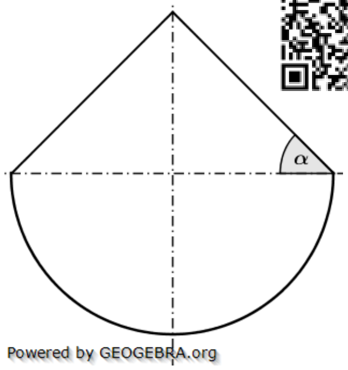
Aufgabe P1/2003

Ein Körper besteht aus einer Halbkugel und einem aufgesetzten Kegel mit $\alpha = 45°$ (siehe Achsenschnitt).
Das Volumen der Halbkugel beträgt $204\ cm^3$.
Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

Lösung: $O = 227{,}0\ cm^2$



Aufgabe P2/2003

Ein quadratisches Prisma und eine quadratische Pyramide haben gleich große Grundflächen.
Das Prisma hat eine Höhe $h = 5{,}0\ cm$ und die Grundkante $a = 3{,}0\ cm$.
Das Volumen der Pyramide ist halb so groß wie das Volumen des Prismas.
Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Lösung: $h_{Pyr} = 2{,}5\ cm$

Aufgabe P3/2003

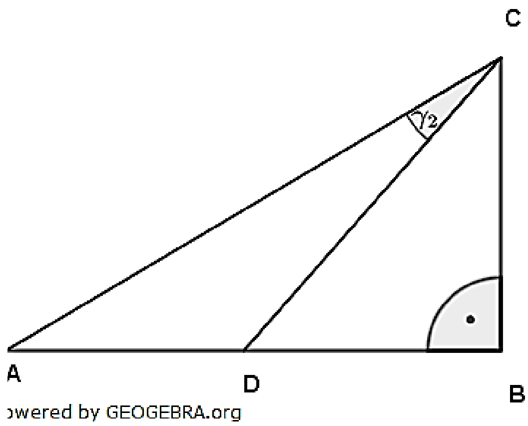
Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind gegeben:

$\overline{BC} = 3{,}3\ cm$
$\overline{DC} = 4{,}4\ cm$
$\gamma_2 = 18{,}1°$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ADC.

Lösung: $A_{ADC} = 4{,}4\ cm^2$

Tipp: Trigonometrischen Flächeninhalt für Fläche des Dreiecks ADC.



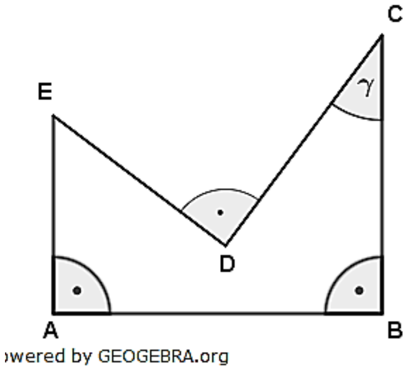
Aufgabe P4/2003

In der Figur $ABCDE$ sind gegeben:

$\overline{BC} = 7{,}0\ cm$
$\overline{CD} = 6{,}6\ cm$
$\overline{DE} = 5{,}4\ cm$
$\gamma = 37{,}0°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{AE}$.

Lösung: $\overline{AE} = 5\ cm$



Aufgabe P5/2003

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{2x^2+x-9}{x-1} = x + 5$ $\quad\quad$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\quad \mathbb{L} = \{-1; 4\}$

Aufgabe P6/2003

Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat den Scheitelpunkt $S(2|-3)$. Die Gerade g hat die Steigung $m = 1$ und schneidet die Parabel in $P(4|1)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts von Parabel und Gerade.

Lösung: $Q(1|-2)$

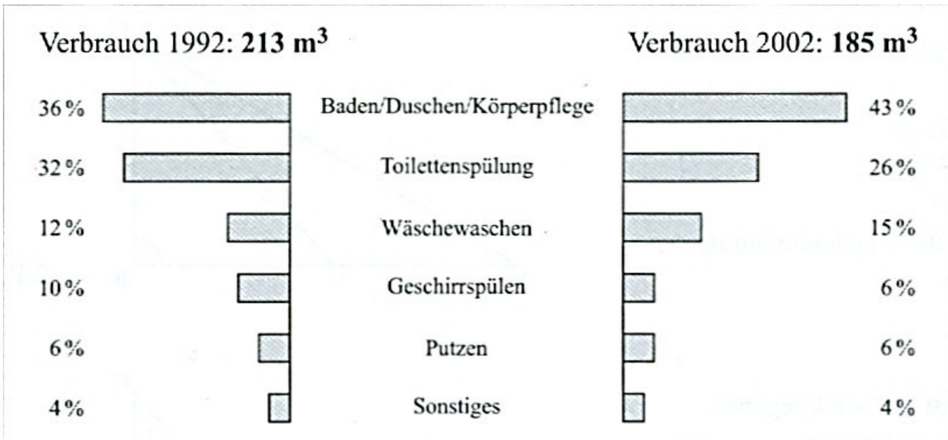
Aufgabe P7/2003

Karl-Anton legt am Anfang eines Jahres einen bestimmten Geldbetrag bei der Bank an. Der jährlich gleichbleibende Zinssatz beträgt 3,5 %. Zinsen werden mitverzinst.
Nach Ablauf des ersten Jahres hebt er 700,00 € ab, nach Ablauf des zweiten Jahres 500,00 €. Am Ende des dritten Jahres beträgt sein Sparguthaben 3.721,87 €
Berechnen Sie den ursprünglich angelegten Betrag.

Lösung: 4500,00 €

Aufgabe P8/2003

Das Diagramm zeigt die Aufteilung des Wasserverbrauchs eines Vier-Personen-Haushalts in den Jahren 1992 und 2002.



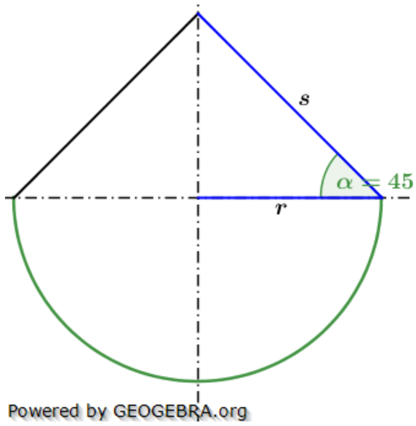
Um wie viel Prozent liegt der Wasserverbrauch 2002 unter dem von 1992? Wie viel m^3 Wasser wurden im Jahr 2002 für die Toilettenspülung weniger verbraucht als 1992?
Wie viel Liter Wasser wurden in dem Haushalt im Jahr 2002 für das Geschirrspülen pro Tag durchschnittlich verbraucht?

Lösung: Wasserverbrauch 2002 zu 1992: $-13{,}1\,\%$
Minderverbrauch Toilettenspülung $\approx 20\,m^3$
Täglicher Verbrauch Geschirrspüler $0{,}03\,m^3$

Lösung P1/2003

Lösungslogik

Berechnung von r über das gegebene Volumen der Halbkugel.
Berechnung von s über den $cos45°$.
Berechnung von M_{Kegel}.
Berechnung von $O_{Halbkugel}$.
Berechnung der Oberfläche des Körpers.



Klausuraufschrieb

r: $\quad V_{HK} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \quad | \quad \cdot 3;\ :(2\pi);\ \sqrt[3]{\ }$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{HK}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 204}{2\pi}} = 4{,}60$$

s: $\quad cos\alpha = \frac{r}{s} \quad | \quad \cdot s;\ :cos\alpha$

$$s = \frac{r}{cos\alpha} = \frac{4{,}60}{cos45°} = 6{,}50$$

M_{Kegel}: $\quad M_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 4{,}6 \cdot 6{,}50 = 93{,}93$

O_{HK}: $\quad O_{HK} = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 4{,}6^2 = 132{,}95$

$O_{Körper}$: $\quad O_{Körper} = O_{HK} + M_{Kegel} = 132{,}95 + 93{,}93 = 226{,}88$

Die Oberfläche des Körpers beträgt $227\ cm^2$.

Lösung P2/2003

Lösungslogik

Berechnung des Volumens des quadratischen Prismas über die Volumenformel.
Bestimmung des Volumens der Pyramide.
Berechnung der Höhe der Pyramide über die Volumenformel der Pyramide.

Klausuraufschrieb

V_{Prisma}: $\quad V_{Prisma} = G \cdot h = a^2 \cdot h = 3^2 \cdot 5 = 45$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = 0{,}5 \cdot V_{Prisma} = 0{,}5 \cdot 45 = 22{,}5$

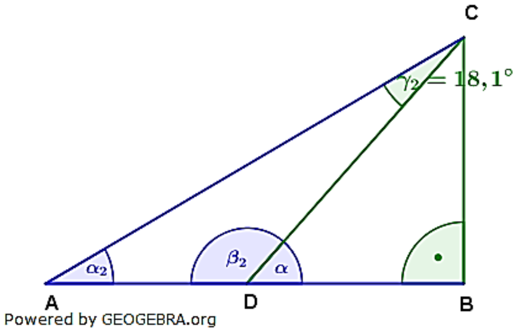
h_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h_{Pyr} \quad | \quad \cdot 3;\ :a^2$

$$h_{Pyr} = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{3 \cdot a^2} = \frac{V_{Pyr}}{a^2} = \frac{22{,}5}{9} = 2{,}5$$

Die Höhe der Pyramide beträgt $2{,}5\ cm$.

Lösung P3/2003

Lösungslogik



Das Dreieck ADC ist ein stumpfwinkliges Dreieck, bei dem die Strecke $\overline{BC}$ die Höhe auf die Grundseite $\overline{AD}$ ist.
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
Alternativ kann die Fläche über die trigonometrische Flächenformel
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} \cdot sin\gamma_2$ ermittelt werden.
Berechnung von α über den sin.
Berechnung von β_2.
Berechnung von α_2.
Berechnung $\overline{DB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung $\overline{AB}$ über den $tan\alpha_2$.
Berechnung $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung $\overline{AD}$.
Berechnung A_{ADC} über Flächenformel Dreieck alternativ trigonometrischer Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$, alternativ $A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} \cdot sin\gamma_2$,

α: $\quad sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{3,3}{4,4} = 0,75$

$\quad \alpha = sin^{-1}(0,75) = 48,59°$

β_2: $\quad \beta_2 = 180° - \alpha = 180° - 48,59° = 131,41°$

α_2: $\quad \alpha_2 = 180° - \gamma_2 - \alpha_2 = 180° - 18,1° - 131,41° = 30,49°$

$\overline{DB}$: $\quad \overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2 = 4,4^2 - 3,3^2 = 8,47 \quad | \quad \sqrt{}$

$\quad \overline{DB} = 2,91$

$\overline{AB}$: $\quad tan\alpha_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}; \ : tan\alpha_2$

$\quad \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan\alpha_2} = \frac{3,3}{tan 30,49°} = 5,6$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 5,6^2 + 3,3^2 = 42,25 \quad | \quad \sqrt{}$

$\quad \overline{AC} = 6,5$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 5,6 - 2,91 = 2,69$

A_{ADC}: $\quad A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2,69 \cdot 3,3 = 4,44\ cm^2 \quad |$ Dreiecksformel

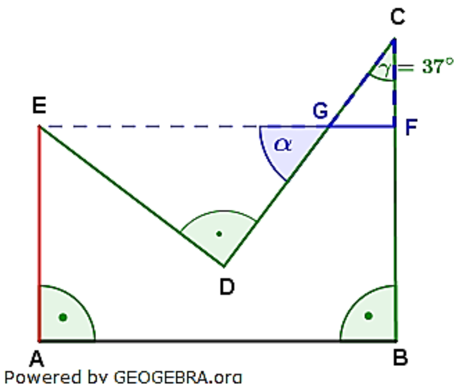
$\quad A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 4,4 \cdot sin 18,1° = 4,44 \quad |$ trigonometrische Fläche

Das Dreieck ADC hat eine Fläche von etwa $4,4\ cm^2$.

Lösung P4/2003

Lösungslogik

Die Strecke $\overline{AE}$ errechnet sich aus der Strecke $\overline{BC}$ abzüglich der Strecke $\overline{CF}$.
Berechnung von α über den Scheitelwinkel.
Berechnung von $\overline{DG}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{GC}$.
Berechnung $\overline{FC}$ über $cos\gamma$.
Berechnung $\overline{AE} = \overline{FB}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{AE} = \overline{BC} - \overline{FC}$

α: $\quad \alpha = 90° - \gamma = 90° - 37° = 53°$

$\overline{DG}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{DG}} \qquad | \quad \cdot \overline{DG};\ : tan\alpha$

$\overline{DG} = \frac{\overline{ED}}{tan\alpha} = \frac{5{,}4}{tan53°} = 4{,}07$

$\overline{GC}$: $\quad \overline{GC} = \overline{DC} - \overline{DG} = 6{,}6 - 4{,}07 = 2{,}53$

$\overline{FC}$: $\quad cos\gamma = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} \qquad | \quad \cdot \overline{GC}$

$\overline{FC} = \overline{GC} \cdot cos\gamma = 2{,}53 \cdot cos37° = 2{,}02$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE} = \overline{BC} - \overline{FC} = 7{,}0 - 2{,}02 \approx 5{,}0$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist $5\ cm$ lang.

Lösung P5/2003

$$\frac{2x^2 + x - 9}{x - 1} = x + 5$$

Nenner 1:	$x - 1$
Nenner 2:	1
Hauptnenner:	$(x - 1)$

$(x - 1) = 0$ für $x_1 = 1$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\frac{(2x^2+x-9)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = (x + 5) \cdot (x - 1)$

$2x^2 + x - 9 = (x + 5) \cdot (x - 1) \qquad |$ ausmultiplizieren

$2x^2 + x - 9 = x^2 + 4x - 5 \qquad | \quad -x^2;\ -4x;\ +5$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad | \quad p/q$-Formel

$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = -1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 1; \quad x_2 = -4$

$\mathbb{L} = \{-4; 1\}$

Lösung P6/2003

Lösungslogik

Bestimmung der Parabelgleichung über die Scheitelpunktgleichung mit $S(2|-3)$.
Bestimmung der Geradensteigung mit $m=1$ und $P(4|1)$.
Gleichsetzung von Parabel- und Geradengleichung ergibt Schnittpunkte.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung von p mit Scheitelpunkt $S(2|-3)$:

p: $y=(x-x_s)^2+y_s$

$y=(x-2)^2-3$ | Scheitelpunktgleichung über $S(2|-3)$

$y=x^2-4x+1$ | allgemeine Parabelgleichung

Geradengleichung g durch $P(4|1)$ mit $m=1$:

g: $y=mx+b$

$1=1\cdot 4+b$ | Punktprobe Gerade mit $P(4|1)$ und $m=1$

$b=-3$

$y=x-3$

Schnittpunkte von p mit g:

$p\cap g$ $x^2-4x+1=x-3$ | Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen

$x^2-5x+4=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-4}$

$x_{1,2}=2{,}5\pm\sqrt{2{,}25}=2{,}5\pm 1{,}5$

$x_1=4;\quad x_2=1$

$x_2\longrightarrow g$

$y_2=x_2-3=1-3=-2$

Der zweite Schnittpunkt ist $Q(1|-2)$.

Lösung P7/2003

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 3 Jahre mit festem Zinssatz.
Gegeben: $n=3$ Jahre; $K_3=3721{,}87$ € Endkapital, $q=1{,}035$ für alle Jahre.
Abhebungen nach dem ersten Jahr $700{,}00$ € und nach dem zweiten Jahr $500{,}00$ €.
Gesucht: *Anfangskapital* K_0

Rein rechnerische Lösung (einfach)

$K_3=\big((K_0\cdot q-700)\cdot q-500\big)\cdot q$

$3721{,}87=\big((K_0\cdot 1{,}035-700)\cdot 1{,}035-500\big)\cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$

$3596{,}01=(K_0\cdot 1{,}035-700)\cdot 1{,}035-500$ | $+500$

$4096{,}01=(K_0\cdot 1{,}035-700)\cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$

$3957{,}50=K_0\cdot 1{,}035-700$ | $+700$

$4657{,}50=K_0\cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$

$K_0=4500$

Der ursprünglich angelegte Betrag war 4.500 €.

Tabellarische Lösung (umständlich):

Jahr	Kapital am Jahresende	Zinssatz $p\%$	q	Zinsen	Kapital am Jahresanfang
3	3721,87 €	3,50 %	1,035	125,86 €	3596,01 €
2	4096,01 €	3,50 %	1,035	138,51 €	3957,50 €
1	4657,50 €	3,50 %	1,035	157,50 €	4500,00 €

Beachte: Bei der tabellarischen Lösung musst du von „hinten nach vorne" rechnen.

$K_{3_{Anfang}} = \frac{K_{3_{Ende}}}{q} = \frac{3721{,}87}{1{,}035} = 3596{,}01$

$K_{2_{Ende}} = K_{3_{Anfang}} + 500 = 3596{,}01 + 500 = 4096{,}01$

$K_{2_{Anfang}} = \frac{K_{2_{Ende}}}{q} = \frac{4096{,}01}{1{,}035} = 3957{,}50$

$K_{1_{Ende}} = K_{2_{Anfang}} + 700 = 3957{,}50 + 700 = 4657{,}50$

$K_{1_{Anfang}} = K_0 = \frac{K_{1_{Ende}}}{q} = \frac{3657{,}50}{1{,}035} = 4500{,}00$

Der ursprünglich angelegte Betrag war 4.500 *€.*

Lösung P8/2003

Gegeben: Gesamtverbrauch 1992 mit $213\,m^3$ und Gesamtverbrauch 2002 mit $185\,m^3$.

Prozentuale Veränderung 2002 zu 1992:

$p_{2002/1992} = \frac{185}{213} = 0{,}8685 \approx 86{,}9\,\%$

$100\,\% - 86{,}9\,\% = 13{,}1\,\%$

Der Wasserverbrauch 2002 lag etwa $13{,}1\,\%$ *unter dem von 1992.*

Prozentuale Veränderung 2002/1992 Wasserverbrauch für Toilettenspülung:

Prozentsatz Toilettenspülung 1992 mit $32\,\%$ und 2002 mit $26\,\%$.

Berechnung des Verbrauchs für Toilettenspülung (Prozentwert) in den beiden Jahren:

$P_{Toil_{1992}} = G_{1992} \cdot p_{Toil_{1992}} = 213 \cdot 0{,}32 = 68{,}16\,m^3$

$P_{Toil_{2002}} = G_{2002} \cdot p_{Toil_{2002}} = 185 \cdot 0{,}26 = 48{,}10\,m^3$

Minderverbrauch in 2002:

$V_{Differenz} = P_{Toil_{1992}} - P_{Toil_{2002}} = 86{,}16 - 48{,}1 \approx 20\,m^3$

Im Jahre 2002 wurden etwa $20\,m^3$ *Wasser weniger für die Toilettenspülung verbraucht als im Jahre 1992.*

Durchschnittlicher Wasserverbrauch pro Tag in 2002 für Geschirrspülen:

Jahresverbrauch:

$P_{Spülen_{2002}} = G_{2002} \cdot p_{Spülen_{2002}} = 185 \cdot 0{,}06 = 11{,}10\,m^3$

Tagesverbrauch (1 Jahr = 365 Tage)

$V_{Tag} = \frac{P_{Spülen_{2002}}}{365} = \frac{11{,}1}{365} = 0{,}030\,m^3$

Im Jahre 2002 wurden in dem Haushalt durchschnittlich $0{,}03\,m^3$ *Wasser für das Geschirrspülen pro Tag verbraucht.*