnittpunkten A und B:

Schnittpunkte bestimmen wir durch Gleichsetzung der Parabelgleichung mit der Geradengleichung und lösen diese dann nach den x-Werten auf.
Da Punkte jedoch stets zwei Koordinaten besitzen, berechnen wir die zugehörigen y-Werte durch Einsetzen der berechneten x-Werte in die Geradengleichung.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Normalgleichung von p:

Nullstellengleichung einer Normalparabel: $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit den beiden gegebenen Nullstellen (Grafik) $N_1(1|0)$ und $N_2(7|0)$.

$y = (x - 1) \cdot (x - 7)$ | ausmultiplizieren

$y = x^2 - 8x + 7$

Wertetabelle ausfüllen:
Die x-Werte der Tabelle in die Parabelgleichung eingesetzt führt zu:

x	-3	-2	-1	0
y	40	27	16	7

Koordinaten von zwei Schnittpunkten A und B:
Schnittpunkte durch Gleichsetzung.
$p \cap g$:
$x^2 - 8x + 7 = -2x + 2 \quad | \quad +2x; -2$
$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$
$x_1 = 5; \quad x_2 = 1$
$y_1 = -2x_1 + 2 = -2 \cdot 5 + 2 = -8$
$y_2 = -2x_2 + 2 = -2 \cdot 1 + 2 = 0$
$A(1|0); \quad B(5|-8)$

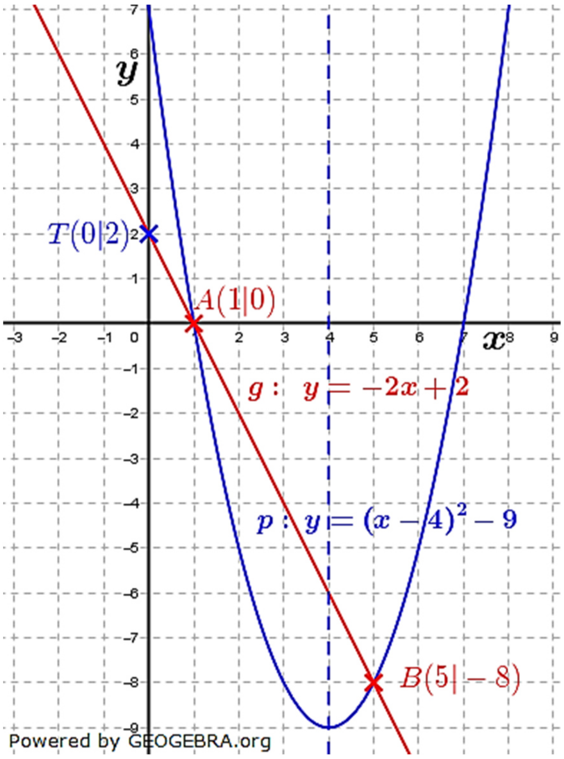
<u>Lösung A4/2023</u>
<u>Lösungslogik</u>
Funktionsgleichung von p:
Die beiden Nullstellen sind gegeben. Damit liegt die Symmetrieachse der Parabel in der Mitte der beiden Nullstellen und wir kennen den x –Wert des Scheitels mit $x_S = 4$.
Wir stellen die Scheitelpunktgleichung auf mit $y = (x - x_S)^2 + y_S$.
Über eine Punktprobe mit einer der beiden Nullstellen können wir nun y_S bestimmen und erhalten die Funktionsgleichung.

Schnittpunkte A und B:
Über die soeben gewonnene Normalengleichung der Parabel berechnen wir die
y-Werte zu den y-Werten der vorgegebenen Tabelle.
Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung der Geraden g auf.
Nach Gleichsetzung von p mit g lösen wir die entstandene Gleichung nach x auf und erhalten x_A und x_B.
Danach bestimmen wir noch die zugehörigen y-Werte y_A und y_B.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p:

Symmetrieachse der Parabel in der Mitte der beiden Nullstellen ist x-Koordinate des Scheitels.



$x_S = 4$

p: $y = (x-4)^2 + y_S$

Punktprobe mit einer der beiden Nullstellen, wir wählen $A(1|0)$:

$0 = (1-4)^2 + y_S$

$0 = 9 + y_S \quad | \quad -9$

$y_S = -9$

p: $y = (x-4)^2 - 9$

Schnittpunkte A und B:

Geradengleichung g:

Mit der gegebenen Steigung $m = -2$ und dem y-Achsenabschnitt lautet die Funktionsgleichung:

g: $y = -2x + 2$

Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$g \cap p$

$(x-4)^2 - 9 = -2x + 2$

$x^2 - 8x + 16 - 9 = -2x + 2 \quad | \quad$ Auflösen 2. Binomische Formel

$x^2 - 8x + 7 = -2x + 2 \quad | \quad +2x;\ -2$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad | \quad$ p/q-Formel

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$

$x_1 = 5;\ \ x_2 = 1$

$x_A = 1;\ \ x_B = 5$

Bestimmung der zugehörigen y-Werte:

$y_A = -2 \cdot x_A + 2 = -2 + 2 = 0$

$y_B = -2 \cdot x_B + 2 = -10 + 2 = -8$

Schnittpunkte $A(1|0)$; $B(5|-8)$

Lösung A3/2024

Lösungslogik

Zuordnung von Graphen:

Siehe Klausuraufschrieb.

Funktionsgleichung von g:

Über die allgemeine Geradengleichung $y = mx + c$ errechnen wir m über die beiden Punkte S_2 und $P(0|2)$, wobei auch wegen P als Schnittpunkt mit der y-Achse der Wert von c festliegt.

Klausuraufschrieb

Zuordnung von Graphen:

(A) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit ihrem Scheitelpunkt $S(0|2)$. Dies trifft nur auf Graph p_3 zu.

(B) $y = (x-3)^2 + e$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit der x-Koordinate des Scheitels bei $x_S = 3$. Dies trifft nur auf Graph p_2 zu.

(C) $y = x^2 + 4x + 5$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Schnittpunkt mit der y –Achse $S_y(0|5)$. Dies trifft nur auf Graph p_1 zu.

Zur Bestimmung von e:

(B) $y = (x-3)^2 + e$ ist die Scheitelpunktgleichung einer Parabel, die durch den Punkt $N_1(1|0)$ verläuft.

Punktprobe mit $N_1(1|0)$ führt zu:

$0 = (1-3)^2 + e$

$0 = 4 + e \qquad | \quad -4$

$e = -4$

Funktionsgleichung von g:

g: $\quad y = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{3-0} = \frac{-6}{3} = -2$

$y = -2x + c$

Wegen $P(0|2)$ ist der y-Achsenabschnitt $c = 2$.

g: $\quad y = -2x + 2$