0)Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-2020
Dokument mit 6 Aufgaben

Aufgabe W3a/2019

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(2|2)$.
Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat mit der x-Achse die Schnittpunkte $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes T der beiden Parabeln.
Die Gerade g mit der Steigung $m = 2$ schneidet beide Parabeln ebenfalls im Punkt T. Berechnen Sie die Gleichung von g.
Berechnen Sie den Winkel, unter denen sich die Gerade g und die y-Achse schneiden.
Geben Sie die Gleichung einer Parabel p_3 an, die weder mit noch mit einen gemeinsamen Punkt hat.

Lösungen: *Schnittpunkt* $T(1|-3)$
$g: y = 2x + 1$
$\gamma_1 = 26{,}6\,°;\ \gamma_2 = 153{,}4\,°$
$y = 2(x-2)^2 + 3;\ alternativ\ \ y = -x^2$
Andere Lösungen denkbar

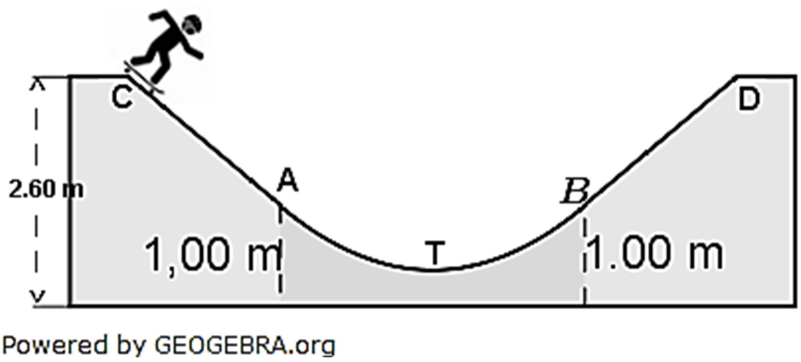
Aufgabe W3b/2019

Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ hat den Scheitelpunkt $S_1(0|6)$. Eine zweite Parabel p_2 die Gleichung $y = x^2 + 3x + q$.
Der Punkt $B(2|4)$ ist einer der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes A der beiden Parabeln.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A, B und $C(0|2)$ auf einer Geraden liegen.

Lösungen: *Schnittpunkt* $A(-4|-2)$
$m_{AB} = 1;\ \ m_{BC} = 1;\ \ y = x + 2.$

Aufgabe W4b/2019

Im Querschnitt einer Skater-Rampe sieht man die beiden geraden Teilstücke $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sowie das parabelförmige Teilstück AB. Die beiden Punkte A und B liegen auf gleicher Höhe und sind $4{,}00\,m$ voneinander entfernt. Der tiefste Punkt T der Skater-Rampe liegt $20\,cm$ über dem Boden.



Bestimmen Sie einen mögliche Funktionsgleichung für das parabelförmige Teilstück AB.
Die beiden Punkte C und D liegen ebenfalls auf gleicher Höhe und sind $8{,}00\,m$ voneinander entfernt.
Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung für die Gerade, auf der das gerade Teilstück $\overline{BD}$ liegt.

Lösungen: $AB: y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$
$\overline{BD}: y = 0{,}8x - 0{,}6$

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-2020

Aufgabe W3a/2020

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat mit der x-Achse die Schnittpunkte $N_1(-5|0)$ und $N_2(-1|0)$. Sie schneidet die y-Achse im Punkt A.
Die Parabel p_2 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 11$ und schneidet die y-Achse im Punkt B.

- Durch die Scheitelpunkte S_1 und S_2 der beiden Parabeln verläuft die Gerade g. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Die Gerade h mit der Steigung $m = -1$ geht durch C. Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden g und h?
  Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder Argumentation.

Lösungen: g: $y = x - 1$
Schnittwinkel zwischen g und h: $90\,°$

Aufgabe W3b/2019

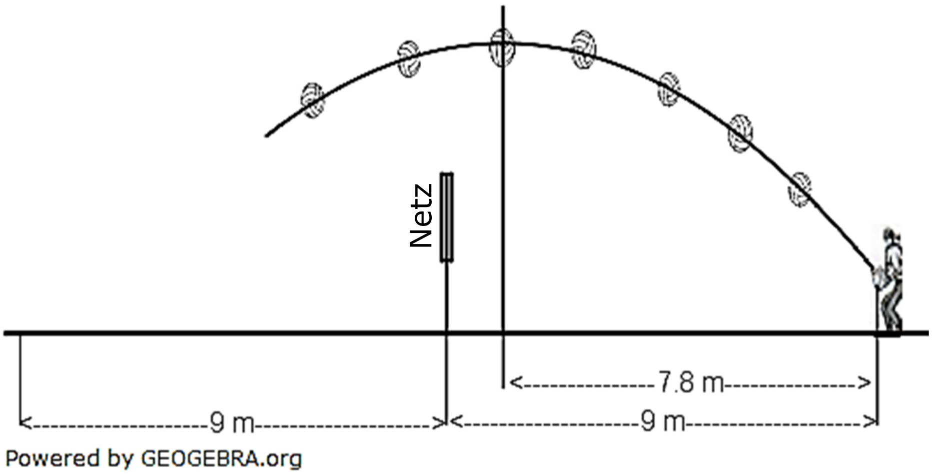
Eine Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + 6x$ schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.
Die Gerade g mit der Funktionsgleichung $y = x$ schneidet die Parabel in den Punkten N_1 und C.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2C.
- Die Gerade h mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x$ schneidet die Parabel in den Punkten N_1 und D.
  Peter behauptet: „Die Steigung der Geraden h ist nur halb so groß wie die der Geraden g. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D auch nur halb so groß wie der des Dreiecks N_1N_2C.“
  Hat Peter recht? Begründen Sie rechnerisch.

Lösungen: *Flächeninhalt* $A_{N_1N_2C} = 15\,FE$
mit $N_1(0|0)$, $N_2(-6|0)$ *und* $C(-5|-5)$
Peter hat nicht recht. $A_{N_1N_2D} = 8{,}25\,FE$
mit $D(-5{,}5|-2{,}75)$.

Aufgabe W4b/2019

Thea trainiert Aufschläge beim Volleyball (siehe Skizze).



Die Flugkurve des Balles lässt sich mit einer Funktions-gleichung der Form $y = ax^2 + c$ annähernd beschreiben. Der Ball verlässt beim Anschlag von unten die Hand in einer Höhe von $90\ cm$ über der Grundlinie. Nach $7{,}8\ m$ (horizontal gemessen) erreicht die Flughöhe des Balles ihre maximale Höhe von $4{,}0\ m$.

- Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung der zugehörigen Parabel an.
- In welchem Abstand überquert der Ball das $2{,}24\ m$ hohe Netz?
- Die Grundlinien des Volleyballspielfeldes sind jeweils $9{,}0\ m$ vom Netz entfernt (siehe Skizze).
  In welcher Entfernung zur Grundlinie trifft der Ball auf dem Boden auf?

Lösungen: $y = -0{,}051x^2 + 4$
Abstand des Balles vom Netz: $1{,}69\ m$
Abstand auftreffend zur Grundlinie: $1{,}34\ m$

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-heute

Lösung W3a/2019

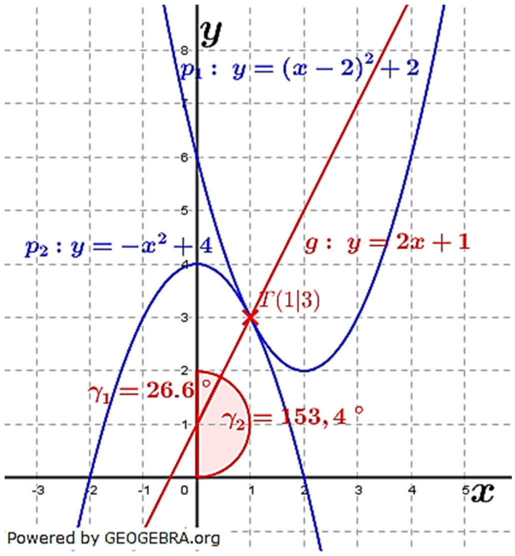
<u>Lösungslogik</u>

Parabelgleichung p_1:
Mit dem gegebenen Scheitelpunkt $S(2|2)$ die Scheitelpunktgleichung aufstellen.

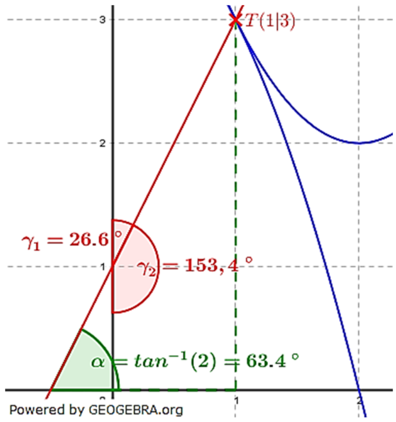
Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ und der Parabelgleichung $y = -x^2 + c$ die Parabelgleichung aufstellen.

Schnittpunkt T:
Wir schneiden p_1 mit p_2 und erhalten den Schnittpunkt T.

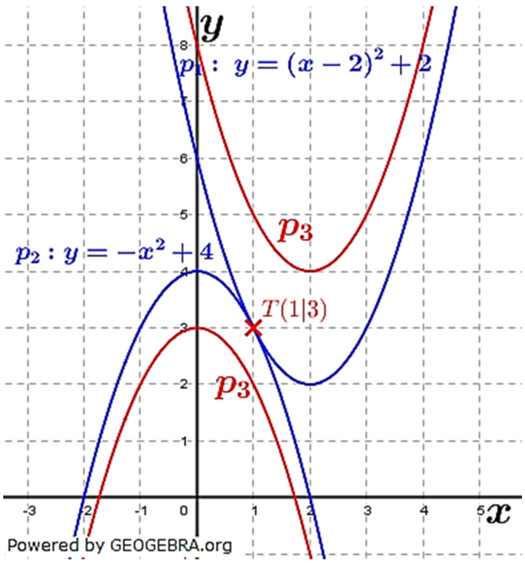
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = 2$ und der Geradengleichung $y = mx + b$ sowie einer Punktprobe mit T erhalten wir die Gleichung von g.



Schnittwinkel von g mit der y-Achse:
Der Winkel, den einer Gerade g mit der x-Achse einschließt errechnet sich aus dem tan der Steigung m (Siehe Formel-sammlung $m = tan\ (\alpha)$.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.
Der Winkel γ_1 ist Ergänzungs-Winkel zu $90°$ von α, der Winkel γ_2 ist Ergänzungs-Winkel zu $180°$ von γ_1.



Parabelgleichung p_3:
Parabeln, die weder p_1 noch p_2 schneiden, müssen im inneren der gegebenen Parabeln verlaufen, siehe nachfolgende Grafik. Somit ist p_3 entweder eine in y-Richtung nach oben verschobene Parabel p_1 oder aber eine weiter nach unten verschobene Parabel p_2.



Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-heute

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelpunktform der Parabel
$y = (x-2)^2 + 2$ | Scheitelpunkt $S(2|2)$ einsetzen.

Parabelgleichung p_2:

p_2: $y = -x^2 + c$ | Normalform einer nach unten Geöffneten Parabel mit Scheitel $(0|c)$
$0 = -2^2 + c$ | Punktprobe mit $N_1(2|0)$
$c = 4$
$y = -x^2 + 4$

Schnittpunkt T von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:
$(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4$
$x^2 - 4x + 4 + 2 = -x^2 + 4$ | $+x^2$
$2x^2 - 4x + 6 = 4$ | -4
$2x^2 - 4x + 2 = 0$ | $:2$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$ | p/q-Formel

$x_1 \to p_2$:
$y = -1^2 + 4 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $T(1|3)$.

Gerade g:

$y = mx + b$ | allgemeine Geradengleichung
$y = 2x + b$ | Steigung $m = 2$ ist gegeben
$3 = 2 \cdot 1 + b$ | Punktprobe mit $T(1|3)$
$b = 1$

Die Gleichung der Geraden g lautet $y = 2x + 1$.

Schnittwinkel von g mit der y-Achse:

Schnittwinkel mit der x-Achse:
$tan(\alpha) = m$
$\alpha = tan^{-1}(m) = tan^{-1}(2) = 63{,}4°$
Schnittwinkel 1 (γ_1) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von α zu 90 °:
$\gamma_1 = 90\,° - 63{,}4° = 26{,}6°$
Schnittwinkel 2 (γ_2) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von γ_1 zu 180 °:
$\gamma_2 = 180\,° - 26{,}6° = 153{,}4°$

Die beiden Schnittwinkel von g mit der y-Achse sind $\gamma_1 = 26{,}6°$ und $\gamma_2 = 153{,}4°$ groß.

Parabelgleichung p_3:

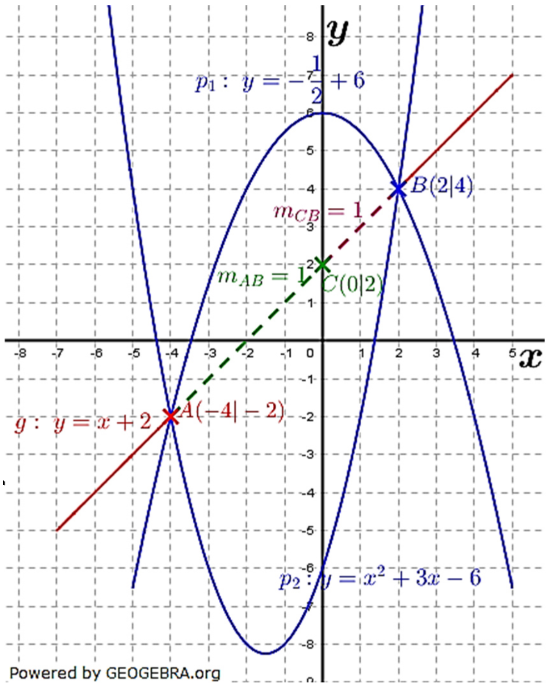
Die Parabel muss innerhalb von p_1 oder aber innerhalb von p_2 verlaufen. Damit entweder Verschiebung von p_1 in y-Richtung nach oben, alternativ Verschiebung von p_2 in y-Richtung nach unten.
$p_3 = p_1 + 2 = (x-2)^2 + 4$ | alternativ
$p_3 = p_2 - 1 = -x^2 + 3$

Andere Verschiebungen denkbar.

Lösung W3b/2019

Lösungslogik

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:
Sowohl der Punkt $S(0|6)$ als auch der Punkt $B(2|4)$ sind Parabelpunkte. Durch Punktproben ermitteln wir die Parameter a und c.
Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:
Der Punkt $B(2|4)$ ist Parabelpunkt. Durch eine Punktprobe ermitteln wir den Parameter q.
Zweiter Schnittpunkt A:
Schnittpunktermittlung durch Gleichsetzung.
Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:
Drei Punkte A, B und C liege dann auf einer Geraden g wenn die Steigung der Strecke $\overline{AB}$ mit der Steigung der Strecke $\overline{BC}$ übereinstimmt.
Alternativ:
Aufstellung einer Geradengleichung durch die Punkte A und B mit anschließender Punktprobe mit C.



Klausuraufschrieb

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:

p_1:	$6 = a \cdot 0 + c$	Punktprobe mit $S(0|6)$
	$c = 6$	
	$4 = a \cdot 2^2 + 6$	Punktprobe mit $B(2|4)$
	$4a = -2$	
	$a = -\frac{1}{2}$	
	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$	

Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:

p_2:	$4 = 2^2 + 3 \cdot 2 + q$	Punktprobe mit $B(2|4)$
	$4 = 10 + q$	
	$4 = -6$	
	$y = x^2 + 3x - 6$	

Zweiter Schnittpunkt A:

$p_1 \cap p_1$:

$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = x^2 + 3x - 6$	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 = 0$	$\frac{1}{2}x^2$; -6; $\cdot\frac{2}{3}$
$x^2 + 2x - 8 = 0$	
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$	p/q-Formel
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -4$	

$x_1; x_2 \longrightarrow p_1$

$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 = 4$ ==> Punkt $B(2|4)$

$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 6 = -2$ ==> Punkt $A(-2|-4)$

$A(-2|-4)$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(-2|-4)$.

Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:

m_{AB}: *Steigung Strecke* $\overline{AB}$:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-(-2)}{2-(-4)}=\frac{6}{6}=1$$

m_{BC}: *Steigung Strecke* $\overline{BC}$:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-4}{0-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

Wegen $m_{AB}=m_{BC}$ *liegen die drei Punkte* A, B *und* C *auf einer Geraden.*

Alternativ: Gerade durch A und B:

g: $y=mx+b$

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-(-2)}{2-(-4)}=\frac{6}{6}=1$$

$y=x+b$

$4=2+b$ | Punktprobe mit B

$b=2$

$2=0+2$ | Punktprobe mit C

$2=2$ | wahre Aussage

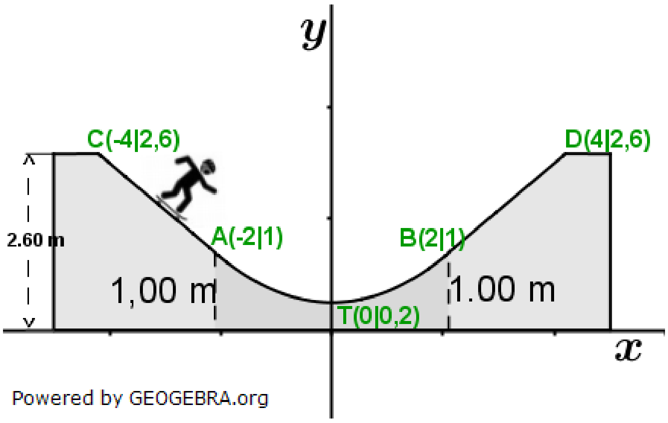
Die Punkte A, B *und* C *liegen auf einer Geraden.*

Lösung W4b/2019

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden und die y-Achse durch den Punkt T verläuft.
Wir versehen die einzelnen Punkte mit ihren Koordinaten (siehe Grafik rechts).
Für den Parabelbogen AB gilt:
Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt T. Die Parabel ist in x-Richtung unverschoben und in y-Richtung um $0{,}2\,m$ nach oben verschoben.
Die Punkte A und B erfüllen die Funktionsgleichung der Parabel.



Parabelgleichung p*:*

Die Parabel hat die Funktionsgleichung $y=ax^2+c$. Wegen $T(0|0{,}2)$ ist $c=0{,}2$. Über eine Punktprobe mit $B(2|1)$ errechnen wir a.

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$*:*

Wir bestimmen die Gleichung einer Geraden durch die zwei Punkte $A(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt in $T(0|0{,}2)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Parabelgleichung p:

$S(0|0{,}2)$ | Scheitelpunkt der Parabel
$y = ax^2 + 0{,}2$
$B(2|1)$ | Punkt der Parabel
$1 = 2^2 \cdot a + 0{,}2$ | Punktprobe mit B
$0{,}8 = 4a$
$a = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$

Die Parabelgleichung lautet: $y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $B(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.
$y = mx + c$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}6-1}{4-2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$
$y = 0{,}8x + c$
$1 = 0{,}8 \cdot 2 + c$ | Punktprobe mit B:
$c = -0{,}6$

Die Geradengleichung lautet $y = 0{,}8x - 0{,}6$.

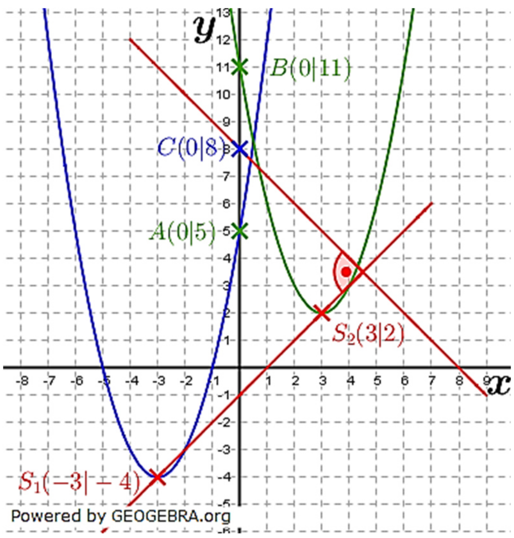
Lösung W3a/2020

Lösungslogik

Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen können wir die Nullstellengleichung mit $y = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2})$ aufstellen und daraus die Normalform $y = x^2 + px + q$ der Parabelgleichung bilden und erhalten über q die Koordinaten des Schnittpunktes A.

Parabel 2:
Über die gegebene Funktionsgleichung bestimmen wir die Koordinaten von B.

Gerade g:
Wir berechnen die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2. Die Funktionsgleichung der Geraden dann über diese beiden Punkte.



Schnittwinkel g und h:
Wir bestímmen den Mittelpunkt C der Strecke $\overline{AB}$. Gerade h hat die gegebene Steigung $m_h = -1$. Gerade g hat die Steigung $m_g = 1$. Die Orthogonalitätsbedingung $m_h \cdot m_g = -1$ ist damit erfüllt, die beiden Geraden schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-2020

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1

p_1: $y=(x-x_{N_1})(x-x_{N_2})$

$y=(x+5)(x+1)$ | ausmultiplizieren

$y=x^2+6x+5$

A: Wegen $q=5$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $A(0|5)$.

Parabelgleichung p_2

p_2: $y=x^2-6x+11$

B: Wegen $q=11$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $B(0|11)$.

Scheitelpunkte p_1 und p_2:

S_1: $y=x^2+6x+5$

$y=(x+3)^2-9+5=(x+3)^2-4$ | Quadratische Ergänzung

$S_1(-3|-4)$

S_2: $y=x^2-6x+11$

$y=(x-3)^2-9+11=(x-3)^2+2$ | Quadratische Ergänzung

$S_2(3|2)$

Gerade g:

g: $y=mx+b$

$m=\frac{y_{S_2}-y_{S_1}}{x_{S_2}-x_{S_1}}=\frac{2-(-4)}{3-(-3)}=\frac{6}{6}=1$

$y=x+b$

$S_1 \rightarrow g$:

$-4=-3+b$

$b=-1$

$y=x-1$

Schnittwinkel von g und h:

$m_g=1;\quad m_h=-1$

$m_g \cdot m_h=1\cdot(-1)=-1$

Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt. g und h schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

Lösung W3b/2020

Lösungslogik

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:

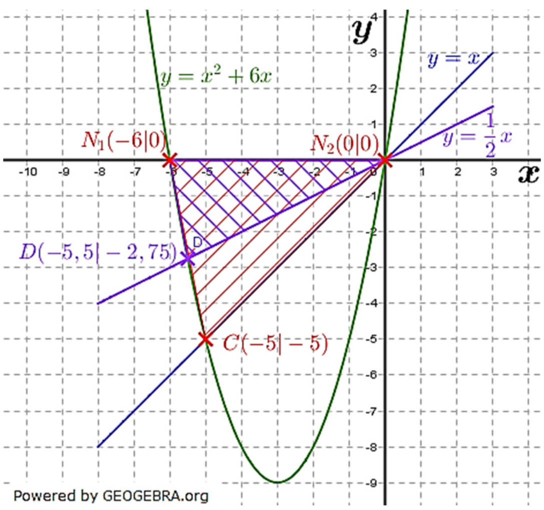
Wir setzen die gegebene Funktionsgleichung auf 0 und lösen nach x auf.

Punkt C:

Wir schneiden $y=x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von C.

Punkt D

Wir schneiden $y=\frac{1}{2}x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von D.



Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:

über $A_{N_1N_2C}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{N_1N_2}\cdot y_C$.

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:

über $A_{N_1N_2D}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{N_1N_2}\cdot y_D$.

Klausuraufschrieb

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:

$x^2 + 6x = 0$

$x(x+6) = 0$ | x ausklammern

$x_1 = 0;\quad x_2 = -6$ | Satz vom Nullprodukt

$N_1(-6|0);\quad N_2(0|0)$

Punkt C:

$y = x \cap p$

$x^2 + 6x = x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 + 5x = 0$

$x(x+6) = 0$ | x ausklammern

$x_1 = 0;\quad x_2 = -5$ | Satz vom Nullprodukt

$x_2 \to y$

$y = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) = -5$

$C(-5|-5)$

Punkt D:

$y = \frac{1}{2}x \cap p$

$x^2 + 6x = \frac{1}{2}x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 + 5{,}5x = 0$

$x(x+5{,}5) = 0$ | x ausklammern

$x_1 = 0;\quad x_2 = -5{,}5$ | Satz vom Nullprodukt

$x_2 \to y$

$y = (-5{,}5)^2 + 6 \cdot (-5{,}5) = -2{,}75$

$C(-5{,}5|-2{,}75)$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:

$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_C$

$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15\ FE$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:

$A_{N_1N_2D} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_D$

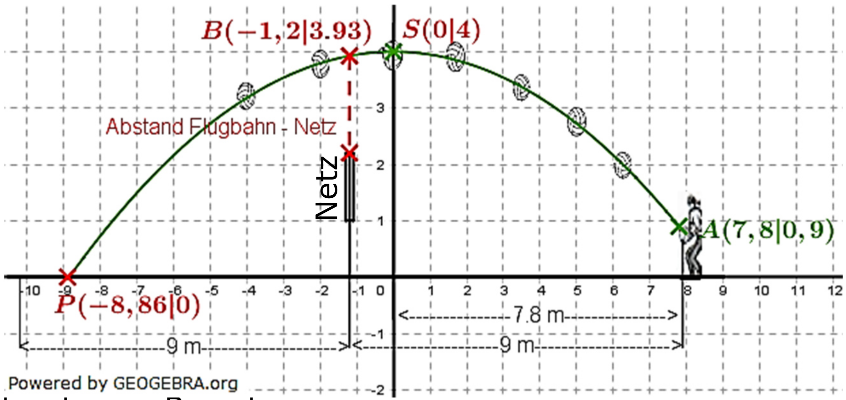
$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}75 = 8{,}25\ FE$

Wegen $8{,}25 \neq 15$ hat Peter nicht recht.

Lösung W4b/2020

Lösungslogik

Die Grafik verdeutlicht die Lösungssituation.



Funktionsgleichung Parabel:
In y-Richtung verschobene nach unten geöffnete Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$.
Scheitelpunkt ist $S(0|4)$.
Der Abwurfpunkt ist Punkt der Parabel.
Wir machen eine Punktprobe zur Berechnung von a.

Abstand Überflug Netz:
Dies ist die Differenz aus der Höhe des Balls bei $x = -1{,}2$ und der Höhe des Netzes.

Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
Wir bestimmen die linke Nullstelle der Parabelgleichung.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung Parabel:
$y = ax^2 + c$
Scheitelpunkt ist $S(0|4)$
$y = ax^2 + 4$
Abwurfpunkt ist $A(7{,}8|0{,}9)$.
$A \to p$
$0{,}9 = a \cdot 7{,}8^2 + 4 \quad | \quad -4;\ :7{,}8^2$
$a = -0{,}051$
$y = -0{,}051x^2 + 4$

Abstand Überflug Netz:
Höhe des Balls bei $x = -1{,}2$:
$y = -0{,}051 \cdot (-1{,}2)^2 + 4 = 3{,}93$
$d = 3{,}93 - 2{,}24 = 1{,}69$
Der Abstand des Balls beim Überflug des Netzes zum Netz beträgt $1{,}69\ m$.

Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
$-0{,}051x^2 + 4 = 0 \quad | \quad +0{,}051x^2;\ :0{,}051$
$x^2 = 78{,}4314 \quad | \quad \sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 8{,}86$
Es interessiert hier nur die linke Nullstelle, somit $P(-8{,}86|0)$.
$10{,}2 - 8{,}86 = 1{,}34$
Der Ball trifft in einer Entfernung von $1{,}34\ m$ zur Grundlinie auf dem Boden auf.