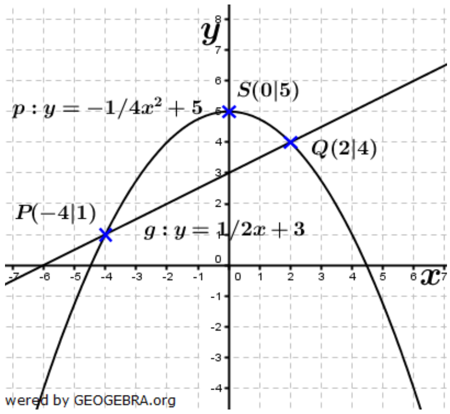
Lösung P5/2010

Lösungslogik

Erstellung der Graphik. Die Parabel ist nach unten geöffnet, breiter und in x–Richtung nicht verschoben, der Scheitel liegt somit bei $S(0|5)$.
Aufstellung der Geradengleichung g.
Berechnung der Schnittpunkte zwischen p und g durch Gleichsetzung.

Klausuraufschrieb



p: $\quad y = -\frac{1}{4}x^2 + 5$

Geradengleichung g durch $P(0|3)$ mit $m = \frac{1}{2}$:

g: $\quad y = mx + b \quad | \quad m = \frac{1}{2}$ (gegeben)

$\quad y = \frac{1}{2}x + 3 \quad |$ wegen $P(0|3)$ ist $b = 3$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g \quad |$ Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$\frac{1}{4}x^2 + 5 = \frac{1}{2}x + 3 \quad | \quad -3; -\frac{1}{2}x$

$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | \quad \cdot(-4)$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -4$

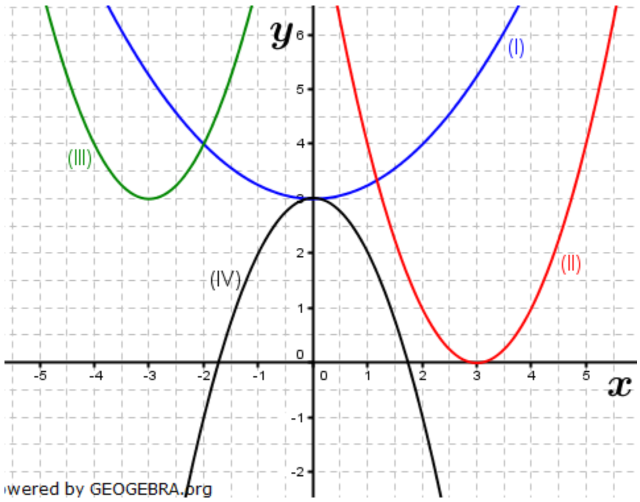
$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$

$y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 3 = 1$

Schnittpunkte sind $P(-4|1)$ und $Q(2|4)$.

Lösung P5/2011

Klausuraufschrieb



(a) gehört zur Gleichung (III)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(-3|3)$
(c) gehört zur Gleichung (I)
Nach oben geöffnete, gestauchte Parabel ohne Verschiebung in x–Richtung mit Scheitelpunkt $S(0|3)$.
(d) gehört zur Gleichung (II)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Verschiebung nach links und nach oben.
Funktionsgleichung von (b):
$y = -x^2 + 3$

Lösung P6/2012

Lösungslogik

Bestimmung des Scheitelpunktes S anhand der gegebenen Zeichnung. Dieser liegt bei $S(1|-4)$.

Prüfung, ob eine Normalparabel vorliegt. Vom Scheitelpunkt aus eine Stelle nach rechts und eine Stelle nach oben treffen wir wieder auf die Parabel. Vom Scheitel zwei Stellen nach rechts und vier Stellen nach oben treffen wir wieder auf die Parabel. Es ist also eine Normalparabel.

Aufstellung der Parabelgleichung über die Scheitelpunktgleichung.

Bestimmung der Nullstelle N_1 durch Argumentation:

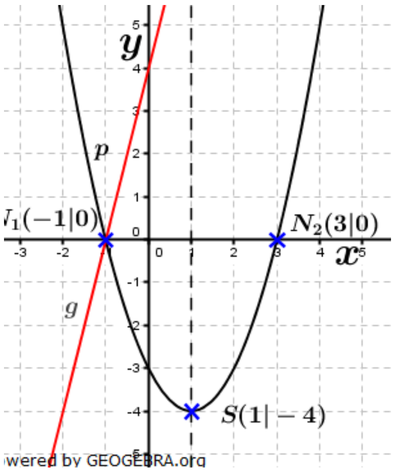
Die Parallele zur y–Achse durch den Scheitel der Parabel ist Symmetrieachse. Die linke Nullstelle N_1 ist somit genausoweit von der Symmetrieachse nach links entfernt, wie die Nullstelle N_2 von der Symmetrieachse nach rechts entfernt liegt, hier also zwei Stellen. Zwei Stellen nach links von der Symmetrieachse liegt also der Punkt $N_1(-1|0)$.

Nullstellenbestimmung durch Rechnung:

Siehe Klausuraufschrieb

Aufstellung der Geradengleichung g.

Schnittpunktbestimmung von p mit g.



Klausuraufschrieb

Scheitelpunkt aus Zeichnung: $S(1|-4)$

Punktprobe $A(2|-3)$ liegt auf Parabel, Punktprobe $B(3|0)$ liegt auf Parabel, die Parabel ist eine Normalparabel.

p: $\quad y = (x-1)^2 - 4$

$\quad\quad y = x^2 - 2x - 3$

Bestimmung der Nullstelle N_1 durch Argumentation:

N_1: Wegen der Symmetrieachse bei $x_0 = 1$ liegt N_1 genauso weit nach links von x_0 entfernt, wie N_2 nach rechts, also 2 Stellen. Die Koordinaten von N_1 sind somit $N_1(-1|0)$.

Nullstellenbestimmung durch Rechnung:

N_1: $\quad y = 0 \Longrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

$\quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \qquad | \quad p/q$-Formel

$\quad x_1 = -1; \quad x_2 = 3$

$\quad N_1(-1|0)$

Geradengleichung von g durch N_1 und P:

g: $\quad y = mx + b$

m: $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_P - y_{N_1}}{x_P - x_{N_1}} = \frac{36-0}{8-(-1)} = \frac{36}{9} = 4$

$\quad y = 4x + b \quad | \quad$ Punktprobe mit $N_1(-1|0)$

$\quad 0 = 4 \cdot (-1) + b \quad \Longrightarrow \quad b = 4$

$\quad y = 4x + 4$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$:	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 - 2x - 3 = 4x + 4$	$-4x;\ -4$
$x^2 - 6x - 7 = 0$	p/q-Formel

$x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm \sqrt{16} = 3 \pm 4$

$x_1 = 7; \quad x_2 = -1$

$x_1 \longrightarrow g$:

$y_1 = 4 \cdot x_1 + 4 = 4 \cdot 7 + 4 = 32$

Der Punkt Q hat die Koordinaten $Q(7|32)$.

Lösung P5/2013

<u>Lösungslogik</u>

Über eine Punktprobe mit Punkt A ermitteln wir die Unbekannte q
Wir errechnen y_B, indem wir in die Parabelgleichung $x = 1$ einsetzen.
Wir stellen die Parabelgleichung in die Scheitelpunktgleichung um und bestimmen die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
Wir berechnen die Steigung der Geraden g durch die beiden Punkte S und B.
Wir berechnen b der Geradengleichung, indem wir einen der beiden Punkte S oder B in die Geradengleichung einsetzen.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Bestimmung von q:

$y = x^2 + 4x + q$	Punktprobe mit Punkt $A(-3|-4)$
$-4 = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + q$	
$-4 = 9 - 12 + q$	$+3$
$q = -1$	

Koordinaten von B:

$y = x^2 + 4x - 1$	y_B für $x = 1$
$y_B = 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 4 \implies B(1|4)$	

Scheitelpunkt von p:

$y = x^2 + 4x - 1$	Umstellen in die Scheitelpunktgleichung
$y = (x+2)^2 - 4 - 1$	
$y = (x+2)^2 - 5 \implies S(-2|-5)$	

Geradengleichung g durch S und B:

g: $y = mx + b$

m: $\quad m = \frac{y_S - y_B}{x_S - x_B} = \frac{-5-4}{-2-1} = \frac{-9}{-3} = 3$

g: $y = 3x + b$	Punktprobe mit $B(1|4)$
$y_B = 3x_B + b$	
$4 = 3 \cdot 1 + b \implies b = 1$	

g: $y = 3x + 1$

Lösung P4/2014

<u>Lösungslogik</u>

Aufstellung der Funktionsgleichung g.
Aufstellung der Funktionsgleichung p.
Schnittpunktberechnung von g mit p.

Klausuraufschrieb

Geradengleichung g durch R mit $m = -2$:

$g\colon\ y = -2x + b$

$-4 = -2 \cdot 2{,}5 + b$ | Punktprobe mit $R(2{,}5|-4)$

$b = 1 \implies y = -2x + 1$

Funktionsgleichung von p:

$p\colon\ y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ | Nullstellen bei -2 und 4

$y = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-2x + 1 = x^2 - 2x - 8$ | $+2x;\ +8$

$x^2 = 9 \implies x_1 = -3;\quad x_2 = 3$

$y_1 = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 8 = 7 \implies P_1(-3|7)$

$y_2 = 3^2 - 2 \cdot 3 - 8 = -5 \implies P_2(3|-5)$

Lösung P5/2015

Klausuraufschrieb

Graph zu Wertetabelle:

p_3 ist der Graph der Funktionswerte gemäß Wertetabelle. $S(0|1)$ ist der Schnittpunkt mit der y–Achse, $N(1|0)$ ein Schnittpunkt mit der x–Achse.

Schnittpunkt p_1 mit p_2:

p_1: $S_{p1}(6|4)$ | Scheitelpunkt von p_1

$y = (x - 6)^2 + 4$ | Scheitelpunktgleichung

$y = x^2 - 12x + 40$ | allgemeine Parabelgleichung

p_2: $S_{p2}(4|-4)$ | Scheitelpunkt von p_2

(Eingezeichnete Parabel hat Nullstellen bei $N_1(2|0)$ und $N_2(6|0)$, somit liegt die Symmetrieachse bei $x = 4$)

$y = (x - 4)^2 - 4$ | Scheitelpunktgleichung

$y = x^2 - 8x + 12$ | allgemeine Parabelgleichung

$p_1 \cap p_2$: I) $y = x^2 - 12x + 40$

II) $y = x^2 - 8x + 12$

I)-II) $0 = -4x + 28$ | $+4x;\ :4$

$x = 7$

$x \longrightarrow II)$: $y = 7^2 - 8 \cdot 7 + 12 = 5$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $S(7|5)$.

p_4: $y = ax^2 + 1$

$P(2|3)$ ist Punkt der Parabel.

$3 = a \cdot 2^2 + 1$ | Punktprobe mit $P(2|3)$

$2 = 4a$ | $:4$

$a = \frac{1}{2}$

Die Gleichung der Parabel p_4 lautet $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

Lösung P6/2016

Lösungslogik

Aufstellen der Scheitelpunktgleichung von p mit Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes.
Aufstellen der Geradengleichung g mit $m = 2$ durch den Scheitelpunkt der Parabel p.
Gleichsetzung von Parabelgleichung p mit der Geradengleichung g und Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten x. Einsetzen der ermittelten x-Werte in die Geradengleichung g zur Ermittlung der y-Koordinate der Schnittpunkte.

Klausuraufschrieb

Scheitelpunktgleichung von p und Scheitelpunkt S_p:

p: $y = x^2 - 6x + 10{,}5$ | allgemeine Parabelgleichung
$y = (x-3)^2 - 9 + 10{,}5$
$y = (x-3)^2 + 1{,}5$ | Scheitelpunktgleichung
$S_p(3|1{,}5)$

Geradengleichung g mit $m = 2$ durch S_p:

g: $y = 2x + b$
$1{,}5 = 2 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $S_p(3|1{,}5)$
$1{,}5 - 6 = b$
$b = -4{,}5$
$y = 2x - 4{,}5$

Schnittpunkt von p und g:

$p \cap g$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
(1) $y = 2x - 4{,}5$ | Gerade g
(2) $y = x^2 - 6x + 10{,}5$ | Parabel p
(2)-(1) $0 = x^2 - 8x + 14{,}5$ | Subtraktionsverfahren
$x^2 - 8x + 15$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$ | p/q-Formel
$x_1 = 5;\quad x_2 = 3$
$x_2 = 3$ gilt für den Scheitelpunkt $S_p(3|1{,}5)$
$y_1 = 2 \cdot x_1 - 4{,}5$
$y_1 = 2 \cdot 5 - 4{,}5 = 5{,}5$

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes sind $Q(5|5{,}5)$.