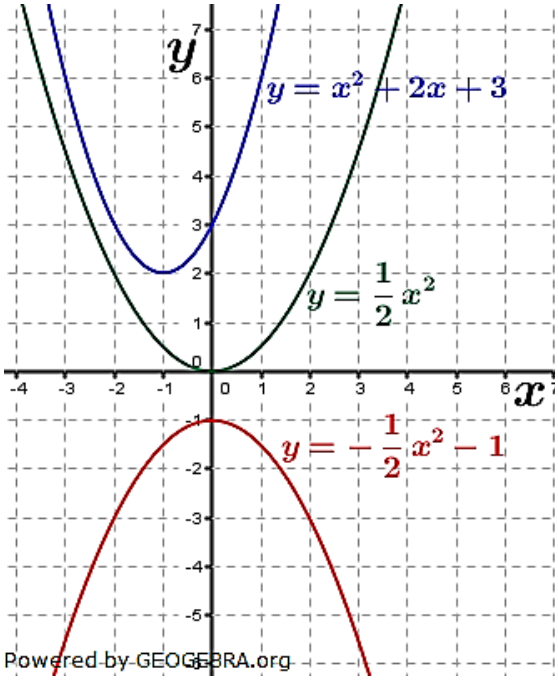
# Lösung W3a/2014

## Lösungslogik

Aus der gegebenen Tabelle erkennen wir, dass der $y$–Wert $3$ sowohl für $x = -2$ als auch für $x = 0$ gilt. Die Symmetrieachse der Parabel muss somit in der Mitte von $x = -2$ und $x = 0$ liegen, also bei $x = -1$.
Wir stellen die Scheitelpunktgleichung mit $y = (x+1)^2 + c$ auf.
Die Punktprobe mit z.B. $Q(0|3)$ führt dann zur Gleichung der Parabel, mit der dann die Wertetabelle vollständig ausgefüllt werden kann.
Die nebenstehende Grafik zeigt die Parabeln $p_1$, $p_2$ und $p_3$.
Nachdem $p_1$ und $p_2$ eingezeichnet sind, erkennen wir leicht, dass eine Parabel zwischen den beiden eingezeichneten Parabeln keine Schnittpunkte mit diesen hat. Dies ist z.B. die Parabel mit $y = \frac{1}{2}x^2$, was dann mit Rechnung überprüfbar ist.




## Klausuraufschrieb

*Funktionsgleichung der Parabel $p_1$:*

Wegen der beiden gegebenen Punkte $P(-2|3)$ und $Q(0|3)$ liegt die Symmetrieachse der Parabel bei $x = -1$.

$p_1$: $y = (x+1)^2 + c$

$3 = (0+1)^2 + c$ | Punktprobe mit $Q(0|3)$ (aus Wertetabelle)

$c = 2$

*Die Gleichung der Parabel lautet:* $y = (x+1)^2 + 2$ *bzw.* $y = x^2 + 2x + 3$.

*Vervollständigte Wertetabelle:*

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $3$ | $2$ | $3$ | $4$ | $11$ |

*Funktionsgleichung $p_3$ ohne Schnittpunkte mit $p_1$ und $p_2$:*

$p_3$: z. B. $y = \frac{1}{2}x^2$

*Schnittpunkte von $p_1$ mit $p_3$:*

$p_1 \cap p_3$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2$ | $-\frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ | $\cdot 2$

$x^2 + 4x + 6 = 0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6}$ | $p/q$-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D =< 0$.

*Schnittpunkte von $p_2$ mit $p_3$:*

$p_2 \cap p_3$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$ | $+\frac{1}{2}x^2$

$x^2 = -1$

$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D < 0$.

# Lösung W3b/2014

## Lösungslogik

Punktproben mit $A(1|2)$ führen zur vollständigen Parabelgleichungen $p_1$ und $p_2$. Schnittpunkt $B$ der beiden Parabeln über Gleichsetzung der beiden Gleichungen. Scheitelpunktbestimmung von $p_1$ und $p_2$ mit anschließender Steigungsberechnung der Geraden $S_1B$ und $S_2A$ beweisen Lucas Aussage.

## Klausuraufschrieb

*Funktionsgleichungen Parabeln $p_1$ und $p_2$:*

$p_1$: $y = x^2 + px - 1$

$2 = 1 - p - 1$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$

$p = -2$

$y = x^2 - 2x - 1$

$p_2$: $y = -x^2 + c$

$2 = -1 + c$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$

$c = 3$

$y = -x^2 + 3$

*Schnittpunkte von $p_1$ mit $p_2$:*

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 3$ | $+x^2;\ -3$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$ | $:2$

$x^2 - x - 2 = 0$ | $p/q$-Formel

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5$

$x_1 = 2;\ x_2 = -1$

$y_1 = -2^2 + 3 = -1$

*Der Punkt $B$ hat die Koordinaten $B(2|-1)$.*

*Scheitelpunkte $S_1$ und $S_2$ von $p_1$ und $p_2$:*

$S_1$: $y = (x-1)^2 - 2$ | Scheitelpunktform von $p_1$

$S_1(1|-2)$

$S_2$: $S_2(0|3)$ | aus Gleichung ablesbar

*Steigung der Geraden durch $S_1$ und $B$:*

$m_{S_1B}$: $m = \frac{y_B - y_{S_1}}{x_B - x_{S_1}} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = 1$

*Steigung der Geraden durch $S_2$ und $A$:*

$m_{S_2A}$: $m = \frac{y_A - y_{S_2}}{x_A - x_{S_2}} = \frac{2-3}{-1-0} = 1$

*Wegen $m_{S_1B} = m_{S_2A}$ hat Luca Recht.*

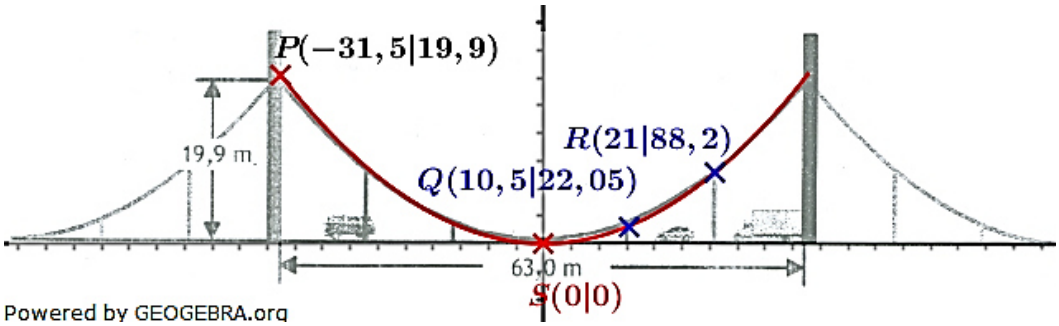
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

*Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2014-2015*

# Lösung W4b/2014

## Lösungslogik

a) Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels sowie einem Aufhängepunkt des Seils am linken (oder rechten) Pylon. Mithilfe dieser Punkte kann die nach oben geöffnete Parabel mittels einer Gleichung beschrieben werden.




b) Die Gesamtbreite zwischen den Pylonen beträgt $63\,m$ und ist in Bezug auf die Drahtseile in sechs gleiche Strecken unterteilt. Somit haben die Tragseile einen Abstand von jeweils $10{,}50\,m$. In der Mitte (Scheitelpunkt) befindet sich kein Tragseil. Da die Parabel symmetrisch zur $y$–Achse ist, benötigen wir für die Länge der Seile lediglich die Länge des kurzen sowie des langen Seils auf der rechten Seite. Diese Längen mal $4$ ergibt dann die Gesamtlänge der Seile.

## Klausuraufschrieb

a) Scheitelpunkt der Parabel: $S(0|0)$, linker Aufhängepunkt (Pylon) $P(-31{,}5|19{,}9)$. Gleichung einer nach oben geöffnete Parabel im Scheitelpunkt $S(0|0)$ ist

$p$: $y = ax^2$ | Punktprobe mit $P$:

$19{,}9 = a \cdot (-31{,}5)^2 \Longrightarrow a = \frac{19{,}9}{(-31{,}5)^2} = 0{,}02$

*Die Gleichung der Parabel lautet* $y = 0{,}02 \cdot x^2$

b) *Anzahl kurzer Tragseile:* $4$*, Anzahl langer Tragseile:* $4$

Abstand kurzes Tragseil vom Ursprung: $10{,}5\,m$

Abstand langes Tragseil vom Ursprung: $21\,m$

Länge kurzes Tragseil $l_{kurz} = 0{,}02 \cdot 10{,}5^2 = 2{,}205\,m$

Länge langes Tragseil $l_{lang} = 0{,}02 \cdot 21^2 = 8{,}82\,m$

Gesamtlänge Seile: $l_{gesamt} = 4 \cdot (l_{kurz} + l_{lang}) = 4 \cdot (2{,}205 + 8{,}82) = 44{,}1\,m$

*Die Gesamtlänge der Seile beträgt* $44{,}1\,m$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

*Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2014-2015*

# Lösung W3a/2015

## Lösungslogik

*Parabelgleichung:*
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$. In der Wertetabelle lesen wir den Punkt $P(0|11)$ ab, was zu $c = 11$ führt ($c$ ist $y$–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit einem der beiden anderen gegebenen Punkte errechnen wir $b$.
*Wertetabelle:*
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichung ermitteln wir die fehlenden $y$–Werte.
*Gerade $g$:*
Mit der gegebenen Steigung $m = -1$ lautet die allgemeine Gleichung $y = -x + b$.
Mithilfe einer Punktprobe mit $P(-2{,}5|6)$ errechnen wir $b$.
Anschließend schneiden wir die Parabel $p$ mit der Geraden $g$ und stellen fest, dass die daraus entstehende Gleichung keine Lösung hat.
*Gerade $h$:*
Wegen Parallelität hat auch $h$ die Steigung $m = -1$. Wir ermitteln zunächst den Scheitelpunkt $S$ der Parabel $p$, machen eine Punktprobe mit der Geraden $h$ und erhalten die vollständige Geradengleichung.
Wir setzen diese Geradengleichung auf $0$, lösen nach $x$ auf und erhalten dadurch den Schnittpunkt von $h$ mit der $x$–Achse.

## Klausuraufschrieb

*Parabelgleichung:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p$: | $y = x^2 + bx + c$ | \| | allgemeine Form der Parabel |
| | $S_y(0\|11)$ | \| | Schnittpunkt mit der $y$-Achse |
| | $y = x^2 + bx + 11$ | | |
| | $P_1(1\|6);\ P_2(4\|3)$ | \| | Punkte aus Wertetabelle |
| | $6 = 1^2 + b + 11$ | \| | Punktprobe mit $P_1$ |
| | $6 - 12 = b \implies b = -6$ | | |

*Die Gleichung der Parabel lautet $y = x^2 - 6x + 11$.*
*Wertetabelle:*

| | | |
|---|---|---|
| $y_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3$ | \| | $y$-Wert für $x = 2$ |
| $y_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2$ | \| | $y$-Wert für $x = 3$ |
| $y_5 = 6$ | \| | $y$-Wert für $x = 5$ |

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 11 | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 |

*Gerade $g$:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g$: | $y = -x + b$ | \| | Geradengleichung mit $m = -1$ |
| | $P(-2{,}5\|6)$ | | |
| | $6 = -(-2{,}5) + b$ | \| | Punktprobe mit $P(-2{,}5\|6)$ |
| | $6 - 2{,}5 = b \implies b = 3{,}5$ | | |
| | $y = -x + 3{,}5$ | | |
| $p \cap g$: | $x^2 - 6x + 11 = -x + 3{,}5$ | \| | Schnittpunkte durch Gleichsetzung |
| | $x^2 - 5x + 7{,}5 = 0$ | \| | $p/q$-Formel |
| | $x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 7{,}5}$ | | |
| | $x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{-0{,}75}$ | | |

*Wegen $D < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung und damit haben $p$ und $g$ keine gemeinsamen Punkte.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

*Gerade $h$:*

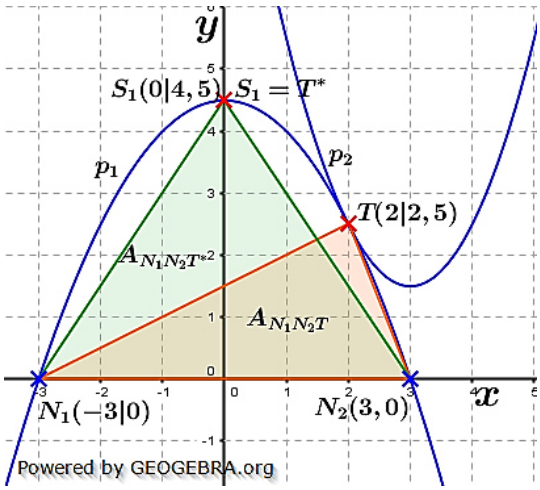
| | | | |
|---|---|---|---|
| $S_p$: | $y = x^2 - 6x + 11$ | \| | Parabelgleichung von $p$ |
| | $y = (x-3)^2 - 9 + 11$ | \| | quadratische Ergänzung |
| | $y = (x-3)^2 + 2$ | \| | Scheitelpunktform von $p$ |
| | $S_p(3\|2)$ | \| | Koordinaten des Scheitels |
| $h$: | $y = -x + b$ | \| | Geradengleichung mit $m = -1$ |
| | $2 = -3 + b$ | \| | Punktprobe mit $S_p(3\|2)$ |
| | $b = 5$ | | |
| | $y = -x + 5$ | | |
| | $0 = -x + 5 \Longrightarrow \ x = 5$ | \| | Schnittpunkt mit der $x$-Achse |

*Die Koordinaten des Schnittpunktes von $h$ mit der $x$–Achse sind $R(5|0)$.*

## Lösung W3b/2015

### Lösungslogik

*Parabelgleichungen:*
Für die Parabel $p_1$ lesen wir $c$ aus dem gegebenen Scheitelpunkt $S_1$ mit 4,5 ab. ($c$ ist $y$–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $N_1$ oder $N_2$ errechnet sich $a$.
Für die Parabel $p_2$ stellen wir die Scheitelpunktgleichung auf und wandeln diese in die allgemeine Form um.




*Gemeinsamer Punkt:*
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichungen ermitteln wir den gemeinsamen Punkt $T$ durch Gleichsetzung.
*Dreieck $N_1N_2T$:*
Die Basis des Dreiecks ist die Strecke zwischen $N_1$ und $N_2$. Die Höhe des Dreiecks entspricht der $y$–Koordinate des Punktes $T$.
*Maximaler Flächeninhalt für Dreieck $N_1N_2T^*$*
$T$ wandert auf $p_1$ oberhalb der $x$–Achse nach $T^*$. Im Scheitel von $p_1$ ist der $y$–Wert des Punktes $T^*$ maximal und damit auch die Höhe des Dreiecks $N_1N_2T^*$ sowie dessen Fläche.

### Klausuraufschrieb

*Parabelgleichungen:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p_1$: | $y = ax^2 + c$ | | |
| | $S_1(0\|4{,}5)$ | \| | Schnittpunkt mit der $y$-Achse |
| | $c = 4{,}5$ | | |
| | $y = ax^2 + 4{,}5$ | | |
| | $N_1(-3\|0);\ N_2(3\|0)$ | \| | gegebene Punkte |
| | $0 = 3^2a + 4{,}5$ | \| | Punktprobe mit $N_2$ |
| | $-4{,}5 = 9a \ \Longrightarrow \ a = -\frac{1}{2}$ | | |

*Die Gleichung der Parabel $p_1$ lautet $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$.*

$p_2$: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelpunktform
$S_2(3|1{,}5)$ | gegebener Scheitel
$y = (x-3)^2 + 1{,}5$
$y = x^2 - 6x + 10{,}5$

*Die Gleichung der Parabel $p_2$ lautet $y = x^2 - 6x + 10{,}5$.*

*Gemeinsamer Punkt:*

$p_1 \cap p_2$: $x^2 - 6x + 10{,}5 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$ | $\cdot \frac{2}{3}$
$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$ | $p/q$-Formel
$x_T = 2$
$y_T = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4{,}5 = 2{,}5$

*Der gemeinsame Punkt $T$ hat die Koordinaten $T(2|2{,}5)$.*

*Dreieck $N_1N_2T$:*

$A_{N_1N_2T}$: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ | Flächenformel Dreieck
$c = \overline{N_1N_2} = 6$
$h_c = y_T = 2{,}5$
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$

*Das Dreieck $N_1N_2T$ hat eine Fläche von $7{,}5\ FE$.*

*Dreieck $N_1N_2T^*$:*

Die $y$–Koordinate von $T^*$ auf $p_1$ ist dann am größten, wenn $T$ in den Scheitelpunkt $S_1$ von $p_1$ wandert. Diese ist jedoch $4{,}5$. Damit ist auch die Dreiecksfläche $N_1N_2T^*$ am größten.

$A_{N_1N_2T^*}$: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ | Flächenformel Dreieck
$c = \overline{N_1N_2} = 6$
$h_c = y_{T^*} = 4{,}5$
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$

*Mit $T^*$ im Scheitelpunkt von $p_1$ hat das Dreieck $N_1N_2T^*$ eine Fläche von $13{,}5\ FE$.*

## Lösung W4b/2015

<u>Lösungslogik</u>

Aus der Skizze lesen wir ab, dass die $y$–Achse des Koordinatensystems gleichzeitig Symmetrieachse der Wurfparabel ist. Damit befindet sich der Abwurfpunkt bei $P(-4{,}3|2{,}2)$.

*Parabelgleichung und Wurfweite von David:*

Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass sich der Scheitel der Parabel bei $S_{David}(0|3{,}9)$ befindet. Damit ist $c = 3{,}9$ ($c$ ist $y$–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $P(-4{,}3|2{,}2)$ errechnen wir $a$.

Die Weite, die David stößt, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Parabel mit der $x$–Achse für ein positives $x$. Dem errechneten Wert müssen noch $4{,}3\ m$ zugeschlagen werden wegen der Abwurfstelle bei $x = -4{,}3$.

*Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2014-2015*

*Wurfweite von Tom:*

Die Parabelgleichung ist gegeben, über die Angabe der Abwurfhöhe von $1{,}9\,m$ müssen wir zunächst die $x$-Position $Q(x|1{,}9)$von Tom feststellen. Die Wurfweite von Tom ergibt sich dann wie die Wurfweite von David über die Rechte Nullstelle von Toms Parabelgleichung zuzüglich der -Koordinate des o.a. Punkts $Q$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

*Parabelgleichungen und Wurfweite von David:*

$p_{David}$: $y = ax^2 + c$

$S_1(0|3{,}9)$ | Schnittpunkt mit der $y$-Achse

$c = 3{,}9$

$y = ax^2 + 3{,}9$

$P(-4{,}3|2{,}2)$ | Abwurfstelle David

$2{,}2 = (-4{,}3)^2 a + 3{,}9$ | Punktprobe mit $P$

$-1{,}7 = 18{,}49a$

$a = -\frac{1{,}7}{18{,}49} = -0{,}092$

$y = -0{,}092x^2 + 3{,}9$

$-0{,}092x^2 + 3{,}9 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0{,}092x^2 = 3{,}9$ | $:0{,}092$

$x^2 = \frac{3{,}9}{0{,}092} = 42{,}3913$ | $\sqrt{\phantom{x}}$

$x_1 = 6{,}51$

$w_{David} = 6{,}51 + 4{,}3 = 10{,}81$

*David stößt $10{,}81\,m$ weit.*

*Wurfweite von Tom:*

$p_{Tom}$: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5$

Sei Q der Abstoßpunkt, dann gilt:

$1{,}90 = -\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5$ | $\cdot 10;\ +x^2;\ -19$

$x^2 = 35 - 19 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$

Da sich die Abwurfstelle links des Ursprungs befindet, gilt:

$Q(-4|1{,}9)$

Berechnung des rechten Auftreffpunktes der Kugel:

$-\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0{,}1x^2 = 3{,}5$ | $:0{,}1$

$x^2 = \frac{3{,}5}{0{,}1} = 35$ | $\sqrt{\phantom{x}}$

$x_1 = 5{,}92$

$w_{Tom} = 5{,}92 + 4 = 9{,}92$

*Tom stößt $9{,}92\,m$ weit.*

$w_{David} - w_{Tom} 10{,}81 - 9{,}92 = 0{,}89$

*David stößt um $0{,}89\,m$ weiter als Tom.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de