Themenerläuterung

Das Thema „Gleichungen" verlangt von dir die Bestimmung der Lösungsmenge eines Gleichungsterms mit der Unbekannten x. Den gestellten Term musst du nach den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen umstellen. Dabei musst du vor allem die Regeln „Potenzrechnung vor Klammern", „Klammern vor Punktrechnung", „Punktrechnung vor Strichrechnung" beachten. In der Regel entsteht nach korrekter Umformung eine quadratische Gleichung, deren Lösungsmenge mit der „Mitternachtsformel" zu bestimmen ist.
Zur korrekten Lösung dieser Aufgaben ist die Kenntnis über die erste, zweite und dritte binomische Formel unabdingbar.

Die wichtigsten benötigten Formeln

1. 1. binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. 2. binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. 3. binomische Formel $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
4. Lösungsformel für quadratische Gleichungen (p/q-Formel)

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Lösen Sie die Gleichung:

$-11x + 19 + (2x-3)\cdot(3x+4) = (x-1)^2 + (x+1)^2$ $\mathbb{L} = \{0{,}5; 2{,}5\}$

Aufgabe A2

Lösen Sie die Gleichung:

$(x-2)\cdot(x+2) + 2(x-4)^2 = x(x-11) + 35$ $\mathbb{L} = \{-1; 3{,}5\}$

Aufgabe A3

Lösen Sie die Gleichung:

$-(x+5)^2 + 2x + 24 = (x-2)^2 + (x-3)\cdot(x+3)$ $\mathbb{L} = \{-2; \frac{2}{3}\}$

Aufgabe A4

Lösen Sie die Gleichung:

$-2(x-3)^2 + (x-3)\cdot(x+5) = 5(-3+5x)$ $\mathbb{L} = \{-9; -2\}$

Aufgabe A5

Lösen Sie die Gleichung:

$-(x+5)^2 + (x-4)^2 + 5(2x+5) = -5(x+2)\cdot(x-2)$ $\mathbb{L} = \{-\frac{2}{5}; 2\}$

Aufgabe A6

a) Ermitteln Sie zunächst die Lösungsmenge der Gleichung.
b) Was besagt diese über die Lage der zur entsprechenden Funktionsgleichung gehörenden Parabeln?

$2x(x-4) + 17 + 4x = -(x+1)\cdot(x-1) + (x+2)^2$ $\mathbb{L} = \{\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung:

$-11x + 19 + (2x - 3) \cdot (3x + 4) = (x - 1)^2 + (x + 1)^2$

Lösungsschritte:

1. *Klammern auflösen*
   $-11x + 19 + 6x^2 + 8x - 9x - 12 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1$
2. *Zusammenfassen:*
   $6x^2 - 12x + 7 = 2x^2 + 2$
3. *Ordnen, alle Elemente rechts des Gleichheitszeichens auf die linke Seite bringen.:*
   $6x^2 - 12x + 7 = 2x^2 + 2 \quad | \quad -2x^2;\ -2$
   $4x^2 - 12x + 5 = 0$
4. *Weitere Vereinfachung:*
   $4x^2 - 12x + 5 = 0 \quad | \quad :4$
   $x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$
5. *Auflösung über die Mitternachtsformel:*
   $x_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$ $\qquad x_{1,2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 1{,}25}$
   $x_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}}$ $\qquad x_{1,2} = +1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 1{,}25}$
   $x_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{1}$ $\qquad x_{1,2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1}$
   $x_1 = \frac{5}{2};\quad x_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad x_1 = 2{,}5;\quad x_2 = 0{,}5$
6. *Lösungsmenge aufschreiben*
   $\mathbb{L} = \{\mathbf{\frac{1}{2}}; \mathbf{\frac{5}{2}}\}$ $\qquad \mathbb{L} = \{0{,}5; 2{,}5\}$

Lösung A2

$(x - 2) \cdot (x + 2) + 2(x - 4)^2 = x(x - 11) + 35$ | Ausmultiplizieren
$x^2 - 4 + 2(x^2 - 8x + 16) = x^2 - 11x + 35$ | Restklammer auflösen
$x^2 - 4 + 2x^2 - 16x + 32 = x^2 - 11x + 35$ | Zusammenfassen
$3x^2 - 16x + 28 = x^2 - 11x + 35$ | $-x^2; +11x; -35$ Ordnen
$2x^2 - 5x - 7 = 0$ | $:2$ | Vorbereitung p/q
$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{7}{2}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{56}{16}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{9}{4}$

$x_1 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5;\quad x_2 = -\frac{4}{4} = -1$

$\mathbb{L} = \{-1; 3{,}5\}$

Lösung A3

$-(x + 5)^2 + 2x + 24 = (x - 2)^2 + (x - 3) \cdot (x + 3)$ | Ausmultiplizieren
$-(x^2 + 10x + 25) + 2x + 24 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 9$ | Restklammer auflösen
$-x^2 - 10x - 25 + 2x + 24 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 9$ | Zusammenfassen
$-x^2 - 8x - 1 = 2x^2 - 4x - 5$ | $-2x^2; +4x; +5$ Ordnen
$-3x^2 - 4x + 4 = 0$ | $:(-3)$ Vorbereitung p/q
$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{12}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = -\frac{6}{3} = -2$

$\mathbb{L} = \{-2; \frac{2}{3}\}$

Lösung A4

$-2(x-3)^2 + (x-3)\cdot(x+5) = 5(-3+5x)$	|	Ausmultiplizieren
$-2(x^2-6x+9) + x^2 + 5x - 3x - 15 = -15 + 25x$	|	Restklammer auflösen
$-2x^2 + 12x - 18 + x^2 + 2x - 15 = -15 + 25x$	|	Zusammenfassen
$-x^2 + 14x - 33 = -15 + 25x$	|	$+15; -25x;$ Ordnen
$-x^2 - 11x - 18 = 0$	|	$\cdot(-1)$ Vorbereitung p/q
$x^2 + 11x + 18 = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = -5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 - 18} = -5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 18} = -5{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = -5{,}5 \pm 3{,}5$

$x_1 = -2; \quad x_2 = -9$

$\mathbb{L} = \{-9; -2\}$

Lösung A5

$-(x+5)^2 + (x-4)^2 + 5(2x+5) = -5(x+2)\cdot(x-2)$	|	Ausmultiplizieren
$-(x^2+10x+25) + x^2 - 8x + 16 + 10x + 25 = -5(x^2-4)$	|	Restklammer auflösen
$-x^2 - 10x - 25 + x^2 + 2x + 41 = -5x^2 + 20$	|	Zusammenfassen
$-8x + 16 = -5x^2 + 20$	|	$+5x^2; -20;$ Ordnen
$5x^2 - 8x - 4 = 0$	|	$:(5)$ Vorbereitung p/q
$x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{4}{5} = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{20}{25}} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{4}{5} \pm \frac{6}{5}$

$x_1 = \frac{2}{5}; \quad x_2 = 2$

$\mathbb{L} = \{\frac{2}{5}; 2\}$

Lösung A6

$2x(x-4) + 17 + 4x = -(x+1)\cdot(x-1) + (x+2)^2$	|	Ausmultiplizieren
$2x^2 - 8x + 17 + 4x = -(x^2-1) + x^2 + 4x + 4$	|	Restklammer auflösen
$2x^2 - 8x + 17 + 4x = -x^2 + 1 + x^2 + 4x + 4$	|	Zusammenfassen
$2x^2 - 4x + 17 = 5 + 4x$	|	$-5; -4x;$ Ordnen
$2x^2 - 8x + 12 = 0$	|	$:(2)$ Vorbereitung p/q
$x^2 - 4x + 6 = 0$	|	p/q-Formel
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-6} = 2 \pm \sqrt{-2}$	|	$D < 0 \Longrightarrow$ keine Lösung

a) $\mathbb{L} = \{\}$

b) Wenn die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung leer ist, besitzt die zur Gleichung gehörende Parabel keinen Schnittpunkt mit der x–Achse.

Realschulabschluss Gleichungen (Pflichtteil) ab 2003
4 Aufgaben im Dokument

Aufgabe P3/2005

Lösen Sie die Gleichung:

$2(2x-5)\cdot(3x+4)-(2-3x)^2=(x+3)^2+67$ $\qquad \mathbb{L}=\{-6;10\}$

Aufgabe P5/2007

Lösen Sie die Gleichung:

$\frac{x^2+x+4}{3}+\frac{(x-2)\cdot(x+3)}{2}=\frac{(x-1)^2}{3}$ $\qquad \mathbb{L}=\{-4;1\}$

Aufgabe P4/2013

Lösen Sie die Gleichung:

$(3x+1)^2+x(5-4x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)(6x+2)-11$ $\qquad \mathbb{L}=\{-7;-1\}$

Aufgabe P6/2017

Lösen Sie die Gleichung:

$(2x-1)(2x+1)-x(x-2)=(x-5)^2+6$ $\qquad \mathbb{L}=\{-8;2\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung P3/2005

$2(2x-5)\cdot(3x+4)-(2-3x)^2=(x+3)^2+67$ | Ausmultiplizieren

$2(6x^2+8x-15x-20)-(4-12x+9x^2)=x^2+6x+9+67$ | Restklammer auflösen

$12x^2-14x-40-4+12x-9x^2=x^2+6x+76$ | Zusammenfassen

$3x^2-2x-44=x^2+6x+76$ | $-x^2;-6x;-76;$

$2x^2-8x-120=0$ | $:(2)$

$x^2-4x-60=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+60}=2\pm\sqrt{64}=2\pm 8$

$x_1=10;\quad x_2=-6$

$\mathbb{L}=\{-6;10\}$

Lösung P5/2007

$\frac{x^2+x+4}{3}+\frac{(x-2)\cdot(x+3)}{2}=\frac{(x-1)^2}{3}$ | mit HN 6 multiplizieren

$2(x^2+x+4)+3(x-2)\cdot(x+3)=2(x-1)^2$ | Ausmultiplizieren

$2x^2+2x+8+3(x^2+3x-2x-6)=2(x^2-2x+1)$ | Restklammer auflösen

$2x^2+2x+8+3x^2+3x-18=2x^2-4x+2$ | Zusammenfassen

$5x^2+5x-10=2x^2-4x+2$ | $-2x^2;+4x;-2$

$3x^2+9x-12=0$ | $:(3)$

$x^2+3x-4=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+4}=-1{,}5\pm\sqrt{6{,}25}=-1{,}5\pm 2{,}5$

$x_1=1;\quad x_2=-4$

$\mathbb{L}=\{-4;1\}$

Lösung P4/2013

$(3x+1)^2+x(5-4x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)(6x+2)-11$ | ausmultiplizieren

$9x^2+6x+1+5x-4x^2=3x^2+x-6x-2-11$ | Zusammenfassen

$5x^2+11x+1=3x^2-5x-13$ | $-3x^2;\ +5x;\ +13$

$2x^2+16x+14=0$ | $:2$

$x^2+8x+7=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{16-7}=-4\pm\sqrt{9}=-4\pm 3$

$x_1=-7;\quad x_2=-1$

$\mathbb{L}=\{-7;-1\}$

Lösung P6/2017

$(2x-1)(2x+1)-x(x-2)=(x-5)^2+6$ | ausmultiplizieren

$4x^2-1-x^2+2x=x^2-10x+25+6$ | Zusammenfassen

$3x^2+2x-1=x^2-10x+31$ | $-x^2;\ +10x;\ -31$

$2x^2+12x-32=0$ | $:2$

$x^2+6x-16=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+16}=-3\pm\sqrt{25}=-3\pm 5$

$x_1=2;\quad x_2=-8$

$\mathbb{L}=\{-8;2\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de