Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-heute

Lösung W3a/2019

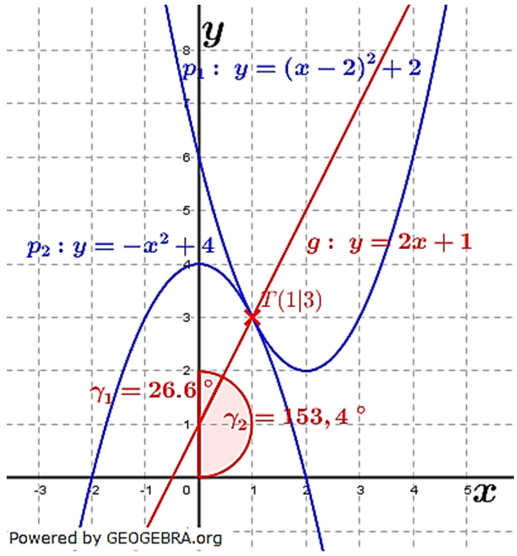
Lösungslogik

Parabelgleichung p_1:
Mit dem gegebenen Scheitelpunkt $S(2|2)$ die Scheitelpunktgleichung aufstellen.

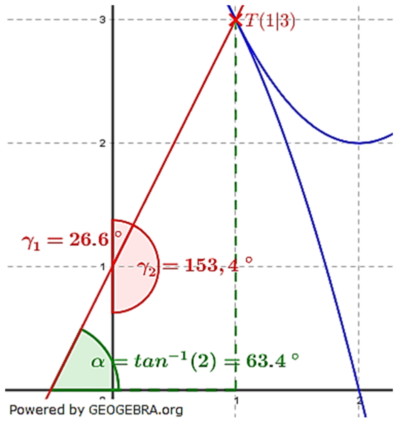
Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ und der Parabelgleichung $y = -x^2 + c$ die Parabelgleichung aufstellen.

Schnittpunkt T:
Wir schneiden p_1 mit p_2 und erhalten den Schnittpunkt T.

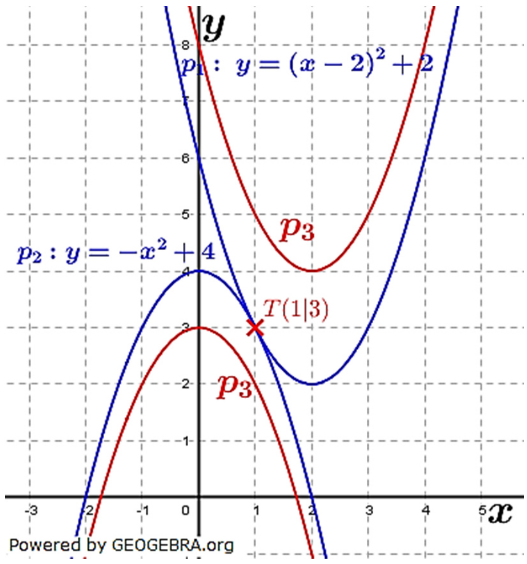
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = 2$ und der Geradengleichung $y = mx + b$ sowie einer Punktprobe mit T erhalten wir die Gleichung von g.



Schnittwinkel von g mit der y-Achse:
Der Winkel, den einer Gerade g mit der x-Achse einschließt errechnet sich aus dem tan der Steigung m (Siehe Formel-sammlung $m = tan\,(\alpha)$.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.
Der Winkel γ_1 ist Ergänzungs-Winkel zu $90°$ von α, der Winkel γ_2 ist Ergänzungs-Winkel zu $180°$ von γ_1.



Parabelgleichung p_3:
Parabeln, die weder p_1 noch p_2 schneiden, müssen im inneren der gegebenen Parabeln verlaufen, siehe nachfolgende Grafik. Somit ist p_3 entweder eine in y-Richtung nach oben verschobene Parabel p_1 oder aber eine weiter nach unten verschobene Parabel p_2.



Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-heute

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1: $y = (x - x_S)^2 + y_S$	|	Scheitelpunktform der Parabel
$y = (x-2)^2 + 2$	|	Scheitelpunkt $S(2\|2)$ einsetzen.

Parabelgleichung p_2:

p_2: $y = -x^2 + c$	|	Normalform einer nach unten Geöffneten Parabel mit Scheitel $(0\|c)$
$0 = -2^2 + c$	|	Punktprobe mit $N_1(2\|0)$
$c = 4$		
$y = -x^2 + 4$		

Schnittpunkt T von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:

$(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4$		
$x^2 - 4x + 4 + 2 = -x^2 + 4$	|	$+x^2$
$2x^2 - 4x + 6 = 4$	|	-4
$2x^2 - 4x + 2 = 0$	|	$:2$
$x^2 - 2x + 1 = 0$		
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$	|	p/q-Formel

$x_1 \rightarrow p_2$:

$y = -1^2 + 4 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $T(1|3)$.

Gerade g:

$y = mx + b$	|	allgemeine Geradengleichung
$y = 2x + b$	|	Steigung $m = 2$ ist gegeben
$3 = 2 \cdot 1 + b$	|	Punktprobe mit $T(1\|3)$
$b = 1$		

Die Gleichung der Geraden g lautet $y = 2x + 1$.

Schnittwinkel von g mit der y-Achse:

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = m$

$\alpha = tan^{-1}(m) = tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

Schnittwinkel 1 (γ_1) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von α zu 90 °:

$\gamma_1 = 90\,° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Schnittwinkel 2 (γ_2) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von γ_1 zu 180 °:

$\gamma_2 = 180\,° - 26{,}6° = 153{,}4°$

Die beiden Schnittwinkel von g mit der y-Achse sind $\gamma_1 = 26{,}6°$ und $\gamma_2 = 153{,}4°$ groß.

Parabelgleichung p_3:

Die Parabel muss innerhalb von p_1 oder aber innerhalb von p_2 verlaufen. Damit entweder Verschiebung von p_1 in y-Richtung nach oben, alternativ Verschiebung von p_2 in y-Richtung nach unten.

$p_3 = p_1 + 2 = (x-2)^2 + 4$ | alternativ

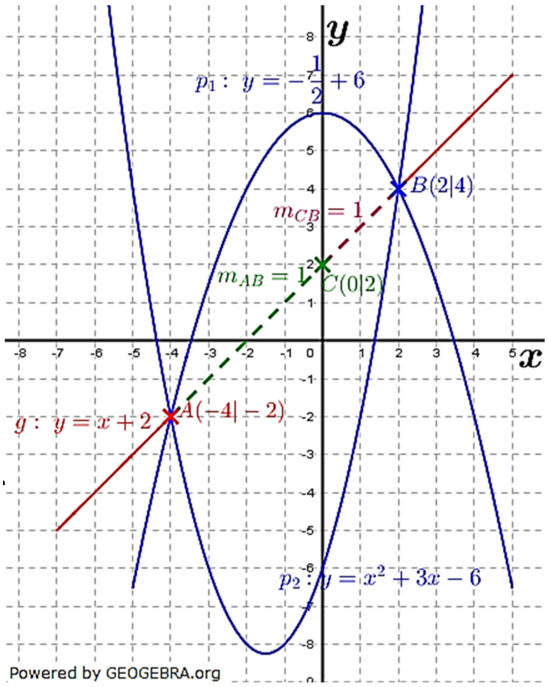
$p_3 = p_2 - 1 = -x^2 + 3$

Andere Verschiebungen denkbar.

Lösung W3b/2019

Lösungslogik

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:
Sowohl der Punkt $S(0|6)$ als auch der Punkt $B(2|4)$ sind Parabelpunkte. Durch Punktproben ermitteln wir die Parameter a und c.
Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:
Der Punkt $B(2|4)$ ist Parabelpunkt. Durch eine Punktprobe ermitteln wir den Parameter q.
Zweiter Schnittpunkt A:
Schnittpunktermittlung durch Gleichsetzung.
Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:
Drei Punkte A, B und C liege dann auf einer Geraden g wenn die Steigung der Strecke $\overline{AB}$ mit der Steigung der Strecke $\overline{BC}$ übereinstimmt.
Alternativ:
Aufstellung einer Geradengleichung durch die Punkte A und B mit anschließender Punktprobe mit C.



Klausuraufschrieb

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:

p_1: $6 = a \cdot 0 + c$ | Punktprobe mit $S(0|6)$
$c = 6$
$4 = a \cdot 2^2 + 6$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4a = -2$
$a = -\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:

p_2: $4 = 2^2 + 3 \cdot 2 + q$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4 = 10 + q$
$4 = -6$
$y = x^2 + 3x - 6$

Zweiter Schnittpunkt A:

$p_1 \cap p_1$:
$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = x^2 + 3x - 6$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 = 0$ | $\frac{1}{2}x^2$; -6; $\cdot\frac{2}{3}$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$ | p/q-Formel
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -4$

$x_1; x_2 \longrightarrow p_1$
$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 = 4$ ==> Punkt $B(2|4)$
$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 6 = -2$ ==> Punkt $A(-2|-4)$
$A(-2|-4)$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(-2|-4)$.

Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:

m_{AB}: *Steigung Strecke* $\overline{AB}$:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$$

m_{BC}: *Steigung Strecke* $\overline{BC}$:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-4}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Wegen $m_{AB} = m_{BC}$ *liegen die drei Punkte* A, B *und* C *auf einer Geraden.*

Alternativ: Gerade durch A und B:

g: $y = mx + b$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$$

$y = x + b$

$4 = 2 + b$ | Punktprobe mit B

$b = 2$

$2 = 0 + 2$ | Punktprobe mit C

$2 = 2$ | wahre Aussage

Die Punkte A, B *und* C *liegen auf einer Geraden.*

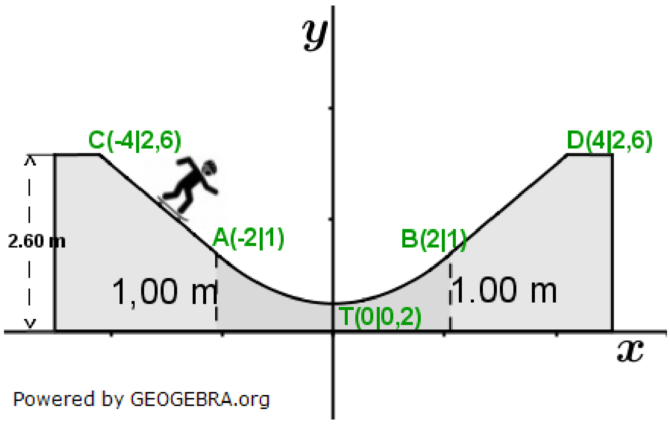
Lösung W4b/2019

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden und die y-Achse durch den Punkt T verläuft.

Wir versehen die einzelnen Punkte mit ihren Koordinaten (siehe Grafik rechts).



Für den Parabelbogen AB gilt:

Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt T. Die Parabel ist in x-Richtung unverschoben und in y-Richtung um $0{,}2\,m$ nach oben verschoben.

Die Punkte A und B erfüllen die Funktionsgleichung der Parabel.

Parabelgleichung p*:*

Die Parabel hat die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$. Wegen $T(0|0{,}2)$ ist $c = 0{,}2$. Über eine Punktprobe mit $B(2|1)$ errechnen wir a.

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$*:*

Wir bestimmen die Gleichung einer Geraden durch die zwei Punkte $A(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt in $T(0|0{,}2)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Parabelgleichung p:

$S(0|0{,}2)$ | Scheitelpunkt der Parabel
$y = ax^2 + 0{,}2$
$B(2|1)$ | Punkt der Parabel
$1 = 2^2 \cdot a + 0{,}2$ | Punktprobe mit B
$0{,}8 = 4a$
$a = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$

Die Parabelgleichung lautet: $y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

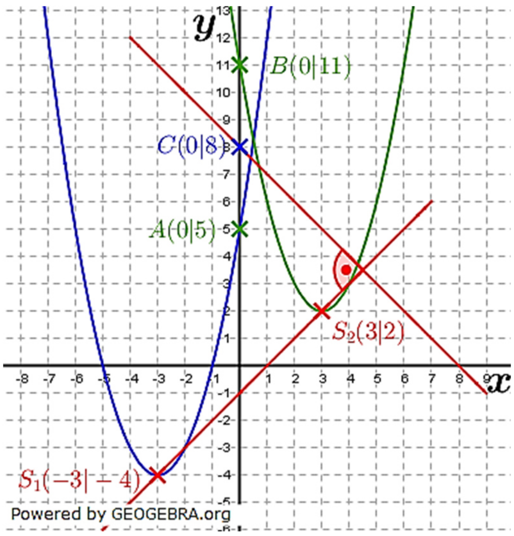
Die Gerade verläuft durch die Punkte $B(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.
$y = mx + c$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}6-1}{4-2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$
$y = 0{,}8x + c$
$1 = 0{,}8 \cdot 2 + c$ | Punktprobe mit B:
$c = -0{,}6$

Die Geradengleichung lautet $y = 0{,}8x - 0{,}6$.

Lösung W3a/2020

<u>Lösungslogik</u>

Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen können wir die Nullstellengleichung mit $y = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2})$ aufstellen und daraus die Normalform $y = x^2 + px + q$ der Parabelgleichung bilden und erhalten über q die Koordinaten des Schnittpunktes A.



Parabel 2:
Über die gegebene Funktionsgleichung bestimmen wir die Koordinaten von B.

Gerade g:
Wir berechnen die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2. Die Funktionsgleichung der Geraden dann über diese beiden Punkte.

Schnittwinkel g und h:
Wir bestímmen den Mittelpunkt C der Strecke $\overline{AB}$. Gerade h hat die gegebene Steigung $m_h = -1$. Gerade g hat die Steigung $m_g = 1$. Die Orthogonalitätsbedingung $m_h \cdot m_g = -1$ ist damit erfüllt, die beiden Geraden schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-2020

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1

p_1: $y = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2})$

$y = (x+5)(x+1)$ | ausmultiplizieren

$y = x^2 + 6x + 5$

A: Wegen $q = 5$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $A(0|5)$.

Parabelgleichung p_2

p_2: $y = x^2 - 6x + 11$

B: Wegen $q = 11$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $B(0|11)$.

Scheitelpunkte p_1 und p_2:

S_1: $y = x^2 + 6x + 5$

$y = (x+3)^2 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$ | Quadratische Ergänzung

$S_1(-3|-4)$

S_2: $y = x^2 - 6x + 11$

$y = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$ | Quadratische Ergänzung

$S_2(3|2)$

Gerade g:

g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_{S_2} - y_{S_1}}{x_{S_2} - x_{S_1}} = \frac{2-(-4)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$

$y = x + b$

$S_1 \rightarrow g$:

$-4 = -3 + b$

$b = -1$

$y = x - 1$

Schnittwinkel von g und h:

$m_g = 1;\quad m_h = -1$

$m_g \cdot m_h = 1 \cdot (-1) = -1$

Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt. g und h schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

Lösung W3b/2020

Lösungslogik

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:

Wir setzen die gegebene Funktionsgleichung auf 0 und lösen nach x auf.

Punkt C:

Wir schneiden $y = x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von C.

Punkt D

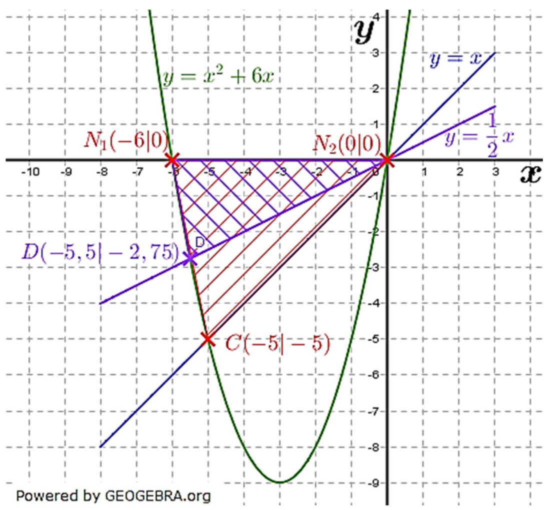
Wir schneiden $y = \frac{1}{2}x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von D.

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:

über $A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_C$.

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:

über $A_{N_1N_2D} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_D$.



Realschulabschluss Funktionen (Gerade, Parabel) (Wahlteil) 2019-2020

<u>Klausuraufschrieb</u>

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:

$x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$ | x ausklammern

$x_1=0;\quad x_2=-6$ | Satz vom Nullprodukt

$N_1(-6|0);\quad N_2(0|0)$

Punkt C:

$y=x\cap p$

$x^2+6x=x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2+5x=0$

$x(x+6)=0$ | x ausklammern

$x_1=0;\quad x_2=-5$ | Satz vom Nullprodukt

$x_2\to y$

$y=(-5)^2+6\cdot(-5)=-5$

$C(-5|-5)$

Punkt D:

$y=\frac{1}{2}x\cap p$

$x^2+6x=\frac{1}{2}x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2+5{,}5x=0$

$x(x+5{,}5)=0$ | x ausklammern

$x_1=0;\quad x_2=-5{,}5$ | Satz vom Nullprodukt

$x_2\to y$

$y=(-5{,}5)^2+6\cdot(-5{,}5)=-2{,}75$

$C(-5{,}5|-2{,}75)$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:

$A_{N_1N_2C}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{N_1N_2}\cdot y_C$

$A_{N_1N_2C}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15\,FE$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:

$A_{N_1N_2D}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{N_1N_2}\cdot y_D$

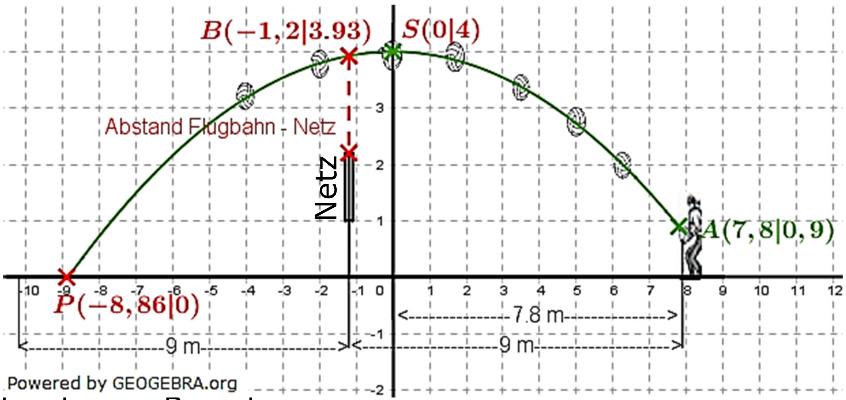
$A_{N_1N_2C}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2{,}75=8{,}25\,FE$

Wegen $8{,}25\neq 15$ hat Peter nicht recht.

Lösung W4b/2020

Lösungslogik

Die Grafik verdeutlicht die Lösungssituation.



Funktionsgleichung Parabel:
In y-Richtung verschobene nach unten geöffnete Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$.
Scheitelpunkt ist $S(0|4)$.
Der Abwurfpunkt ist Punkt der Parabel.
Wir machen eine Punktprobe zur Berechnung von a.
Abstand Überflug Netz:
Dies ist die Differenz aus der Höhe des Balls bei $x = -1,2$ und der Höhe des Netzes.
Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
Wir bestimmen die linke Nullstelle der Parabelgleichung.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung Parabel:
$y = ax^2 + c$
Scheitelpunkt ist $S(0|4)$
$y = ax^2 + 4$
Abwurfpunkt ist $A(7,8|0,9)$.
$A \rightarrow p$
$0,9 = a \cdot 7,8^2 + 4 \qquad | \quad -4;\ :7,8^2$
$a = -0,051$
$y = -0,051x^2 + 4$

Abstand Überflug Netz:
Höhe des Balls bei $x = -1,2$:
$y = -0,051 \cdot (-1,2)^2 + 4 = 3,93$
$d = 3,93 - 2,24 = 1,69$
Der Abstand des Balls beim Überflug des Netzes zum Netz beträgt $1,69\ m$.

Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
$-0,051x^2 + 4 = 0 \qquad | \quad +0,051x^2;\ :0,051$
$x^2 = 78,4314 \qquad | \quad \sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 8,86$
Es interessiert hier nur die linke Nullstelle, somit $P(-8,86|0)$.
$10,2 - 8,86 = 1,34$
Der Ball trifft in einer Entfernung von $1,34\ m$ zur Grundlinie auf dem Boden auf.