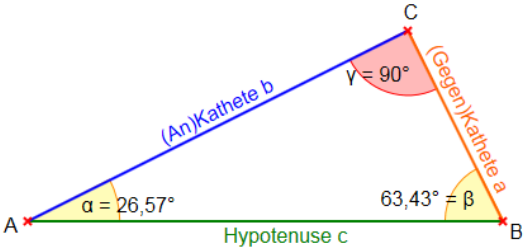
Themenerläuterung

In diesem Kapitel bekommst du Teile von Abmessungen von Spitzkegeln bzw. Kugeln genannt, wie z. B. Radius, Kegelhöhe, Seitenkante, Mantel, Oberfläche und Volumen. Aus diesen Teilangaben sollst du dann die anderen, nicht angegebenen Kennzahlen der Körper errechnen.
In wenigen Fällen wird auch das Zeichnen eines Schrägbildes oder der Abwicklung eines Kegels gefordert.

Die wichtigsten benötigten Formeln

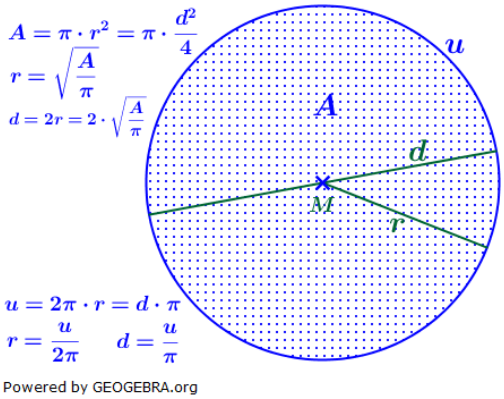
1. *Satz des Pythagoras*
   Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:
   $$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
   $$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
   $$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2. *Die trigonometrischen Formeln*
   $$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$
   $$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$
   $$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$
   Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.



   Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.
   Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. *Kreis und Kreisausschnitt*
   Kreis:
   Für die Fläche A eines Kreises mit Radius r und Durchmesser d gilt:
   $$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$
   $$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$
   $$d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$
   Für den Umfang u eines Kreises mit Radius r und Durchmesser d gilt:
   $$u = 2\pi \cdot r = d \cdot \pi$$
   $$r = \frac{u}{2\pi}; \qquad d = \frac{u}{\pi}$$



Kreisausschnitt:

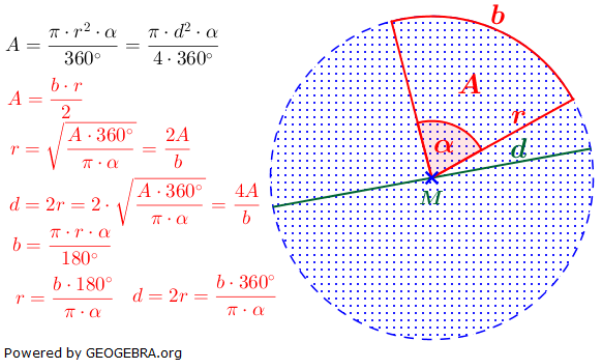
Für die Fläche A des Kreisausschnitts eines Kreises mit Radius r bzw. Durchmesser d und Öffnungswinkel α gilt:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360°} \text{ bzw.}$$

$$A = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{A \cdot 360°}{\pi \cdot \alpha}} = \frac{2A}{b}$$

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot 360°}{\pi \cdot \alpha}} = \frac{4A}{b}$$



Für die Länge des Kreisbogens b des Kreisausschnitts eines Kreises mit Radius r bzw. Durchmesser d und Öffnungswinkel α gilt:

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = \frac{2 \cdot A}{r}$$

$$r = \frac{b \cdot 180°}{\pi \cdot \alpha} = \frac{2A}{b}$$

$$d = 2 \cdot r = \frac{b \cdot 360°}{\pi \cdot \alpha} = \frac{4A}{b}$$

4. *Kreiskegel*

Für einen geraden Kreiskegel mit Grundkreisradius r bzw. –durchmesser d, der Höhe h und der Länge der Seitenkante s gilt:

Volumen:

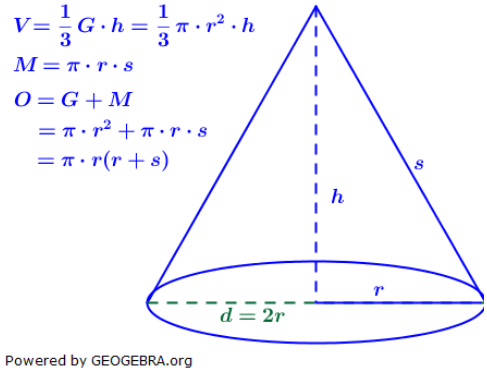
$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{12} \pi \cdot d^2 \cdot h$$

Mantel:

$$M = \pi \cdot r \cdot s = \frac{1}{2} \pi \cdot d \cdot s$$

Oberfläche:

$$O = G + M = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$
$$= \pi r (r + s)$$



5. *Kugel und Halbkugel*

Für eine Kugel mit Radius r bzw. Durchmesser d gilt:

Volumen:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{1}{12} \pi \cdot d^3$$

Oberfläche:

$$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

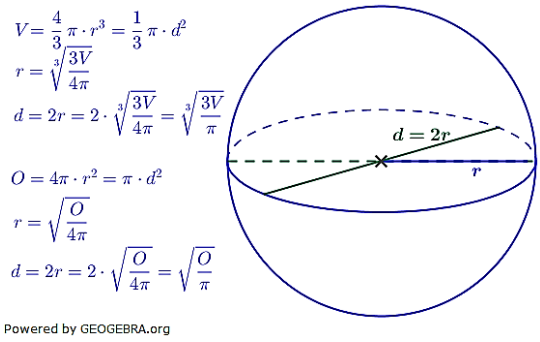
Radius bzw. Durchmesser:

Bei gegebenem Volumen V gilt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

Bei gegebener Oberfläche O gilt:

$$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$$



Für eine Halbkugel mit Radius r bzw. Durchmesser d gilt:

<u>Volumen:</u>

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot d^2$$

<u>Oberfläche:</u>

$$O = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 = \frac{3}{4}\pi d^2$$

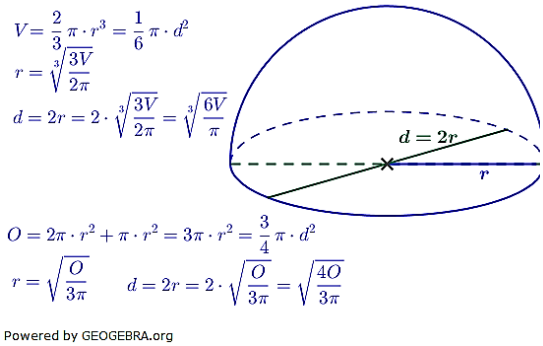
<u>Radius bzw. Durchmesser:</u>

Bei gegebenem Volumen V gilt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Bei gegebener Oberfläche O gilt:

$$r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{O}{3\pi}} = \sqrt{\frac{4O}{3\pi}}$$



6. *Besondere Werte für* $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ und $\boldsymbol{tan}$

Einige Aufgaben sind in Abhängigkeit einer sogenannten „Formvariablen" gestellt. Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.

In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe 30°, 45°, 60° bzw. 90°. Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in deiner Formelsammlung.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$sin\alpha$	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0
$cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0	$-0{,}5$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$--$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Der Umfang u der Grundfläche eines Kreiskegels ist $28{,}9\ cm$ lang.
Die Oberfläche O beträgt $222\ cm^2$.
Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels. Lösung: $V = 217{,}2\ cm^3$

Aufgabe A2

Ein Kreiskegel mit dem Volumen $V = 2658\ cm^3$ ist $28{,}7\ cm$ hoch.
Berechnen Sie den Radius r der Kugel, deren Oberfläche genau so groß ist, wie die des Kegels. Lösung: $r = 9{,}65\ cm$

Aufgabe A3

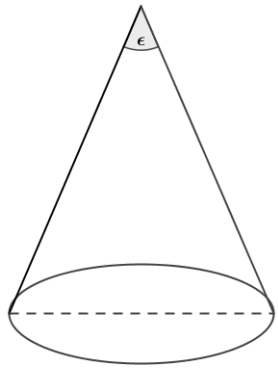
Auf der Grundfläche eines Kreiskegels ist eine Halbkugel aufgesetzt worden. Es gilt:

$M_{Kegel} = 276\ cm^2$
$r = 8{,}6\ cm$

Berechnen Sie das Gesamtvolumen des zusammengesetzten Körpers.
Lösung: $V = 1760\ cm^3$

Aufgabe A4

Die Grundfläche eines Kreiskegels ist $74{,}8\ cm^2$ groß. Der Winkel ϵ beträgt $73{,}0°$.
Berechnen Sie die Oberfläche des Zylinders, der denselben Radius und dieselbe Höhe wie der Kreiskegel besitzt.
Lösung: $O_{Zyl} = 352\ \boldsymbol{cm^2}$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe A5

Von einem Kegel sind das Volumen und der Grundkreisradius bekannt.

$V = 321{,}4\ cm^3$
$r = 5{,}1\ cm.$

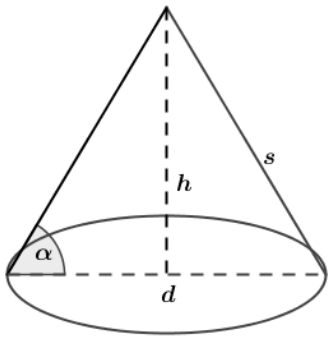
Die Mantellinie s wird um die Hälfte verlängert. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Oberfläche des Körpers zunimmt.
Lösung: $n_{\sim}\ \% = 126{,}8\ \%$

Aufgabe A6

Gegeben sei ein Kreiskegel mit

Körperhöhe $h = 5e$
Winkel $\alpha = 60°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für die Mantelfläche gilt: $M = 16\frac{2}{3}\pi e^2$.



Powered by GEOGEBRA.org

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de