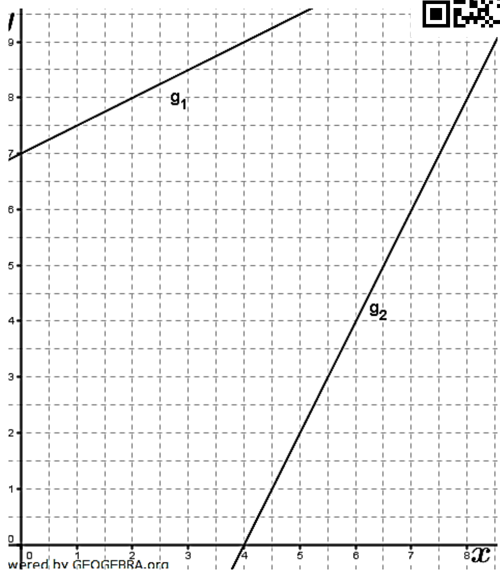
Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) *(Wahlteil)* *2010-2013*
Dokument mit 11 Aufgaben

Aufgabe W3a/2010

Im Schaubild sind die Geraden g_1 und g_2 dargestellt.
Entnehmen Sie zur Bestimmung ihrer Gleichungen geeignete Werte.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P von g_1 und g_2.
Die Punkte P und $Q(2|-4)$ liegen auf einer nach oben geöffneten Normalparabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel.

Lösung: $P(10|12)$; $S(5|-13)$



Aufgabe W3b/2010

Gegeben sind die beiden Parabeln:

p_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

p_2: $y = x^2 - 1$

Die beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten P und Q.
Die Punkte P und Q bilden zusammen mit den Scheitelpunkten S_1 und S_2 das Viereck S_1PS_2Q.
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
Begründen Sie, weshalb das Viereck S_1PS_2Q ein Drachenviereck ist.

Lösung: $A = 12\ FE$
Begründung siehe Lösungsteil

Aufgabe W3a/2011

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(1|5)$ und $B(6|10)$. Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 + 2$.
Besitzen die beiden Parabeln gemeinsame Punkte? Überprüfen Sie durch Rechnung.
Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat.

Lösung: keine gemeinsamen Punkte z. B.:
g: $y = -x + 3$ (andere Lösungen möglich)

Aufgabe W3b/2011
Die Parabel p mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2. Die Gerade g verläuft durch den rechten Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse und hat die Steigung $m = -2$.
Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Parabel p.
Die Punkte N_1 und N_2 sowie der Punkt Q bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
Der Punkt Q bewegt sich jetzt oberhalb der x-Achse auf der Parabel p. Für welche Lage von Q wird der Flächeninhalt des Dreiecks am größten?

Lösung: $Q(1|4)$; $A = 12\ FE$; $Q(0|4{,}5)$

Aufgabe W4b/2011
Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(-3|-2)$.
Die Parabel mit dem Scheitelpunkt S_2 hat die Gleichung $y = x^2 - 4x + 7$. Der Schnittpunkte der beiden Parabeln heißt R.
Günter behauptet: „Einer der beiden Winkel des Dreiecks S_1S_2R ist stumpf.
Hat er recht? Begründen Sie.

Lösung: Der Winkel S_1S_2R hat $108{,}43\,°$, ist also stumpf.

Aufgabe W3a/2012
Die Parabel p_1 mit dem Scheitel S_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 7{,}5$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -x + 1{,}5$.
Durch die beiden Schnittpunkte P und Q von p_1 und g verläuft die verschobene und nach oben geöffnete Normalparabel p_2.
Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck S_1PS_2Q ein Parallelogramm ist.

Lösung: $S_1(0|7{,}5)$; $S_2(1|-5{,}5)$; $P(-2|3{,}5)$; $Q(3|-1{,}5)$
$\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$; $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$ damit S_1PS_2Q ist ein Parallelogramm

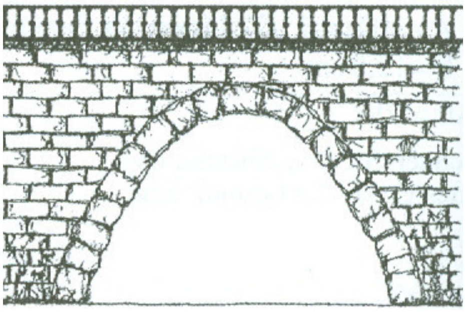
Aufgabe W3b/2012
Der Punkt $P(3|12)$ liegt auf einer nach oben geöffneten Normalparabel p. Die Parabel hat als Symmetrieachse die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $A(-1|0)$.
Sie schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 (mit $x < 0$) und N_2.
Der Parabelpunkt $R(0|y_R)$ sowie die Punkte P und N_1 bilden das Dreieck RPN_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks RPN_1.

Lösung: $A_{RPN_1} = 27\ FE$

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) *(Wahlteil)* *2010-2013*

Aufgabe W4b/2012

Ein Brückenbogen überspannt eine Fahrbahn und hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$.
Die Höhe des Bogens beträgt $5{,}80\ m$. Auf Fahrbahnhöhe ist der Brückenbogen $8{,}80\ m$ breit.
Erstellen Sie die Gleichung der zugehörigen Parabel.
Ein landwirtschaftliches Fahrzeug ist $3{,}20\ m$ breit und $4{,}60\ m$ hoch. Kann das Fahrzeug durchfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.



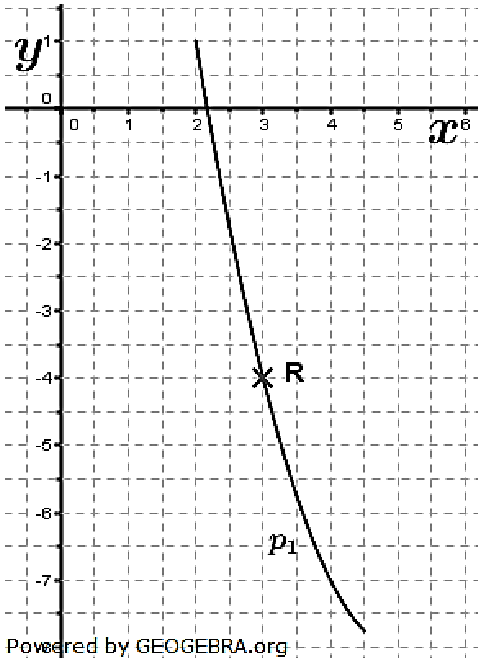
Lösung: $p\colon\ y = -0{,}3x^2 + 5{,}8$
Das Fahrzeug kann durchfahren.

Aufgabe W3a/2013

Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p_1.
Der Punkt R liegt auf p_1.
Die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle gehört zur Normalparabel p_1.

x	3	4	5	6	7	8	9
y					-4		

Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an und füllen Sie die Wertetabelle vollständig aus.
Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 - 4$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die beiden Parabeln keinen gemeinsamen Punkt haben.
Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die keinen gemeinsamen Punkt mit beiden Parabeln hat.



Lösung: $p_1\colon\ y = x^2 - 10x + 17$
$g\colon\ y = -2x$ (andere möglich)

Aufgabe W3b/2013

Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete und verschobenen Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(3|-4)$.
Der Scheitel S_1 von p_1 sowie die Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_2 mit der x–Achse bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$.
Eine Gerade g geht durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln und teilt somit die Fläche des Dreiecks.
Überprüfen Sie, ob die Gerade g die Fläche des Dreiecks $N_1N_2S_1$ halbiert.

Lösung: $A_{S_1N_1N_2} = 10\ FE$
Die Gerade halbiert die Fläche nicht.

Aufgabe W4b/2013

Die Grafik zeigt die Lanxess Arena in Köln.
Sie wird von einem parabelförmigen Bogen überspannt. Dieser lässt sich mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben.
Der Bogen hat am Boden eine Spannweite von $190\,m$. Die maximale Höhe des Bogens beträgt $76\,m$ über dem Boden. Geben Sie eine Gleichung der zugehörigen Parabel an.
An einem Punkt P des Bogens, der sich in $50\,m$ Höhe befindet, soll eine Befestigung angebracht werden.
Wie weit ist dieser Punkt P vom höchsten Punkt des Bogens entfernt?

Lösung: $p\colon\ y = -\frac{4}{475}x^2 + 76;\quad \overline{PS} = 61{,}35\,m$

Lösung W3a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Geradengleichungen g_1 und g_2.
Schnittpunktberechnung von P durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Parabelgleichung p durch die Punkte P und Q.
Umstellung der allgemeinen Parabelgleichung in die Scheitelpunktgleichung.

Klausuraufschrieb

Geradengleichung g_1:

g_1: $y = mx + b$
$m = 0{,}5;\ b = 7$ | aus Zeichnung abgelesen
$y = 0{,}5x + 7$

Geradengleichung g_2:

g_2: $y = m(x - x_0)$
$m = 2;\ x_0 = 4$ | aus Zeichnung
$y = 2(x - 4)$

Schnittpunkt von g_1 mit g_2:

$g_1 \cap g_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung
$0{,}5x + 7 = 2x - 8$ | $-0{,}5x\ -7$
$1{,}5x = 15$ | $:1{,}5$
$x = 10$
$x \longrightarrow g_1$
$y = 0{,}5 \cdot 10 + 7 = 12$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $P(10|12)$.

Funktionsgleichung von p durch P und Q:

p: $y = x^2 + px + q$
(1) $12 = 10^2 + 10p + q$ | Punktprobe mit $P(10|12)$
(2) $-4 = 2^2 + 2p + q$ | Punktprobe mit $Q(2|-4)$
(1)-(2) $16 = 96 + 8p$ | $-96;\ :8$
$p = -10$
$p \longrightarrow (2)$
$-4 = 4 - 20 + q$
$q = 12$
p: $y = x^2 - 10x + 12$ | allgemeine Parabelgleichung
$y = (x - 5)^2 - 13$ | Scheitelpunktgleichung

Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $S(5|-13)$.

Lösung W3b/2010

Lösungslogik

Berechnung der Schnittpunkte durch Gleichsetzung.
Bestimmung der Scheitelpunkte von p_1 und p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung der Fläche des Vierecks S_1PS_2Q.

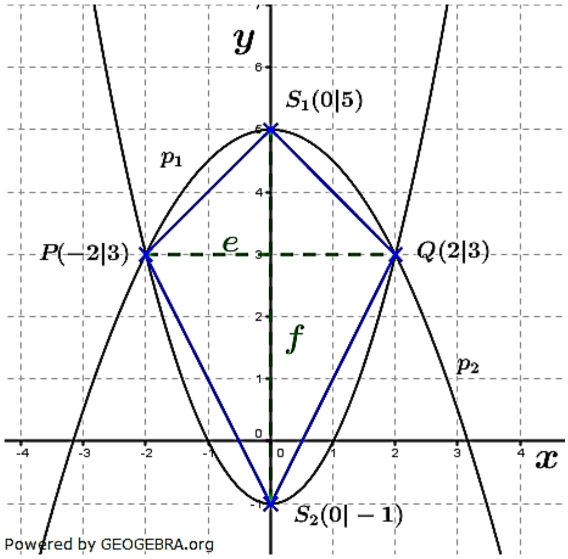
Klausuraufschrieb

p_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

p_2: $y = x^2 - 1$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$-\frac{1}{2}x^2 + 5 = x^2 - 1$	|	$+\frac{1}{2}x^2$; -5
$1{,}5x^2 = 6$	|	$:1{,}5$
$x^2 = 4$		
$x_{1,2} = \pm 2$		
$y_1 = 2^2 - 1 = 3$		
$y_2 = (-2)^2 - 1 = 3$		



Die Schnittpunkte von p_1 mit p_2 sind $P(-2|3)$ und $Q(2|3)$.

Scheitelpunkte von p_1 und p_2:

S_1: $S_1(0|5)$ (in x–Richtung unverschoben)

S_2: $S_2(0|-1)$ (in x–Richtung unverschoben)

Fläche Viereck S_1PS_2Q:

$A_{S_1PS_2Q}$: $A_{S_1PS_2Q} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$e = 4;\ \ f = 6$

$A_{S_1PS_2Q} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12\ FE$

Das Viereck hat eine Fläche von $12\ FE$.

Begründung für Drachenviereck:

p_1 und p_2 sind in x–Richtung nicht verschoben. Dadurch ist die y–Achse Symmetrieachse und die Strecke $\overline{S_1S_2} = f$ eine Diagonale des Vierecks. Infolge der Symmetrie sind die Strecken $\overline{PS_1}$ und $\overline{QS_1}$ sowie $\overline{PS_2}$ und $\overline{QS_2}$ gleich lang. Weiterhin ist $\overline{PQ} = e$ senkrecht f die andere Diagonale des Vierecks. Das Viereck ist also ein Drachenviereck.

Lösung W3a/2011

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die Punkte A und B.
Untersuchung auf Schnittpunkte durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Aufstellung einer Geradengleichung g, die weder p_1 noch p_2 schneidet.

Klausuraufschrieb

p_2: $y = -x^2 + 2$

Funktionsgleichung von p_1 durch A und B:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1)	$5 = 1 + p + q$	|	Punktprobe mit $A(1|5)$
(2)	$10 = 36 + 6p + q$	|	Punktprobe mit $B(6|10)$
(1)-(2)	$-5 = -35 - 5p$		
	$5p = -30$	|	$:5$
	$p = -6$		

$p \longrightarrow (1)$

$5 = 1 - 6 + q$ | $+5$

$q = 10$

p_1: $y = x^2 - 6x + 10$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

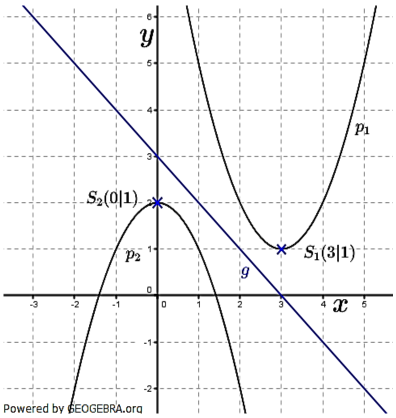
$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 2$ | $+x^2; -2$

$2x^2 - 6x + 8 = 0$ | $:2$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75}$



Wegen $\sqrt{-1{,}75}$ ist die Gleichung nicht lösbar, p_1 und p_2 haben keine gemeinsamen Punkte.

Geradengleichung g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Wie aus der Graphik ersichtlich, muss die Gerade zwischen den beiden Parabeln hindurch verlaufen. Dies ist beispielsweise für $m = -1$ und $b = 3$ der Fall.

g: $y = -x + 3$ *(andere Lösungen denkbar)*

Lösung W3b/2011

Lösungslogik

Berechnung der Koordinaten von N_1 und N_2 als Nullstellen von p durch Setzen von y auf 0.
Aufstellung der Geradengleichung g mit $m = -2$ durch die rechte Nullstelle von p.
Berechnung von Q durch Gleichsetzung von p mit g.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks N_1N_2Q.
Untersuchung und Bestimmung der Lage von Q für maximalen Inhalt des Dreiecks N_1N_2Q.

Klausuraufschrieb

Nullstellen von p:

p: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ | Schnittpunkte mit der x–Achse über $y = 0$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5.$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

$N_1(-3|0)$; $N_2(3|0)$ | N_2 somit rechte Nullstelle

Geradengleichung g durch N_2 mit $m = -2$:

g: $y = -2x + b$

$0 = -2 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $N_2(3|0)$

$b = 6$

g: $y = -2x + 6$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5 = -2x + 6$ | $+2x;\ -6$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1{,}5 = 0$ | $\cdot(-2)$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ | p/q-Formel

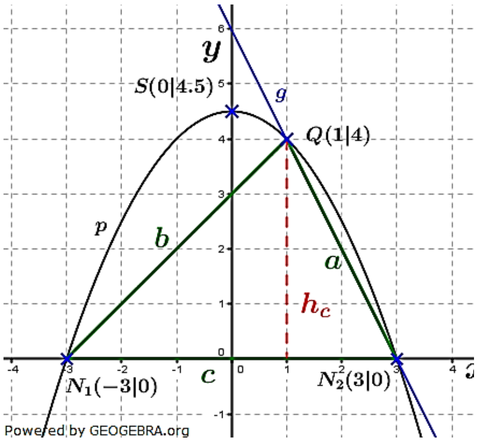
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 3;\quad x_2 = 1$

$x_2 \longrightarrow g$:

$y_2 = -2 \cdot 1 + 6 = 4$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $Q(1|4)$.



Fläche des Dreiecks N_1N_2Q:

$A_{N_1N_2Q}$: $A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 6;\ \ h_c = 4$

$A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\ FE$

Das Dreieck N_1N_2Q hat einen Flächeninhalt von $12\ FE$.

Lage von Q für maximalen Flächeninhalt:

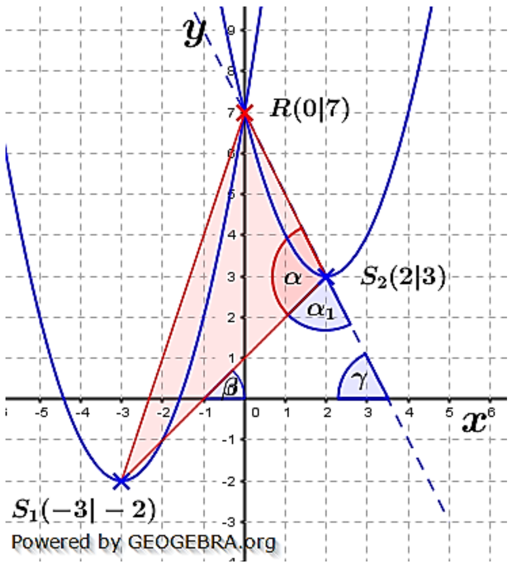
Die Basis c des Dreiecks bleibt unverändert. Sein Flächeninhalt wird somit durch die Länge der Höhe h_c bestimmt. h_c ist dann am größten, wenn Q in den Scheitel S wandert.

Für $Q(0|4{,}5)$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2Q maximal.

Lösung W4b/2011

Lösungslogik

Wir stellen die Scheitelpunktgleichung der Parabel p_1 auf und formen diese um in die allgemeine Form der Parabel.
Wir bestimmen den Scheitelpunkt von p_2.
Wir zeichnen die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem und verbinden die Punkte S_1, S_2 und R zu einem Dreieck.
Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass der stumpfe Winkel bei S_2 liegt.
Wir berechnen β über den tan.
Wir berechnen γ über den tan.
Wir berechnen α_1 über die Winkelsumme im Dreieck.
Wir berechnen α über $180° - \alpha\_1$.



Klausuraufschrieb

Parabelgleichung von p_1:

p_1: $y = (x+3)^2 - 2$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_1(-3|-2)$

$y = x^2 + 6x + 7$ | allgemeine Gleichung von p_1

Scheitelpunkt von p_2:

S_2: $y = x^2 - 4x + 7$

$y = (x-2)^2 - 4 + 7$ | quadratische Ergänzung

$y = (x-2)^2 + 3$

$S_2(2|3)$

Winkelberechnungen:

β: $tan\beta = m_{S_1S_2} = \frac{3-(-2)}{2-(-3)} = 1$

$\beta = \tan^{-1}(1) = 45°$

γ: $tan\gamma^* = m_{RS_2} = \frac{3-7}{2-0} = -2$

$\gamma^* = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43°$ | dies ist der nach unten geöffnete spitze Winkel, den die Gerade durch R und S_2 mit der x–Achse bildet.

$\gamma = |\gamma^*| = 63{,}43\,°$

α_1: $\alpha_1 = 180° - 45° - 63{,}43° = 71{,}57°$

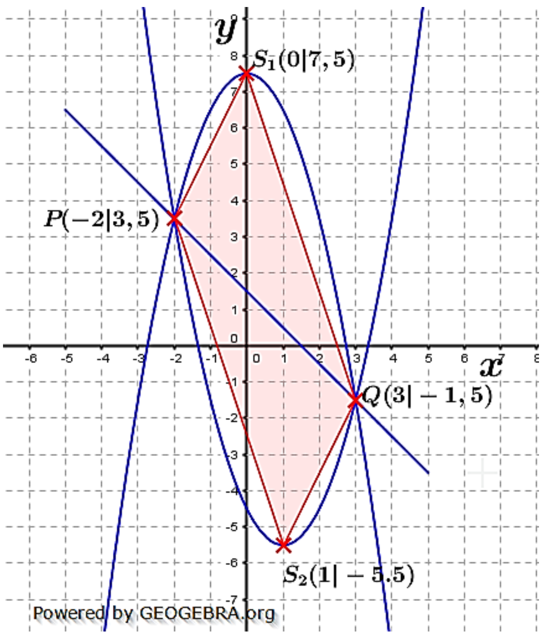
α: $\alpha = 180° - \alpha_1 = 180° - 71{,}57° = 108{,}43°$

Der Winkel S_1S_2R hat $108{,}43\,°$, ist also stumpf.

Lösung W3a/2012

Lösungslogik

Berechnung der Schnittpunkte P und Q durch Gleichsetzung von p_1 mit g.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über Punktproben mit P und Q.
Berechnung der Scheitelpunkte von p_1 und p_2.
Ermittlung der Steigungen der Geraden durch S_1 und P, S_2 und Q sowie P und S_2 und Q und S_1.
Das Viereck S_1PS_2Q ist dann ein Parallelogramm, wenn $\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$ und $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$ ist.



Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2010-2013

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte von p_1 mit g:

$p_1 \cap g$: (1) $y = -x^2 + 7{,}5$

(2) $\underline{y = -x + 1{,}5}$

(1)-(2) $0 = -x^2 + x + 6$ | $\cdot -1$

$x^2 - x - 6 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -2$

$x_1 \longrightarrow g$: $y_1 = -3 + 1{,}5 = -1{,}5$

$x_2 \longrightarrow g$: $y_2 = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$

$P(-2|3{,}5);\ \ Q(3|-1{,}5)$

Parabelgleichung p_2

p_2: $y = x^2 + bx + c$ | allgemeine Parabelgleichung

(1) $3{,}5 = 4 - 2b + c$ | Punktprobe mit $P(-2|3{,}5)$

(2) $\underline{-1{,}5 = 9 + 3b + c}$ | Punktprobe mit $P(3|-1{,}5)$

(1)-(2) $5 = -5 - 5b$

$b = -2$

$b \longrightarrow (1)$: $3{,}5 = 4 - 2 \cdot (-2) + c$

$3{,}5 = 4 + 4 + c$

$c = -4{,}5$

p_2: $y = x^2 - 2x - 4{,}5$

Scheitelpunkte p_1 und p_2:

S_1: $S_1(0|7{,}5)$ | aus p_1 abgelesen

S_2: $y = x^2 - 2x - 4{,}5$

$y = (x-1)^2 - 1^2 - 4{,}5$ | quadratische Ergänzung

$y = (x-1)^2 - 5{,}5$ | Scheitelpunktgleichung

$S_2(1|-5{,}5)$

Steigungen $\overline{S_2Q}$ und $\overline{S_1P}$:

$m_{\overline{S_2Q}} = \frac{y_Q - y_{S_2}}{x_Q - x_{S_2}} = \frac{-1{,}5-(-5{,}5)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

$m_{\overline{S_1P}} = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_P - x_{S_1}} = \frac{3{,}5-7{,}5}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$

Steigungen $\overline{PS_2}$ und $\overline{QS_1}$:

$m_{\overline{PS_2}} = \frac{y_{S_2} - y_P}{x_{S_2} - x_P} = \frac{-5{,}5-3{,}5}{1-(-2)} = \frac{-9}{3} = -3$

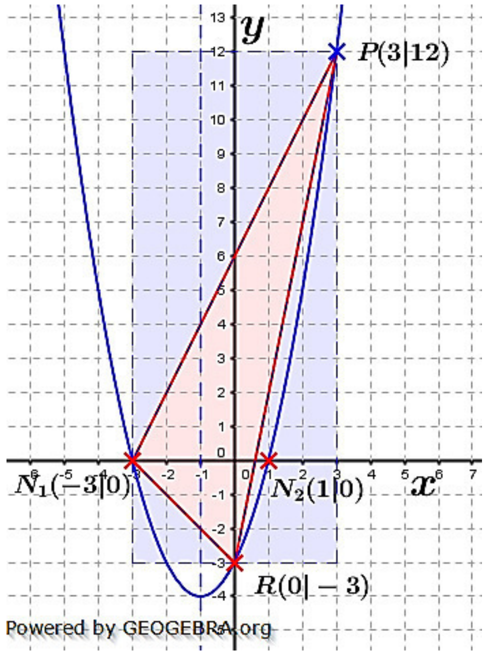
$m_{\overline{QS_1}} = \frac{y_{S_1} - y_Q}{x_{S_1} - x_Q} = \frac{7{,}5-(-1{,}5)}{0-3} = \frac{9}{-3} = -3$

Wegen $\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$ und $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$, ist das Viereck S_1PS_2Q ein Parallelogramm.

Lösung W3b/2012

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung von p:
Durch die Angabe, dass die Symmetrieachse eine Parallele zur y–Achse durch den Punkt $A(-1|0)$ ist, wissen wir, dass die x–Koordinate des Scheitels -1 sein muss. Mithilfe einer Punktprobe mit dem Punkt $P(3|12)$ in der Scheitelpunktgleichung lässt sich die y–Koordinate des Scheitels berechnen. Wir erhalten somit die vollständige Scheitelpunktgleichung und den Scheitelpunkt der Parabel.



Nullstellenberechnung:
Wir berechnen die Nullstellen von p, indem wir y der Scheitelpunktgleichung auf 0 setzen und die Gleichung dann nach x auflösen.

Fläche des Dreiecks RPN_1:
Nachdem die Eckpunkte des Dreiecks bekannt sind, erkennen wir aus der Grafik, dass das Dreieck kein rechtwinkliges Dreieck ist.
Wir müssen somit zunächst die Fläche des Rechtecks berechnen, welches das Dreieck umschließt (siehe Grafik). Von der Fläche dieses Rechtecks müssen wir dann die Flächen der seitlichen drei Dreiecke abziehen und erhalten damit die Fläche des Dreiecks RPN_1.

Klausuraufschrieb

Aufstellung der Parabelgleichung von p:

p:	$y = (x - x_S)^2 + y_S$	|	Scheitelpunktgleichung
	$x_S = -1$	|	Symmetrieachse durch $A(-1|0)$
	$y = (x+1)^2 + y_S$		
	$12 = (3+1)^2 + y_S$	|	Punktprobe mit $P(3|12)$
	$12 = 16 + y_S$		
	$y_S = -4$		
	$y = (x+1)^2 - 4$		

Nullstellenberechnung:

$0 = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4$		
$x^2 + 2x - 3 = 0$	|	p/q-Formel
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4}$		
$x_{1,2} = -1 \pm 2$		
$x_1 = 1;\ \ x_2 = -3$		
$N_1(1|0);\ \ N_2(-3|0)$		

Fläche des Dreiecks RPN_1:

A_{RPN_1}: $A_{RPN_1} = A_{ABPC} - A_{N_1AR} - A_{RBP} - A_{PCN}$

A_{ABPC}: $A_{ABPC} = 6 \cdot 15 = 90$

A_{N_1AR}: $A_{N_1AR} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

A_{RBP}: $A_{RBP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 = 22{,}5$

A_{PCN}: $A_{PCN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$

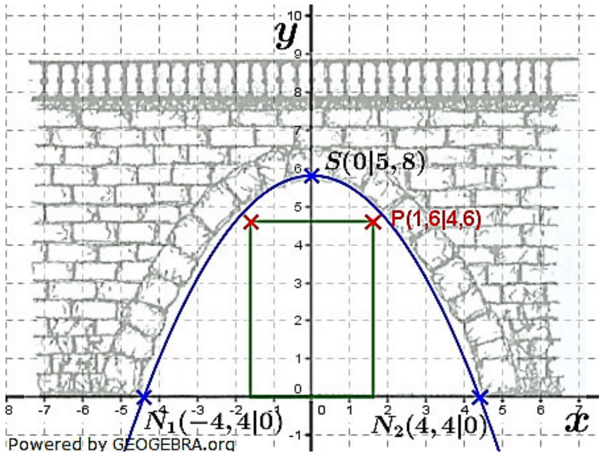
A_{RPN_1}: $A_{RPN_1} = 90 - 4{,}5 - 22{,}5 - 36 = 27$

Der Flächeninhalt des Dreiecks RPN_1 beträgt $27\ FE$.

Lösung W4b/2012

Lösungslogik

Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels S sowie der Nullstellen N_1 und N_2.
Aufstellung der Parabelgleichung.
Prüfung, ob der Punkt $P(1{,}6|4{,}6)$ unterhalb oder oberhalb der Parabel liegt.



Klausuraufschrieb

Scheitelpunkt der Parabel: $S(0|5{,}8)$.
Nullstellen $N_1(-4{,}4|0)$ und $N_2(4{,}4|0)$.

p: $y = ax^2 + 5{,}8$

Punktprobe mit N_1:

$$0 = a \cdot 4{,}4^2 + 5{,}8 \quad | \quad -5{,}8$$
$$-5{,}8 = 19{,}36a \quad | \quad :19{,}36$$
$$a = -0{,}3$$

Die Gleichung der Parabel lautet $y = -0{,}3x^2 + 5{,}8$.

Prüfung, ob der Punkt P oberhalb oder unterhalb der Parabel liegt:

$$y = -0{,}3 \cdot 1{,}6^2 + 5{,}8 = 5{,}03$$

An der Stelle $x_0 = 1{,}6$ bzw. $x_1 = -1{,}6$ ist der Brückenbogen etwa $5\ m$ hoch. Da das landwirtschaftliche Fahrzeug eine Höhe von nur $4{,}60\ m$ hat, kann es unter der Brücke durchfahren.

Lösung W3a/2013

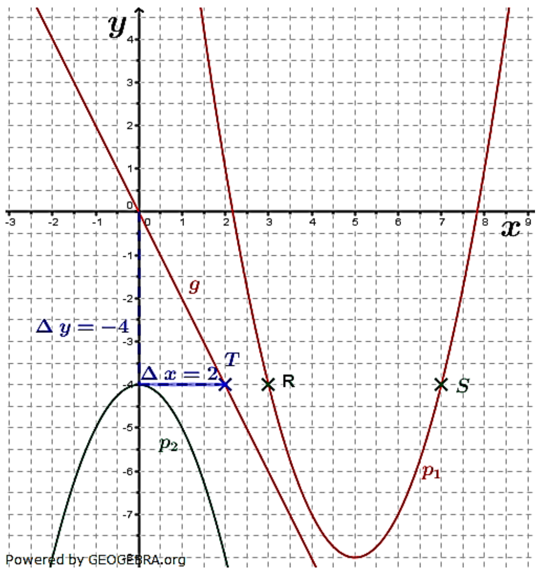
Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.

Funktionsgleichung für p_1:

Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + px + q$ (siehe Formelsammlung). Wir lesen den Punkt R im Koordinatensystem mit $R(3|4)$ ab. In der Wertetabelle ist eine weiterer Punkt S mit $S(7|-4)$ gegeben. Wir machen eine Punktprobe mit R und S und errechnen daraus die Koeffizienten p und q.

Jetzt können wir über die gefundene Funktionsgleichung die Wertetabelle vollständig ausfüllen.



Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2010-2013

Schnittpunkte von p_1 und p_2:

Wir setzen die beiden Gleichungen von p_1 und p_2 gleich, formen diese um in eine quadratische Gleichung und ermitteln daraus c.
Dabei stellen wir fest, dass die Lösungsmenge leer ist, was bedeutet, dass die beiden Parabeln sich in keinem Punkt schneiden.

Gleichung einer Geraden g:

Wir haben p_1 und p_2 in das Koordinatensystem eingezeichnet und ziehen eine Gerade durch den Ursprung, die zwischen den beiden Parabeln verläuft. Wir suchen einen weiteren leicht ablesbaren Punkt auf der Geraden und bilden über diesen Punkt das Steigungsdreieck und bestimmen daraus die Steigung der Ursprungsgeraden.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Funktionsgleichung für p_1:

p_1: $y = x^2 + px + q$

$R(3|-4)$ (abgelesen) $R(7|-4)$ (aus Tabelle)

(1) $-4 = 9 + 3p + q$ | Punktprobe mit R

(2) $-4 = 49 + 7p + q$ | Punktprobe mit S

(1)-(2) $0 = -40 - 4p \implies p = -10$

$p \longrightarrow (1)$

$-4 = 9 + 3 \cdot (-10) + q$

$30 - 13 = q$

$q = 17$

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 - 10x + 17$.

Wertetabelle:

x	3	4	5	6	7	8	9
y	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 10x + 17 = -x^2 - 4$ | $+x^2; +4$

$2x^2 - 10x + 21 = 0$ | $:2$

$x^2 - 5x + \frac{21}{2} = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 10{,}5} = 2{,}5 \pm \sqrt{-4{,}25}$

Wegen $D < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$, d.h., die beiden Parabeln haben keine gemeinsamen Punkte.

Ursprungsgerade g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Ursprungsgerade durch $O(0|0)$: $y = mx$

$T(2|-4)$ (abgelesen nach Einzeichnung einer geeigneten Geraden)

$m = \frac{-4}{2} = -2$

g: $y = -2x$

Die Gerade g mit $y = -2x$ hat keine Schnittpunkte mit $y = p_1$ und p_2.

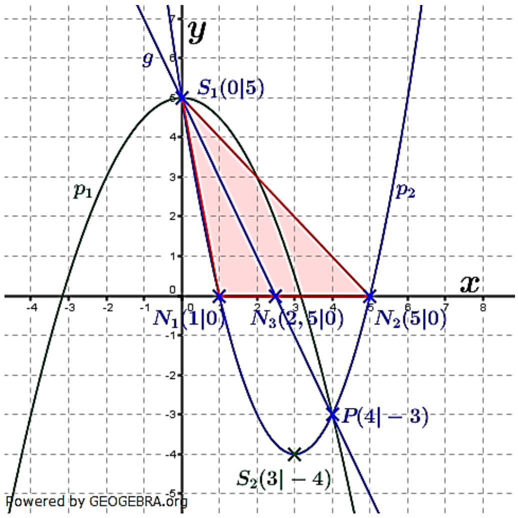
Hinweis:

Es sind natürlich noch andere Geradengleichungen denkbar.

Lösung W3b/2013

Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.
Blaue Linien und Punkte sind erforderliche Zwischenwerte.
Zur Flächenberechnung des Dreiecks $S_1N_1N_2$ benötigen wir die Koordinaten der Punkte.
S_1 ist der Scheitelpunkt der in x–Richtung unverschobenen Parabel p_1. Seine Koordinaten lesen wir unmittelbar aus der Funktionsgleichung ab.
N_1 und N_2 sind die Schnittpunkte von p_2 mit der x-Achse. Zur Bestimmung stellen wir die Parabelgleichung in Scheitelpunktform über den gegebenen Scheitelpunkt S_2 auf und lösen die entstehende quadratische Gleichung über die p/q–Formel nach x auf.



Im Dreieck $S_1N_1N_2$ ist die Strecke $\overline{N_1N_2}$ die Basis und die Strecke $\overline{OS_1}$ die Höhe auf die Basis (Höhe liegt außerhalb des Dreiecks wegen des stumpfen Winkels bei N_1). Die Fläche des Dreiecks ergibt sich aus der Formel $A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2}\overline{N_1N_2} \cdot \overline{OS_1}$ (siehe Formelsammlung).
Zur Bestimmung der Geraden g benötigen wir die Schnittpunkte von p_1 und p_2.
Schnittpunktbestimmung erfolgt durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2. Ein Schnittpunkt ist bereits bekannt, sowohl p_1 als auch p_2 haben den y–Achsenabschnitt $c = 5$. Somit ist $S_1(0|5)$ der eine Schnittpunkt. Der zweite Schnittpunkt ergibt sich zu $P(4|-3)$. Über die Punkte S_1 und P bestimmen wir die Steigung m der Geraden g. Auch der y–Achsenabschnitt der Geraden ist $b = 5$.
Zur Prüfung, ob die Gerade g das Dreieck $S_1N_1N_2$ halbiert, benötigen wir den Schnittpunkt der Geraden mit der x–Achse, der sich zu $N_3(2{,}5|0)$ ergibt. Wir berechnen nun die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$ mit $\overline{N_1N_2}$ als Basis und $\overline{OS_1}$ als Höhe. Der Vergleich der beiden Flächen zeigt, ob die Gerade g die Fläche $S_1N_1N_2$ halbiert.

Klausuraufschrieb

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$:

S_1: $S_1(0|5)$ | y-Achsenabschnitt von p_1.

p_2: $y = (x-3)^2 - 4$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_2(3|4)$

$y = x^2 - 6x + 5$

N_1 und N_2:

$x^2 - 6x + 5 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$

$x_1 = 5; \quad x_2 = 1$

$N_1(1|0); \quad N_2(5|0)$

$A_{S_1N_1N_2}$:

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

g: $g = \overline{N_1N_2} = (x_{N_2} - x_{N_1}) = 5 - 1 = 4$

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2010-2013

h_g: $h_g = \overline{OS_1} = (y_{S_1} - y_O) = 5 - 0 = 5$

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10\ FE$

Die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$ ist $10\,FE$ groß.

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 - 6x + 5 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$	$+\frac{1}{2}x^2;\ -5$
$x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 6x = 02$	
$\frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$	
$x\left(\frac{3}{2}x - 6\right) = 0$	Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$	
$\frac{3}{2}x - 6 = 0$	$\cdot 2$
$3x - 12 = 0$	$+12$
$3x = 12$	$:3$
$x_2 = 4$	

$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 5 = 5$

$S_1(0|5)$

$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 5 = -8 + 5 = -3$

$P(4|-3)$

Geradengleichung g durch S_1 und P:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_p - x_{S_1}} = \frac{-3-5}{4-0} = \frac{-8}{4} = -2$

b: Wegen $S_1(0|5)$ ist$b = 5$.

$y = -2x + 5$

Schnittpunkt von g mit der x–Achse:

N_3: $0 = -2x + 5$

$2x = 5$

$x_3 = 2{,}5$

$N_3(2{,}5|0)$

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$:

$A_{S_1N_1N_3}$: $A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

$g = \overline{N_1N_3} = (x_{N_3} - x_{N_1}) = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$

$h_g = \overline{OS_1} = (y_{S_1} - y_O) = 5 - 0 = 5$

$A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 3{,}75\ FE$

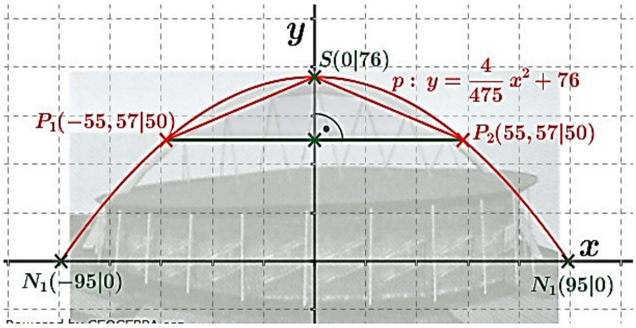
$\frac{A_{S_1N_1N_3}}{A_{S_1N_1N_2}} = \frac{3{,}75}{10} \neq \frac{1}{2}$

Die Gerade g halbiert die Fläche $A_{S_1N_1N_2}$ nicht.

Lösung W4b/2013

Lösungslogik

Grüne Linie und Punkte sind gegeben.
Rote Linien sind gesucht.
Der Bogen der Arena entspricht einer nach unten geöffneten, in x–Richtung nicht verschobenen Parabel. Die allgemeine Gleichung dieser Parabel lautet $y = ax^2 + c$.



Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Scheitel dieser Parabel bei $S(0|76)$ liegt, also ist $c = 76$. Weiterhin geht aus der Aufgabenstellung hervor, dass diese Parabel die x–Achse in $N_1(-95|0)$ und $N_2(95|0)$ schneidet.
Wir machen eine Punktprobe mit N_2 (alternativ N_1) und bestimmen damit den Koeffizienten a der Parabelgleichung.
Die Koordinaten des Punktes P ermitteln wir, indem wir die Gerade g mit $y = 50$ mit der Parabel schneiden. Die Entfernung von P bis zum höchsten Punkt S (=Scheitelpunkt) berechnen wir dann über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p:

p: $y = ax^2 + c$

$c = 76$	|	wegen $S(0\|76)$ höchster Punkt
$N_1 = (-95\|0)\quad N_2 = (95\|0)$	|	wegen unterer Breite
$0 = a \cdot 95^2 + 76$	|	Punktprobe mit N_2
$a = -\frac{76}{95^2} = -\frac{4}{475}$		

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet $y = -\frac{4}{475}x^2 + 76$

Entfernung des Punktes P vom höchsten Punkt des Bogens:

P: $y_p = 50$

$-\frac{4}{475}x^2 + 76 = 50$	|	$\cdot 475$
$-4x^2 + 475 \cdot 76 = 475 \cdot 50$	|	$-475 \cdot 60$
$-4x^2 = 475 \cdot (50 - 76) = 475 \cdot (-26)$	|	$:(-4)$
$x^2 = \frac{475 \cdot 26}{4}$	|	$\sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 55{,}57$		
$P_1(-55{,}57\|50);\quad P_2(55{,}57\|50)$		

$\overline{P_2S}$: $\overline{P_2S} = \sqrt{\left(x_{P_2} - x_S\right)^2 + \left(y_{P_2} - y_S\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{(55{,}57 - 0)^2 + (50 - 76)^2} \approx 61{,}35$

Der Punkt P ist $61{,}35\,m$ vom höchsten Punkt des Bogens entfernt.