Themenerläuterung

Das Thema „Lineare Gleichungssyteme“ verlangt von dir die Bestimmung der Lösungsmenge eines Gleichungsterms aus zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x und y. Die beiden gestellten Terme musst du nach den Regeln der Äquivalenzumformung in die Form $y = mx + b$ bringen. Dabei musst du vor allem die Regeln „Potenzrechnung vor Klammern“, „Klammern vor Punktrechnung“, „Punktrechnung vor Strichrechnung“ beachten. Es entstehen jedes Mal zwei Gleichungen, deren Lösungsmenge mit dem „Einsetzungs-“, „Gleichsetzungs-“ bzw. „Additions- (Subtraktions-)verfahren“ zu bestimmen ist. Ich empfehle dir, das „Additions- (Subtraktions-)verfahren“ zu verwenden, weil damit die wenigsten Fehler passieren. In diesen Dokumenten wird ausschließlich das „Additions-(Subtraktions-)verfahren“ verwendet.

Die wichtigsten benötigten Formeln

1. Kommutativgesetz (vertauschen von Variablen)
   $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$
2. Distributivgesetz (ausmultiplizieren)
   Faktor mal Klammer: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   Klammer mal Klammer: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
3. Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)
   $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Addition / Subtraktion
   $a + a + a = 3a$ $\qquad$ $-a - a - a = -3a$
5. Multiplikation / Division
   $a \cdot a = +a^2$ $\qquad$ $a \cdot (-a) = -a^2$ $\qquad$ $(-a) \cdot a = -a^2$ $\qquad$ $(-a) \cdot (-a) = +a^2$
   $a : b = +\frac{a}{b}$ $\qquad$ $a : (-b) = -\frac{a}{b}$ $\qquad$ $(-a) : b = -\frac{a}{b}$ $\qquad$ $(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $3y - 2x = 11$

(2) $\frac{4}{3}y = 14\frac{1}{3} - x$ $\qquad$ $\mathbb{L} = \{(5; 7)\}$

Aufgabe A2

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $y = -4x + 14$

(2) $2y - 11{,}8 + 15x = 40{,}7 + 8y$ $\qquad$ $\mathbb{L} = \{(3{,}5; 0)\}$

Aufgabe A3

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $-2(-3{,}5y + 4x) + 3(x - 2y) = 17$

(2) $-\frac{5}{2}x + 5y = 17{,}5$ $\qquad$ $\mathbb{L} = \{(-3; 2)\}$

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A4

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $4\left(2y+\frac{1}{2}x\right)+7=-31$

(2) $-35y+7(-1+x)=49$ $\mathbb{L}=\{(-7;-3)\}$

Aufgabe A5

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $3(y-2x)-2(1{,}5x+32{,}5)=22$

(2) $2{,}5x-5(-y+1)=0$ $\mathbb{L}=\{(-8;5)\}$

Aufgabe A6

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $5(-x+3)+y=-6$

(2) $2(-2{,}5x+3{,}5y)=11-4(2x-1{,}5y)$ $\mathbb{L}=\{(4;-1)\}$

Aufgabe A7

a) Ermitteln Sie zunächst die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

b) Was besagt diese über die Lage der beiden zu den entsprechenden Funktionsgleichungen gehörenden Graphen aus?

(1) $-4y-\frac{3}{5}x=4-5y$

(2) $-\frac{1}{5}x+y-\frac{2}{5}x=-2{,}5$ $\mathbb{L}=\{\}$

Hinweis zu den Lösungen
Hier wird ausschließlich das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren verwendet. Auf das Einsetzungs- bzw. Gleichsetzungsverfahren wird wegen dessen Fehleranfälligkeit komplett verzichtet.

Lösung A1

Detaillierte Lösung:

(1) $3y - 2x = 11$

(2) $\frac{4}{3}y = 14\frac{1}{3} - x$

Lösungsschritte:

1. *Umformen beider Gleichungen in die Form $y = ax + b$.*

(1) $3y - 2x = 11 \quad | \quad +2x;\ :3$

(2) $\frac{4}{3}y = 14\frac{1}{3} - x \quad | \quad \cdot\frac{3}{4}$

(1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

(2) $y = \frac{43}{4} - \frac{3}{4}x$

2. *Umstellung von (2) nach dem Kommutativgesetz*

(1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

(2) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{4} \quad | \quad \cdot(-1)$ nur für Additionsverfahren

3. Additionsverfahren

(1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

(2) $-y = +\frac{3}{4}x - \frac{43}{4}$

4. *Additions- bzw. Subtraktionsverfahren durchführen*

Additionsverfahren

(1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

(2) $-y = +\frac{3}{4}x - \frac{43}{4}$

(1)+(2) $0 = \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{11}{3} - \frac{43}{4}$

Subtraktionsverfahren

(1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

(2) $y = -\frac{3x}{4} + \frac{43}{4}$

(1)-(2) $0 = \frac{2}{3}x - \left(-\frac{3}{4}x\right) + \frac{11}{3} - \frac{43}{4}$

Wie du siehst, kommt bei beiden Verfahren dasselbe Ergebnis raus.

5. *Zusammenfassen*

$0 = \frac{8x+9x}{12} + \frac{44-129}{12}$

$0 = \frac{17x}{12} - \frac{85}{12} \quad | \quad \cdot 12;\ +85$

6. *Vereinfachen*

$85 = 17x \quad | \quad :17$

7. *Nach x auflösen*

$x = \frac{85}{17} = 5$

8. *Das errechnet x in Gleichung (1) wahlweise Gleichung (2) einsetzen zur Errechnng des y–Wertes.*

(1) $y = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{11}{3} = \frac{10}{3} + \frac{11}{3} = \frac{21}{3} = 7$

9. *Lösungsmenge aufschreiben*

$\mathbb{L} = \{(5; 7)\}$

Lösung A2

(1)	$y = -4x + 14$	
(2)	$2y - 11{,}8 + 15x = 40{,}7 + 8y$	$-8y; -15x; +11{,}8$
(1)	$y = -4x + 14$	
(2)	$-6y = -15x + 52{,}5$	$:6$
(1)	$y = -4x + 14$	
(2)	$-y = -2{,}5x + 8{,}75$	
(1)+(2)	$0 = -6{,}5x + 22{,}75$	$+6{,}5x$
	$6{,}5x = 22{,}75$	$:6{,}5$
	$x = 3{,}5 \longrightarrow (1)$	
(1)	$y = -4 \cdot 3{,}5 + 14 = 0$	
	$\mathbb{L} = \{(3{,}5; 0)\}$	

Lösung A3

(1)	$-2(-3{,}5y + 4x) + 3(x - 2y) = 17$	ausmultiplizieren
(2)	$-\frac{5}{2}x + 5y = 17{,}5$	$+\frac{5}{2}x$
(1)	$7y - 8x + 3x - 6y = 17$	zusammenfassen
(2)	$5y = \frac{5}{2}x + 17{,}5$	$:5$
(1)	$y - 5x = 17$	$+5x$
(2)	$y = \frac{1}{2}x + 3{,}5$	$\cdot(-1)$
(1)	$y = 5x + 17$	
(2)	$-y = -\frac{1}{2}x - 3{,}5$	
(1)+(2)	$0 = 4{,}5x + 13{,}5$	$-4{,}5x$
	$-4{,}5x = 13{,}5$	$:(-4{,}5)$
	$x = -3 \longrightarrow (1)$	
(1)	$y = 5 \cdot (-3) + 17 = 2$	
	$\mathbb{L} = \{(-3; 2)\}$	

Lösung A4

(1)	$4\left(2y + \frac{1}{2}x\right) + 7 = -31$	ausmultiplizieren
(2)	$-35y + 7(-1 + x) = 49$	ausmultiplizieren
(1)	$8y + 2x + 7 = -31$	$-2x;\ -7$
(2)	$-35y - 7 + 7x = 49$	$-7x;\ +7$
(1)	$8y = -2x - 38$	$:8$
(2)	$-35y = -7x + 56$	$:35$
(1)	$y = -0{,}25x - 4{,}75$	
(2)	$-y = -0{,}2x + 1{,}6$	
(1)+(2)	$0 = -0{,}45x - 3{,}15$	$+0{,}45x$
	$0{,}45x = -3{,}15$	$:(0{,}45)$
	$x = -7 \longrightarrow (1)$	
(1)	$y = -0{,}25 \cdot (-7) - 4{,}75 = -3$	
	$\mathbb{L} = \{(-7; -3)\}$	

Lösung A5

(1)	$3(y-2x)-2(1{,}5x+32{,}5)=22$	|	ausmultiplizieren
(2)	$2{,}5x-5(-y+1)=0$	|	ausmultiplizieren
(1)	$3y-6x-3x-65=22$	|	zusammenfassen
(2)	$2{,}5x+5y-5=0$	|	$-2{,}5x;\ +5$
(1)	$3y-9x-65=22$	|	$+9x;\ +65$
(2)	$5y=-2{,}5x+5$	|	$:5$
(1)	$3y=9x+87$	|	$:3$
(2)	$y=-0{,}5x+1$	|	$\cdot(-1)$
(1)	$y=3x+29$		
(2)	$-y=0{,}5x-1$		
(1)+(2)	$0=3{,}5x+28$	|	$-3{,}5x$
	$-3{,}5x=28$	|	$:(-3{,}5)$
	$x=-8\ \longrightarrow\ (1)$		
(1)	$y=3\cdot(-8)+29=5$		
	$\mathbb{L}=\{(-8;5)\}$		

Lösung A6

(1)	$5(-x+3)+y=-6$	|	ausmultiplizieren
(2)	$2(-2{,}5x+3{,}5y)=11-4(2x-1{,}5y)$	|	ausmultiplizieren
(1)	$-5x+15+y=-6$	|	$+5x;\ -15$
(2)	$-5x+7y=11-8x+6y$	|	$-6y;\ +5x$
(1)	$y=5x-21$		
(2)	$y=-3x+11$		
(1)-(2)	$0=5x-(-3x)-21-11$		
	$0=8x-32$	|	$+32$
	$32=8x$	|	$:8$
	$x=4\ \longrightarrow\ (1)$		
(1)	$y=5\cdot4-21=-1$		
	$\mathbb{L}=\{(4;-1)\}$		

Lösung A7

(1)	$-4y-\frac{3}{5}x=4-5y$	|	$\cdot5$
(2)	$-\frac{1}{5}x+y-\frac{2}{5}x=-2{,}5$	|	$\cdot5$
(1)	$-20y-3x=20-25y$	|	$+25y+3x$
(2)	$-x+5y-2x=-12{,}5$	|	$+3x$
(1)	$5y=3x+20$		
(2)	$5y=3x-12{,}5$		
(1)-(2)	$0=0+20-(-12{,}5)$		
	$0\neq32{,}5$		

a) $\mathbb{L}=\{\}$

b) Ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems leer, verlaufen die zu den Funktionsgleichungen gehörenden Geraden in einem Koordinatensystem parallel, sie haben keinen Schnittpunkt.