Themenerläuterung

In diesem Kapitel wirst du mit linearen Funktionen (=Gerade) und quadratischen Funktionen (=Parabel) konfrontiert. Du musst wissen, wie man eine Geradengleichung durch zwei vorgegebene Punkte aufstellt, was es bedeutet, wenn von Parallelen Geraden die Rede ist, du musst die allgemeine Gleichung einer Parabel in die Scheitelpunktform bringen können und wie man aus der Scheitelpunktgleichung wieder die allgemeine Gleichung berechnet.
Weiterhin ist nach den Schnittpunkten von Geraden und Parabeln mit den Koordinatenachsen gefragt bzw. von Schnittpunkten von zwei Parabeln untereinander oder von Schnittpunkten einer Parabel mit einer Geraden.
Du solltest weiterhin wissen, wie man eine vorgegebene Parabel an eine andere Stelle im Koordinatensystem verschiebt und wie man durch die Aufgabenstellung wieder auf die neue Parabelgleichung kommt.

Die wichtigsten benötigten Formeln

1. *Der Umgang mit der „Mitternachtsformel"*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ist unerlässlich.

2. *Äquivalenzumformungen:*
Es werden alle Rechenoperationen der Äquivalenzumformung von Gleichungen verlangt.

3. *Binomische Formeln:*
Die Auflösung der drei binomischen Formeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ sowie $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ muss bekannt sein.

4. *Aufstellung einer Geradengleichung durch zwei vorgegebene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$:*
Bestimme zunächst die Steigung der Geraden mit $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Die allgemeine Gleichung der Geraden lautet $y = mx + b$.
Nachdem du m bestimmt hast, machst du eine Punktprobe mit einem der beiden vorgegebenen Punkte, damit kannst du dann b ausrechnen, z. Bsp.
$y_1 = mx_1 + b \quad | \quad -mx_1$
$b = y_1 - m \cdot x_1$
Selbstverständlich kannst du auch x_2 und y_2 verwenden.

5. *Parallele Geraden:*
Geraden sind dann parallel zueinander, wenn die beiden Steigungen m_1 und m_2 den gleichen Wert haben. Die Steigung ist immer die Zahl, die vor dem x in der Gleichung steht. Beispiel:
$y = \underset{m_1}{2}x + 1 \qquad y = \underset{m_2}{2}x + 3$
Beide Geraden haben die Steigung 2, also sind sie parallel zueinander.

6. *Parallelverschiebung von Geraden.*
Gegeben ist eine Gerade, z. Bsp. $y = 0{,}5x - 1$. Du sollst die Gleichung einer parallelen Geraden durch den Punkt $P(2|5)$ aufstellen.
Schreibe zunächst: $y = 0{,}5x + b$ und mache dann mit dem Punkt P die Punktprobe $5 = 0{,}5 \cdot 2 + b$. Hieraus kannst du b ausrechnen mit $b = 4$. Die parallele Gerade hat somit die Gleichung $y = 0{,}5x + 4$.

7. *Die allgemeine Gleichung der Parabel:*
Sie lautet $y = ax^2 + bx + c$. In $99\,\%$ aller Prüfungsaufgaben ist $a = 1$ bzw. $a = -1$. Da der Mathematiker $1 \cdot x^2$ bzw. $-1 \cdot x^2$ nicht schreibt, findest du nur die Schreibweise x^2 bzw. $-x^2$. In all diesen Fällen handelt es sich um einer Normalparabel. Wenn du eine Normalparabel in ein Koordinatensystem einzeichnen sollst, benötigst du keine Wertetabelle, für das Einzeichnen genügt deine Schablone.
Findest du nur x^2, so ist die Normalparabel nach oben geöffnet. Findest du hingegen $-x^2$, so ist die Normalparabel nach unten geöffnet.
Für die wenigen Fälle, in denen a nicht gleich 1 oder -1 ist, musst du wissen:
Liegt a zwischen 0 und 1, ist die Parabel nach oben geöffnet und ist breiter.
Liegt a zwischen -1 und 0, ist die Parabel nach unten geöffnet und ist breiter.
Ist a größer als 1, ist die Parabel nach oben geöffnet und ist schmäler.
Ist a kleiner als -1, ist die Parabel nach unten geöffnet und ist schmäler.

8. *Die Scheitelpunktgleichung einer Parabel:*
Sie lautet $y = (x - x_s)^2 + y_S$, wobei x_s für die x–Koordinate und y_s für die y–Koordinate des Scheitelpunkts steht. Der Scheitelpunkt ist immer der tiefste Punkt einer nach oben geöffneten, bzw. der höchste Punkt einer nach unten geöffneten Parabel.
Bei der x–Koordinate ist besondere Vorsicht geboten. Liest man diese aus der Scheitelpunktgleichung ab (x_s) und es steht ein Minus vor der Zahl, so ist die x–Koordinate des Scheitels positiv. Steht hingegen ein Plus vor der Zahl, so ist die x–Koordinate des Scheitels negativ.
Beispiel: Die Parabel mit der Gleichung $y = (x - 3)^2 + 1$ hat den Scheitel $S(3|1)$. Die Parabel mit der Gleichung $y = -(x + 1)^2 - 2$ hat den Scheitel $S(-1|-2)$ und ist zusätzlich, wegen des $-$ vor $(x + 1)^2$ nach unten geöffnet.

9. *Umformen der Scheitelpunktgleichung in die allgemeine Form:*
Aufstellen der allgemeinen Form der Parabelgleichung aus der Scheitelpunktgleichung:
Du musst das Binom auflösen und die entstehenden beiden Zahlen zusammenfassen.

Beispiel:	$y = (x - 3)^2 + 1$	|	binomische Formel auflösen
	$y = x^2 - 6x + 9 + 1$	|	Zahlen zusammenfassen
	$y = x^2 - 6x + 10$	|	dies ist die allgemeine Form.

10. *Umformen der allgemeinen Form in die Scheitelpunktgleichung:*
Aufstellen der Scheitelpunktgleichung aus der allgemeinen Form.
Die allgemeine Form ist über die quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform zu bringen.

Beispiel: $y = x^2 - 6x + 10$

Schreibe:	$y = (x -$	das Vorzeichen vor der Zahl bei x muss übernommen werden.
	$y = (x - 3)^2$	Teile die Zahl, die bei dem x steht durch 2 und schreibe sie hin, schließe die Klammer und schreibe ^{2}.
	$y = (x - 3)^2 - 9$	schreibe unmittelbar ein − hinter die Klammer und quadriere die Zahl, die du in die Klammer geschrieben hast.
	$y = (x - 3)^2 - 9 + 10$	schreibe noch die restliche Zahl aus der Ursprungsgleichung ab
	$y = (x - 3)^2 + 1$	und fasse zum Schluss noch die beiden Zahlen zusammen. Die Scheitelpunktgleichung ist fertig.

11. *Schnittpunktbestimmung mit der x–Achse (Nullstellen):*
Setze $y = 0$ und
Gerade:
Löse die Gleichung durch Äquivalenzumformung nach x auf.

Beispiel:	$y = 2x + 3$	$y = 0$
	$0 = 2x + 3$	-3
	$-3 = 2x$	$:2$
	$x = -1{,}5$	Die Gerade schneidet die x–Achse bei $x = -1{,}5$.

Parabel:
Löse die Gleichung mit der Mitternachtsformel nach x auf.

Beispiel:	$y = x^2 - 6x + 5$	$y = 0$
	$x^2 - 6x + 5 = 0$	p/q-Formel
	$x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{9 - 5} = +3 \pm \sqrt{4}$	
	$x_{1,2} = +3 \pm 2$	
	$x_1 = 5;\ \ x_2 = 1$	Die Parabel schneidet die x–Achse bei $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$.

12. *Schnittpunktbestimmung mit der y-Achse:*
Setze $x = 0$ und
Gerade und Parabel:
Löse die Gleichung durch Äquivalenzumformung nach y auf.
Beispiel Gerade:

$y = 2x + 3$	$x = 0$
$y = 2 \cdot 0 + 3$	
$y = 3$	die Gerade schneidet die y–Achse in $S_y(0\|3)$

Beispiel Parabel:

$y = (x - 3)^2 + 1$	$x = 0$
$y = (0 - 3)^2 + 1$	
$y = 9 + 1$	
$y = 10$	die Parabel schneidet die y–Achse in $S_y(0\|10)$

13. *Schnittpunkt Gerade/Parabel bzw. Parabel/Parabel:*
Schnittpunktbestimmung erfolgt über Gleichsetzung.
Beispiel Gerade/Parabel.

Gerade:	$y = 4x + 3$	
Parabel	$y = x^2 - 6x + 12$	Gleichsetzung
	$4x + 3 = x^2 - 6x + 12$	$-4x;\ -3$
	$x^2 - 10x + 9 = 0$	p/q-Formel
	$x_{1,2} = +5 \pm \sqrt{25 - 9}$	
	$x_{1,2} = +5 \pm \sqrt{16}$	
	$x_{1,2} = +5 \pm 4$	
	$x_1 = 9;\ \ x_2 = 1$	

Zu Schnittpunkten unter Kurven gehört auch eine y–Koordinate.
Berechnung derselben durch Einsetzen der beiden x–Werte in eine der Ausgangsgleichungen.

$$y_1 = 4x_1 + 3 \qquad y_2 = 4x_2 + 3$$
$$y_1 = 4 \cdot 9 + 3 \qquad y_2 = 4 \cdot 1 + 3$$
$$y_1 = 39 \qquad y_2 = 7$$

Die beiden Schnittpunkte sind $P(9|39)$ und $Q(1|7)$.

14. *Verschiebung einer Parabel in x–Richtung und y–Richtung:*
Bei gegebener Scheitelpunktgleichung der Parabel:
Berechne den neuen Scheitelpunkt und ändere die Werte in der Scheitelpunktgleichung auf den neuen Scheitelpunkt ab.
Beispiel:

$y = (x-3)^2 + 1$	Verschiebe die Parabel um vier
$S(3\|1)$	Stellen nach links und um zwei
	Stellen nach unten.
$S(3-4\|1)$	vier Stellen nach links
$S(-1\|1-2)$	zwei Stellen nach unten
$S(-1\|-1)$	neuer Scheitel
$y = (x+1)^2 - 1$	Gleichung der verschobenen Parabel

Bei gegebener allgemeinen Form der Parabelgleichung:
Stelle die allgemeine Form zunächst um in die Scheitelpunktform und verfahre dann wie im Beispiel zuvor.
Beispiel:

$y = x^2 - 6x + 10$	Umstellung in Scheitelpunktform
$y = (x-3)^2 + 1$	siehe 10.

Weiter wie im Beispiel zuvor.

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Gegeben sei eine Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 3x - 1{,}75$. Zeichnen Sie das Schaubild der Parabel.
Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse.
Der Scheitelpunkt der Parabel und die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse bilden zusammen mit dem Punkt $P(1{,}5|6{,}5)$ ein Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Aufgabe A2

Die Parabel p wird durch die Gleichung $y = x^2 - 8x + 12{,}5$ festgelegt. Die Gerade g wird durch die Gleichung $y = -2x + 7{,}5$ festgelegt.
Eine zweite Gerade h verläuft parallel zu g und schneidet die Parabel p im Scheitelpunkt S. Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse. Lösung: $x_0 = 2{,}25$

Aufgabe A3

Die Gerade g verläuft durch Punkt $P_1(5|-1{,}5)$. Sie schneidet die y-Achse im Punkt $P_2(0|6)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden.
Die Gerade g wird im Punkt $P_3(-1|7{,}5)$ von der Parabel p geschnitten. p hat die Gleichung $y = x^2 + bx + 2{,}5$. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Parabel.
Zeichnen Sie die Schaubilder der Geraden und der Parabel in ein Koordinatensystem. Lösung: g: $y = -1{,}5x + 6$
p: $y = x^2 - 4x + 2{,}5$

Aufgabe A4

Eine nach oben geöffnete Normalparabel besitzt den Scheitelpunkt $S(-1{,}5|3)$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel die x-Achse nicht schneidet. Ermitteln Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse.
Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte $P_1(-1{,}5|6)$ und $P_2(-0{,}5|7)$ auf der Parabel liegen. Lösung: $P_1 \notin$ Parabel, $P_2 \notin$ Parabel.

Aufgabe A5

Eine Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$. Parabel p_2 wird durch die Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ bestimmt.
Ermitteln Sie die Schnittpunkte P_1 und P_2 der beiden Parabeln rechnerisch.
Durch die Schnittpunkte P_1 und P_2 verläuft eine Gerade g. Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden.
Zeichnen Sie die Schaubilder der beiden Parabeln und der Geraden in ein Koordinatensystem. Lösung: Schnittpunkte $P(0|-2)$; $Q(4|6)$
g: $y = 2x - 2$

Aufgabe A6

Die nach oben geöffnete Normalparabel p verläuft durch die Punkte $A(-6{,}5|4)$ und $B(-2|-2{,}75)$. Gerade g hat die Steigung $m = 1$. Sie verläuft durch den Punkt $C(-7|-2{,}5)$.
Ermitteln Sie rechnerisch den Scheitelpunkt S der Parabel und die Gleichung der Geraden. Zeichnen Sie die Schaubilder in ein Koordinatensystem.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 von Parabel und Gerade. Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten P_1 und P_2.

Lösung: Scheitel $S(-3{,}5|-5)$
$g\colon\ y = x + 4{,}5$
$P_1(-1{,}5|3)$; $P_2(-6{,}5|-2)$
$\overline{P_1P_2} \approx 7{,}1\ LE$

Aufgabe A7

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(2|-5)$. Durch die gemeinsamen Punkte der beiden Parabeln verläuft eine Gerade. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden rechnerisch.
Berechnen Sie die Winkel, unter denen die Gerade die x–Achse schneidet.

Lösung: $g\colon y = -2x + 2$
$\alpha = 116{,}6°$

Aufgabe A8

Von einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 sind die Schnittpunkte mit der x–Achse $N_1(1|0)$ und $N_2(5|0)$ bekannt.
Durch den Scheitelpunkt der Parabel p_1 verläuft die Gerade g mit der Steigung $m = -1$.
Auf dieser Geraden liegt der Scheitelpunkt einer zweiten nach oben geöffneten Normalparabel, die mit der x–Achse nur einen gemeinsamen Punkt hat. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Parabeln.

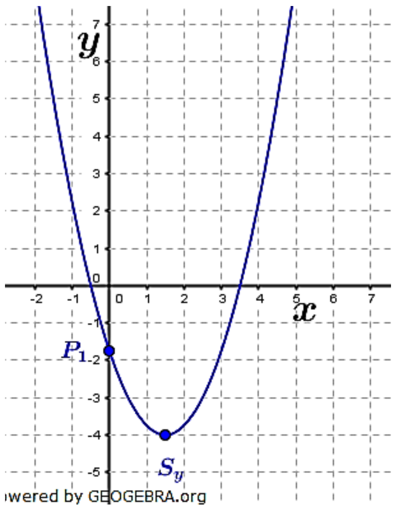
Lösung: $P(0{,}5|2{,}25)$

Lösung A1

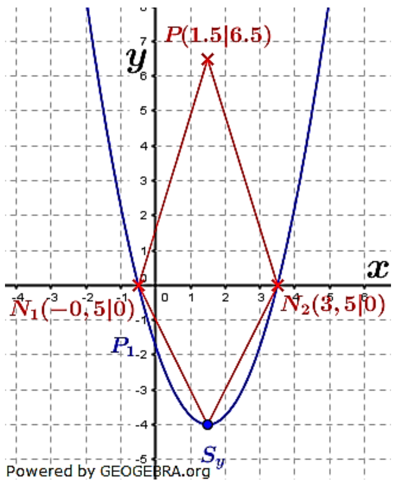
Detaillierte Lösung:

Lösungsschritte:

1. An der Parabelgleichung ist ersichtlich, dass es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel handelt, die in positiver x-Richtung verschoben ist und die die y-Achse im Punkt $S_y(0|-1{,}75)$ schneidet. Da es eine Normalparabel ist, kann sie mit der Schablone gezeichnet werden. Hierzu benötigst du allerdings den Scheitelpunkt. Die gegebene Funktion muss somit in die Scheitelpunktgleichung überführt werden.
   $y = x^2 - 3x - 1{,}75 \implies y = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 1{,}75$
   $y = (x-1{,}5)^2 - 4$
   Scheitelpunkt der Parabel ist $S(1{,}5|-4)$
   Trage jetzt den Scheitelpunkt in ein Koordinatensystem ein, lege deine Schablone im Scheitelpunkt an und zeichne die Parabel.



2. Schnittpunkte mit der x–Achse:
   Setze $y = 0$ und löse die Gleichung nach x auf.
   $x^2 - 3x - 1{,}75 = 0$ | p/q-Formel
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 1{,}75}$
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{4}$
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm 2$
   $x_1 = 3{,}5; \quad x_2 = -0{,}5$
   Die Parabel schneidet die x–Achse in $x_1 = 3{,}5$ und $x_2 = -0{,}5$.
3. Zeichne zuerst die Situation in das Schaubild ein.
   Du erkennst, dass das entstandene Viereck ein Drachen ist. Die Flächenformel für einen Drachen lautet $A = \frac{1}{2}ef$ (siehe Formelsammlung), wobei e und f die beiden Diagonalen sind. e ist dabei die Strecke zwischen N_1 und N_2, f die Strecke zwischen P und S_y.
   $e = 0{,}5 + 3{,}5 = 4$ und $f = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$. Die Fläche des Vierecks beträgt somit $A = \frac{1}{2} * 4 * 10{,}5 = 21\,FE$.



Lösung A2

Lösungslogik

Benötigt wird die Gleichung der Geraden h durch den Scheitelpunkt der Parabel. Die Parabel liegt nicht in der Scheitelpunktgleichung vor, also musst du diese als erstes bilden.
Mit diesem Scheitelpunkt und der Steigung der Geraden g mit $m = -2$ stellst du dann die Geradengleichung von h auf. Deren Schnittpunkt mit der x–Achse erhältst du, indem du y auf Null setzt und die Gleichung dann nach x auflöst.

Klausuraufschrieb

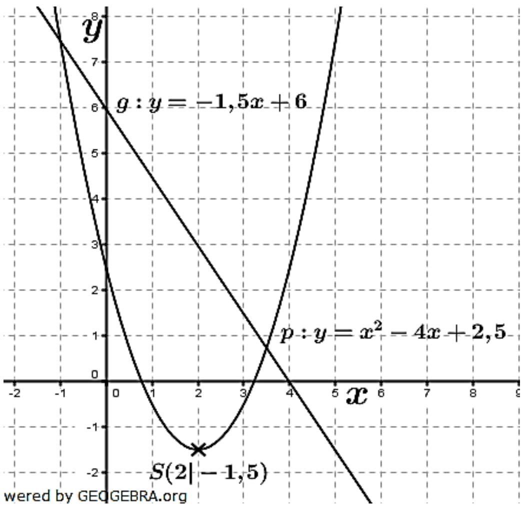
p:	$y = x^2 - 8x + 12{,}5$	Scheitelpunktgleichung aufstellen
	$y = (x-4)^2 - 16 + 12{,}5$	
	$y = (x-4)^2 - 3{,}5$	
	$S(4\|-3{,}5)$	Scheitelpunkt der Parabel
h:	$y = mx + b$	$h \parallel g \Rightarrow m = -2$
	$y = -2x + b$	Punktprobe mit $S(4\|-3{,}5)$
	$-3{,}5 = -2 \cdot 4 + b$	$+8$
	$b = 4{,}5$	
h:	$y = -2x + 4{,}5$	Schnittpunkt mit der x–Achse: $y = 0$
	$0 = -2x + 4{,}5$	$-4{,}5$
	$-4{,}5 = -2x$	$:(-2)$
	$x = 2{,}25$	

Die Gerade h schneidet die x–Achse bei $x = 2{,}25$.

Aufgabe A3

Lösungslogik

Aufstellung der Geradengleichung g über die gegebenen beiden Punkte P_1 und P_2.
Da die Gerade g die Parabel im Punkt P_3 schneidet, ist P_3 auch ein Punkt auf der Parabel. Die Punktprobe mit P_3 und der Parabel lässt dich dann das gesuchte b bestimmen.
Für die Anfertigung des Schaubildes musst du dann die Parabelgleichung noch in die Scheitelpunktgleichung überführen, damit du mit der Schablone die Parabel einzeichnen kannst.



Klausuraufschrieb

Gleichung der Geraden g:

g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1{,}5)}{0-5} = -1{,}5$

Wegen $P_2(0|6)$ ist $b = 6$.

g: $y = -1{,}5x + 6$

Gleichung der Parabel p:

p:	$y = x^2 + bx + 2{,}5$	Punktprobe mit P_3
	$7{,}5 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2{,}5$	
	$7{,}5 = -b + 3{,}5$	$-3{,}5;\ \cdot(-1)$
	$b = -4$	

Einzeichnen in Koordinatensystem:

p: $y = x^2 - 4x + 2{,}5$ | Scheitelpunktgleichung aufstellen

$y = (x-2)^2 - 4 + 2{,}5$

$y = (x-2)^2 - 1{,}5$

$S(2|-1{,}5)$ | Scheitelpunkt der Parabel

Aufgabe A4

Lösungslogik

Mit dem gegebenen Scheitelpunkt die Scheitelpunktgleichung aufstellen und in die allgemeine Gleichung umformen.
Zum Nachweis, dass die Parabel die x–Achse nicht schneidet, setzt du y auf Null und wendest die Mitternachtsformel zur Berechnung von x an. Dabei stellst du fest, dass der Ausdruck unter der Wurzel kleiner ist als Null, d.h., die quadratische Gleichung hat keine Lösung, somit hat die Parabel keine Schnittpunkte mit der x–Achse.
Ob die Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel liegen, prüfst du mit einer Punktprobe.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p:

p: $y = (x - x_S)^2 + y_s$ | Scheitelpunktgleichung mit $S(-1{,}5|3)$ aufstellen

$y = (x+1{,}5)^2 + 3$ | allgemeine Parabelgleichung bilden

$y = x^2 + 3x + 2{,}25 + 3$

Kein Schnittpunkt mit der x–Achse:

$y = x^2 + 3x + 5{,}25$ | Schnittpunkt mit der x-Achse über $y = 0$.

$x^2 + 3x + 5{,}25 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 5{,}25}$

$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{-3}$ | $\sqrt{-3}$ hat keine Lösung.

Wegen $\sqrt{-3}$ hat die Parabel keine Schnittpunkte mit der x–Achse.

P_1 und P_2 auf der Parabel?:

P_1: $6 = (-1{,}5 + 1{,}5)^2 + 3$ | Punktprobe mit P_1

$6 \neq 3$

Der Punkt P_1 liegt nicht auf der Parabel.

P_2: $7 = (-0{,}5 + 1{,}5)^2 + 3$ | Punktprobe mit P_2

$7 \neq 4$

Der Punkt P_2 liegt nicht auf der Parabel.

Lösung A5

Lösungslogik

Die Schnittpunkte der beiden Parabeln ermittelst du durch Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen und Auflösen der entstehenden quadratischen Gleichung nach x. Mit den erhaltenen x–Werten errechnest du noch über eine der beiden Parabelgleichungen die zugehörenden y–Werte und erhältst somit die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.
Über die beiden Schnittpunkte bestimmst du anschließend rechnerisch die Gleichung der Geraden.
Um die Parabeln in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, werden diese zum Schluss noch in die Scheitelpunktgleichung überführt.

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte der beiden Parabeln:

p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

p_2: $y = x^2 - 2x - 2$ | Gleichsetzen

$p_1 \cap p_1$: $x^2 - 2x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2$ | $-\frac{1}{2}x^2;\ +2$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ | x ausklammern

$x \cdot (0{,}5x - 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$0{,}5x_2 - 2 = 0 \Longrightarrow \quad x_2 = 4$

$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 = -2$

$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 = 6$

Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P(0|-2)$ und $Q(4|6)$.

Gleichung der Geraden g durch P und Q:

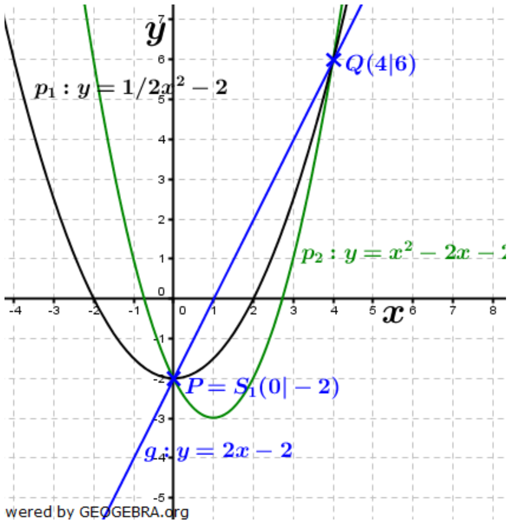
g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{4-0} = 2$

$y = 2x + b$

Wegen $P(0|-2)$ ist $b = -2$

$y = 2x - 2$



Scheitelpunkte der Parabeln:

p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $S_1(0|-2)$

p_2: $y = x^2 - 2x - 2$

$y = (x-1)^2 - 1 - 2$

$S_2(1|-3)$

Lösung A6

Lösungslogik

Mit einer Punktprobe von A und B mit der allgemeinen Form der Normalparabel erhältst du ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, worüber du die Parabelgleichung aufstellen kannst, die dann noch in die Scheitelpunktgleichung überführt werden muss.

Mit der gegebenen Steigung $m = 1$ der Geraden und Punkt C kannst du die Geradengleichung aufstellen.

Durch Gleichsetzung von Geraden- und Parabelgleichung ermittelst du die Punkte P_1 und P_2, deren Abstand dann mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden kann.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung durch A und B:

p: $y = x^2 + px + q$ | Punktprobe mit A und B.

(1) $4 = (-6{,}5)^2 - 6{,}5p + q$

(2) $-2{,}75 = (-2)^2 - 2p + q$

(1) $4 = 42{,}25 - 6{,}5p + q$

(2) $-2{,}75 = 4 - 2p + q$ | Subtraktionsverfahren

(1)-(2) $6{,}75 = 38{,}25 - 4{,}5p$ | $-38{,}25$

$-31{,}50 = -4{,}5p$ | $:(-4{,}5)$

$p = 7$

$p \longrightarrow$ (2)

$-2{,}75 = 4 - 14 + q$ | $+10$

$q = 7{,}25$

p: $y = x^2 + 7x + 7{,}25$ | Parabelgleichung

Scheitelpunkt S der Parabel:

$y = (x + 3{,}5)^2 - 12{,}25 + 7{,}25$ | quadratische Ergänzung

$y = (x + 3{,}5)^2 - 5$

$S(-3{,}5|-5)$

Gerade g durch C mit $m = 1$:

g: $y = mx + b$ | Punktprobe mit C und $m = 1$

$-2{,}5 = 1 \cdot (-7) + b$ | $+7$

$b = 4{,}5$

g: $y = x + 4{,}5$

Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2:

$p \cap g$ $x^2 + 7x + 7{,}25 = x + 4{,}5$ | Gleichsetzung von Parabel und Gerade

$x^2 + 6x + 2{,}75 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 2{,}75}$

$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{6{,}25} = -4 \pm 2{,}5$

$x_1 = -1{,}5;\quad x_2 = -6{,}5$

$y_1 = x_1 + 4{,}5 = -1{,}5 + 4{,}5 = 3$

$y_2 = x_2 + 4{,}5 = -6{,}5 + 4{,}5 = -2$

$P_1(-1{,}5|3);\quad P_2(-6{,}5|-2)$

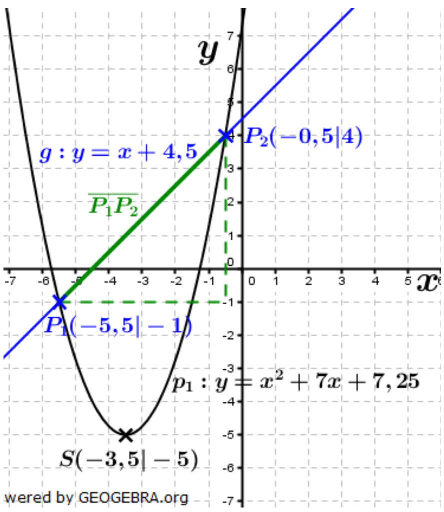
Abstand $\overline{P_1P_2}$:

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-6{,}5 - (-1{,}5))^2 + (-2 - 3)^2}$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

$\overline{P_1P_2} \approx 7{,}1\ LE$



Lösung A7

Lösungslogik

p_1 ist gegeben. Parabelgleichung p_2 als Scheitelpunktgleichung aufstellen und umstellen in die allgemeine Form.
Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen führt zu den Schnittpunkten.
Bestimmung der Geradengleichung durch die beiden Schnittpunkte.
Schnittwinkel der Geraden mit der x–Achse über die Umkehrfunktion des Tangens.

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte der beiden Parabeln:

p_1:	$y = -x^2 + 5$		
p_2:	$y = (x-2)^2 - 5$	|	Scheitelpunktgleichung
	$y = x^2 - 4x - 1$	|	allgemeine Form
$p_1 \cap p_2$	$x^2 - 4x - 1 = -x^2 + 5$	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
	$2x^2 - 4x - 6 = 0$	|	$:2$
	$x^2 - 2x - 3 = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$
$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$
$y_1 = -x_1^2 + 5 = -9 + 5 = -4$
$y_2 = -x_2^2 + 5 = -1 + 5 = 4$
$P_1(3|-4); \quad P_2(-1|4)$

Gleichung der Geraden g durch P_1 und P_2:

g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-4)}{-1-3} - 2$

$y = -2x + b$	|	Punktprobe mit P_1
$-4 = -2 \cdot 3 + b$	|	$+6$

$b = 2$
$y = -2x + 2$

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = m = -2$
$\alpha = tan^{-1}(-2)$
$\alpha = -63{,}43°$

Wegen $m = -2$ ist dies der Winkel, den die Gerade in Uhrzeigerrichtung mit der x–Achse einschließt. In der Mathematik wird der Schnittwinkel jedoch in Richtung gegen den Uhrzeigersinn angegeben. Somit ist der mathematische Schnittwinkel $\alpha^* = 180° + \alpha = 180° - 63{,}43° \approx 116{,}6°$

Lösung A8

Lösungslogik

p_1 wird über die beiden Schnittpunkte mit der x–Achse ermittelt und daraus die Scheitelpunktgleichung gebildet.
Durch den Scheitelpunkt und die gegebene Steigung $m = -1$ wird die Gleichung der Geraden g aufgestellt.
Der Scheitelpunkt der zweiten Parabel ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der x–Achse. Durch Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen wird der Schnittpunkt der beiden Parabeln ermittelt.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1 durch die Punkte N_1 und N_2:

p_1: $y = x^2 + bx + c$

(1) $0 = 1 + b + c$ | Punktprobe mit N_1

(2) $0 = 25 + 5b + c$ | Punktprobe mit N_2

(2)-(1) $0 = 24 + 4b$ | Subtraktionsverfahren; -24; $:4$

$b = -6$

$b \longrightarrow (1)$

$0 = 1 - 6 + c$ | $+5$

$c = 5$

p_1: $y = x^2 - 6x + 5$

$y = (x-3)^2 - 4$ | Scheitelpunktgleichung

$S(3|-4)$

Geradengleichung g durch S mit $m = 1$:

g: $y = mx + b$ | Geradengleichung

$-4 = -1 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $S(3|-4)$ und $m = -1$

$b = -1$

g: $y = -x - 1$

Schnittpunkt von g mit der x–Achse:

$0 = -x - 1$ | Schnittpunkt von g mit der x-Achse

$x = -1$

Parabelgleichung p_2 mit Scheitel in $S(-1|0)$:

p_2: $y = (x - x_S)^2 + y_s$

$y = (x+1)^2 + 0$

p_2: $y = x^2 + 2x + 1$

Schnittpunkt von p_1 und p_2:

$p_1 \cap p_2$ $x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$ | Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen

$-6x + 5 = 2x + 1$ | $-2x$; -5

$-8x = -4$ | $:(-8)$

$x = 0{,}5$

$x \longrightarrow p_2$

$y = x^2 + 2x + 1$

$y = 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 = 0{,}25 + 1 + 1 = 2{,}25$

p_1 schneidet p_2 in $P(0{,}5|2{,}25)$.