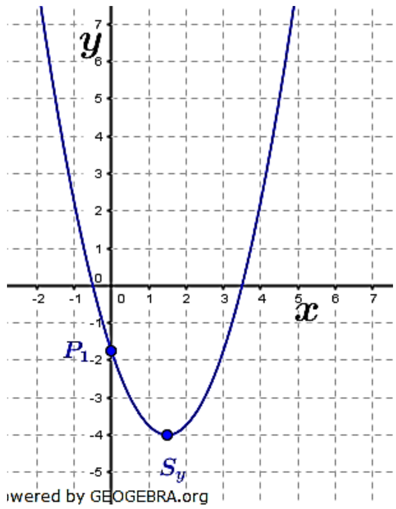
Lösung A1

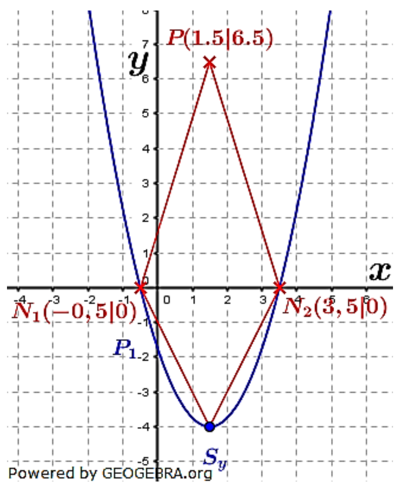
Detaillierte Lösung:

Lösungsschritte:

1. An der Parabelgleichung ist ersichtlich, dass es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel handelt, die in positiver x-Richtung verschoben ist und die die y-Achse im Punkt $S_y(0|-1{,}75)$ schneidet. Da es eine Normalparabel ist, kann sie mit der Schablone gezeichnet werden. Hierzu benötigst du allerdings den Scheitelpunkt. Die gegebene Funktion muss somit in die Scheitelpunktgleichung überführt werden.
   $y = x^2 - 3x - 1{,}75 \implies y = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 1{,}75$
   $y = (x-1{,}5)^2 - 4$
   Scheitelpunkt der Parabel ist $S(1{,}5|-4)$
   Trage jetzt den Scheitelpunkt in ein Koordinatensystem ein, lege deine Schablone im Scheitelpunkt an und zeichne die Parabel.



2. Schnittpunkte mit der x–Achse:
   Setze $y = 0$ und löse die Gleichung nach x auf.
   $x^2 - 3x - 1{,}75 = 0$ | p/q-Formel
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 1{,}75}$
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{4}$
   $x_{1,2} = 1{,}5 \pm 2$
   $x_1 = 3{,}5;\quad x_2 = -0{,}5$
   Die Parabel schneidet die x–Achse in $x_1 = 3{,}5$ und $x_2 = -0{,}5$.
3. Zeichne zuerst die Situation in das Schaubild ein.
   Du erkennst, dass das entstandene Viereck ein Drachen ist. Die Flächenformel für einen Drachen lautet $A = \frac{1}{2}ef$ (siehe Formelsammlung), wobei e und f die beiden Diagonalen sind. e ist dabei die Strecke zwischen N_1 und N_2, f die Strecke zwischen P und S_y.
   $e = 0{,}5 + 3{,}5 = 4$ und $f = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$. Die Fläche des Vierecks beträgt somit $A = \frac{1}{2} * 4 * 10{,}5 = 21\ FE$.



Lösung A2

Lösungslogik

Benötigt wird die Gleichung der Geraden h durch den Scheitelpunkt der Parabel. Die Parabel liegt nicht in der Scheitelpunktgleichung vor, also musst du diese als erstes bilden.
Mit diesem Scheitelpunkt und der Steigung der Geraden g mit $m = -2$ stellst du dann die Geradengleichung von h auf. Deren Schnittpunkt mit der x–Achse erhältst du, indem du y auf Null setzt und die Gleichung dann nach x auflöst.

Klausuraufschrieb

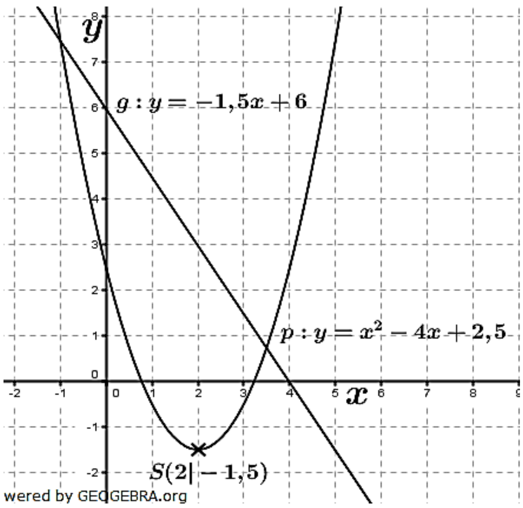
p:	$y = x^2 - 8x + 12{,}5$	|	Scheitelpunktgleichung aufstellen
	$y = (x-4)^2 - 16 + 12{,}5$		
	$y = (x-4)^2 - 3{,}5$		
	$S(4\|-3{,}5)$	|	Scheitelpunkt der Parabel
h:	$y = mx + b$	|	$h \parallel g \Rightarrow m = -2$
	$y = -2x + b$	|	Punktprobe mit $S(4\|-3{,}5)$
	$-3{,}5 = -2 \cdot 4 + b$	|	$+8$
	$b = 4{,}5$		
h:	$y = -2x + 4{,}5$	|	Schnittpunkt mit der x–Achse: $y = 0$
	$0 = -2x + 4{,}5$	|	$-4{,}5$
	$-4{,}5 = -2x$	|	$:(-2)$
	$x = 2{,}25$		

Die Gerade h schneidet die x–Achse bei $x = 2{,}25$.

Aufgabe A3

Lösungslogik

Aufstellung der Geradengleichung g über die gegebenen beiden Punkte P_1 und P_2. Da die Gerade g die Parabel im Punkt P_3 schneidet, ist P_3 auch ein Punkt auf der Parabel. Die Punktprobe mit P_3 und der Parabel lässt dich dann das gesuchte b bestimmen.
Für die Anfertigung des Schaubildes musst du dann die Parabelgleichung noch in die Scheitelpunktgleichung überführen, damit du mit der Schablone die Parabel einzeichnen kannst.



Klausuraufschrieb

Gleichung der Geraden g:

g: $\quad y = mx + b$

$\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1{,}5)}{0-5} = -1{,}5$

$\quad$ Wegen $P_2(0|6)$ ist $b = 6$.

g: $\quad y = -1{,}5x + 6$

Gleichung der Parabel p:

p:	$y = x^2 + bx + 2{,}5$	|	Punktprobe mit P_3
	$7{,}5 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2{,}5$		
	$7{,}5 = -b + 3{,}5$	|	$-3{,}5;\ \cdot(-1)$
	$b = -4$		

Einzeichnen in Koordinatensystem:

p: $y = x^2 - 4x + 2{,}5$ | Scheitelpunktgleichung aufstellen
$y = (x-2)^2 - 4 + 2{,}5$
$y = (x-2)^2 - 1{,}5$
$S(2|-1{,}5)$ | Scheitelpunkt der Parabel

Aufgabe A4

<u>Lösungslogik</u>

Mit dem gegebenen Scheitelpunkt die Scheitelpunktgleichung aufstellen und in die allgemeine Gleichung umformen.
Zum Nachweis, dass die Parabel die x–Achse nicht schneidet, setzt du y auf Null und wendest die Mitternachtsformel zur Berechnung von x an. Dabei stellst du fest, dass der Ausdruck unter der Wurzel kleiner ist als Null, d.h., die quadratische Gleichung hat keine Lösung, somit hat die Parabel keine Schnittpunkte mit der x–Achse.
Ob die Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel liegen, prüfst du mit einer Punktprobe.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Funktionsgleichung der Parabel p:

p: $y = (x - x_S)^2 + y_s$ | Scheitelpunktgleichung mit $S(-1{,}5|3)$ aufstellen
$y = (x + 1{,}5)^2 + 3$ | allgemeine Parabelgleichung bilden
$y = x^2 + 3x + 2{,}25 + 3$

Kein Schnittpunkt mit der x–Achse:

$y = x^2 + 3x + 5{,}25$ | Schnittpunkt mit der x-Achse über $y = 0$.
$x^2 + 3x + 5{,}25 = 0$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 5{,}25}$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{-3}$ | $\sqrt{-3}$ hat keine Lösung.
Wegen $\sqrt{-3}$ hat die Parabel keine Schnittpunkte mit der x–Achse.

P_1 und P_2 auf der Parabel?:

P_1: $6 = (-1{,}5 + 1{,}5)^2 + 3$ | Punktprobe mit P_1
$6 \neq 3$
Der Punkt P_1 liegt nicht auf der Parabel.

P_2: $7 = (-0{,}5 + 1{,}5)^2 + 3$ | Punktprobe mit P_2
$7 \neq 4$
Der Punkt P_2 liegt nicht auf der Parabel.

Lösung A5

<u>Lösungslogik</u>

Die Schnittpunkte der beiden Parabeln ermittelst du durch Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen und Auflösen der entstehenden quadratischen Gleichung nach x. Mit den erhaltenen x–Werten errechnest du noch über eine der beiden Parabelgleichungen die zugehörenden y–Werte und erhältst somit die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.
Über die beiden Schnittpunkte bestimmst du anschließend rechnerisch die Gleichung der Geraden.
Um die Parabeln in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, werden diese zum Schluss noch in die Scheitelpunktgleichung überführt.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Schnittpunkte der beiden Parabeln:

p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

p_2: $y = x^2 - 2x - 2$ | Gleichsetzen

$p_1 \cap p_1$: $x^2 - 2x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2$ | $-\frac{1}{2}x^2$; $+2$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ | x ausklammern

$x \cdot (0{,}5x - 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$0{,}5x_2 - 2 = 0 \Longrightarrow \quad x_2 = 4$

$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 = -2$

$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 = 6$

Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P(0|-2)$ und $Q(4|6)$.

Gleichung der Geraden g durch P und Q:

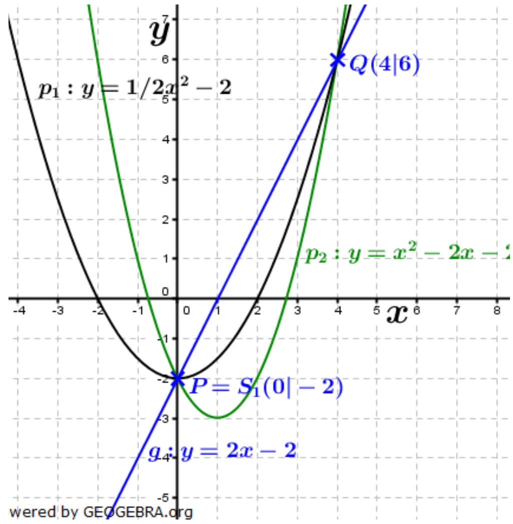
g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{4-0} = 2$

$y = 2x + b$

Wegen $P(0|-2)$ ist $b = -2$

$y = 2x - 2$



Scheitelpunkte der Parabeln:

p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $\qquad S_1(0|-2)$

p_2: $y = x^2 - 2x - 2$

$y = (x-1)^2 - 1 - 2$

$S_2(1|-3)$

Lösung A6

<u>Lösungslogik</u>

Mit einer Punktprobe von A und B mit der allgemeinen Form der Normalparabel erhältst du ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, worüber du die Parabelgleichung aufstellen kannst, die dann noch in die Scheitelpunktgleichung überführt werden muss.

Mit der gegebenen Steigung $m = 1$ der Geraden und Punkt C kannst du die Geradengleichung aufstellen.

Durch Gleichsetzung von Geraden- und Parabelgleichung ermittelst du die Punkte P_1 und P_2, deren Abstand dann mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden kann.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung durch A und B:

p: $y = x^2 + px + q$ | Punktprobe mit A und B.

(1) $4 = (-6{,}5)^2 - 6{,}5p + q$

(2) $-2{,}75 = (-2)^2 - 2p + q$

(1) $4 = 42{,}25 - 6{,}5p + q$

(2) $-2{,}75 = 4 - 2p + q$ | Subtraktionsverfahren

(1)-(2) $6{,}75 = 38{,}25 - 4{,}5p$ | $-38{,}25$

$-31{,}50 = -4{,}5p$ | $:(-4{,}5)$

$p = 7$

$p \longrightarrow$ (2)

$-2{,}75 = 4 - 14 + q$ | $+10$

$q = 7{,}25$

p: $y = x^2 + 7x + 7{,}25$ | Parabelgleichung

Scheitelpunkt S der Parabel:

$y = (x + 3{,}5)^2 - 12{,}25 + 7{,}25$ | quadratische Ergänzung

$y = (x + 3{,}5)^2 - 5$

$S(-3{,}5| - 5)$

Gerade g durch C mit $m = 1$:

g: $y = mx + b$ | Punktprobe mit C und $m = 1$

$-2{,}5 = 1 \cdot (-7) + b$ | $+7$

$b = 4{,}5$

g: $y = x + 4{,}5$

Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2:

$p \cap g$ $x^2 + 7x + 7{,}25 = x + 4{,}5$ | Gleichsetzung von Parabel und Gerade

$x^2 + 6x + 2{,}75 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 2{,}75}$

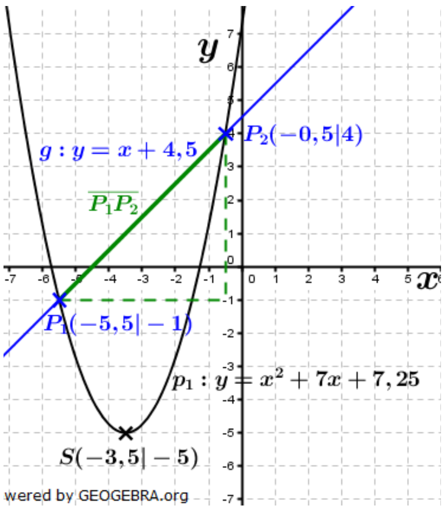
$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{6{,}25} = -4 \pm 2{,}5$

$x_1 = -1{,}5$; $x_2 = -6{,}5$

$y_1 = x_1 + 4{,}5 = -1{,}5 + 4{,}5 = 3$

$y_2 = x_2 + 4{,}5 = -6{,}5 + 4{,}5 = -2$

$P_1(-1{,}5|3)$; $P_2(-6{,}5| - 2)$



Abstand $\overline{P_1P_2}$:

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-6{,}5 - (-1{,}5)^2 + (-2 - 3)^2}$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

$\overline{P_1P_2} \approx 7{,}1\ LE$

Lösung A7

Lösungslogik

p_1 ist gegeben. Parabelgleichung p_2 als Scheitelpunktgleichung aufstellen und umstellen in die allgemeine Form.
Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen führt zu den Schnittpunkten.
Bestimmung der Geradengleichung durch die beiden Schnittpunkte.
Schnittwinkel der Geraden mit der x–Achse über die Umkehrfunktion des Tangens.

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte der beiden Parabeln:

p_1:	$y = -x^2 + 5$	
p_2:	$y = (x-2)^2 - 5$	Scheitelpunktgleichung
	$y = x^2 - 4x - 1$	allgemeine Form
$p_1 \cap p_2$	$x^2 - 4x - 1 = -x^2 + 5$	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
	$2x^2 - 4x - 6 = 0$	$:2$
	$x^2 - 2x - 3 = 0$	p/q-Formel
	$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$	
	$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$	
	$y_1 = -x_1^2 + 5 = -9 + 5 = -4$	
	$y_2 = -x_2^2 + 5 = -1 + 5 = 4$	
	$P_1(3\vert-4); \quad P_2(-1\vert4)$	

Gleichung der Geraden g durch P_1 und P_2:

g:	$y = mx + b$	
	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-4)}{-1-3} - 2$	
	$y = -2x + b$	Punktprobe mit P_1
	$-4 = -2 \cdot 3 + b$	$+6$
	$b = 2$	
	$y = -2x + 2$	

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = m = -2$
$\alpha = tan^{-1}(-2)$
$\alpha = -63{,}43°$

Wegen $m = -2$ ist dies der Winkel, den die Gerade in Uhrzeigerrichtung mit der x–Achse einschließt. In der Mathematik wird der Schnittwinkel jedoch in Richtung gegen den Uhrzeigersinn angegeben. Somit ist der mathematische Schnittwinkel $\alpha^* = 180° + \alpha = 180° - 63{,}43° \approx 116{,}6°$

Lösung A8

Lösungslogik

p_1 wird über die beiden Schnittpunkte mit der x–Achse ermittelt und daraus die Scheitelpunktgleichung gebildet.
Durch den Scheitelpunkt und die gegebene Steigung $m = -1$ wird die Gleichung der Geraden g aufgestellt.
Der Scheitelpunkt der zweiten Parabel ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der x–Achse. Durch Gleichsetzung der beiden Parabelgleichungen wird der Schnittpunkt der beiden Parabeln ermittelt.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1 durch die Punkte N_1 und N_2:

p_1:	$y = x^2 + bx + c$	
(1)	$0 = 1 + b + c$	Punktprobe mit N_1
(2)	$0 = 25 + 5b + c$	Punktprobe mit N_2
(2)-(1)	$0 = 24 + 4b$	Subtraktionsverfahren; -24; $:4$
	$b = -6$	
$b \longrightarrow (1)$		
	$0 = 1 - 6 + c$	$+5$
	$c = 5$	
p_1:	$y = x^2 - 6x + 5$	
	$y = (x-3)^2 - 4$	Scheitelpunktgleichung
	$S(3 \mid -4)$	

Geradengleichung g durch S mit $m = 1$:

g:	$y = mx + b$	Geradengleichung
	$-4 = -1 \cdot 3 + b$	Punktprobe mit $S(3 \mid -4)$ und $m = -1$
	$b = -1$	
g:	$y = -x - 1$	

Schnittpunkt von g mit der x–Achse:

	$0 = -x - 1$	Schnittpunkt von g mit der x-Achse
	$x = -1$	

Parabelgleichung p_2 mit Scheitel in $S(-1 \mid 0)$:

p_2:	$y = (x - x_S)^2 + y_S$	
	$y = (x+1)^2 + 0$	
p_2:	$y = x^2 + 2x + 1$	

Schnittpunkt von p_1 und p_2:

$p_1 \cap p_2$	$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$	Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen
	$-6x + 5 = 2x + 1$	$-2x$; -5
	$-8x = -4$	$:(-8)$
	$x = 0{,}5$	
$x \longrightarrow p_2$		
	$y = x^2 + 2x + 1$	
	$y = 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 = 0{,}25 + 1 + 1 = 2{,}25$	

p_1 schneidet p_2 in $P(0{,}5 \mid 2{,}25)$.