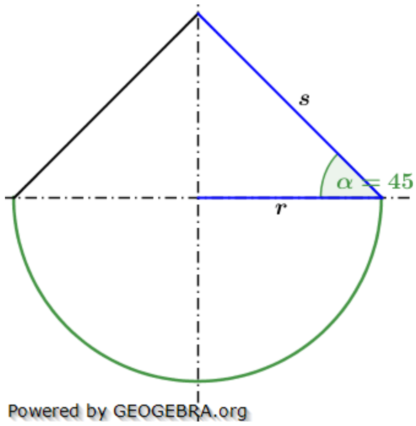
Lösung P1/2003

Lösungslogik

Berechnung von r über das gegebene Volumen der Halbkugel.
Berechnung von s über den $cos 45°$.
Berechnung von M_{Kegel}.
Berechnung von $O_{Halbkugel}$.
Berechnung der Oberfläche des Körpers.



Klausuraufschrieb

r: $V_{HK} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ | $\cdot 3;\ : (2\pi);\ \sqrt[3]{\ }$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{HK}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 204}{2\pi}} = 4{,}60$

s: $cos\alpha = \frac{r}{s}$ | $\cdot s;\ : cos\alpha$

$s = \frac{r}{cos\alpha} = \frac{4{,}60}{cos 45°} = 6{,}50$

M_{Kegel}: $M_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 4{,}6 \cdot 6{,}50 = 93{,}93$

O_{HK}: $O_{HK} = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 4{,}6^2 = 132{,}95$

$O_{Körper}$: $O_{Körper} = O_{HK} + M_{Kegel} = 132{,}95 + 93{,}93 = 226{,}88$

Die Oberfläche des Körpers beträgt $227\ cm^2$.

Lösung P2/2003

Lösungslogik

Berechnung des Volumens des quadratischen Prismas über die Volumenformel.
Bestimmung des Volumens der Pyramide.
Berechnung der Höhe der Pyramide über die Volumenformel der Pyramide.

Klausuraufschrieb

V_{Prisma}: $V_{Prisma} = G \cdot h = a^2 \cdot h = 3^2 \cdot 5 = 45$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = 0{,}5 \cdot V_{Prisma} = 0{,}5 \cdot 45 = 22{,}5$

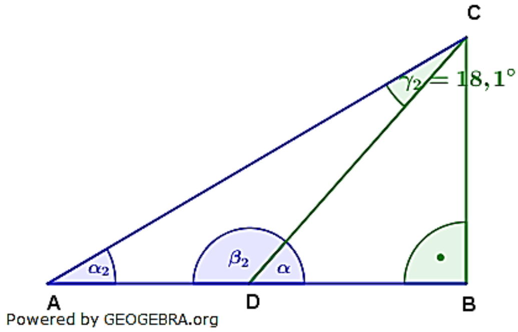
h_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h_{Pyr}$ | $\cdot 3;\ : a^2$

$h_{Pyr} = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{3 \cdot a^2} = \frac{V_{Pyr}}{a^2} = \frac{22{,}5}{9} = 2{,}5$

Die Höhe der Pyramide beträgt $2{,}5\ cm$.

Lösung P3/2003

Lösungslogik



Das Dreieck ADC ist ein stumpfwinkliges Dreieck, bei dem die Strecke $\overline{BC}$ die Höhe auf die Grundseite $\overline{AD}$ ist.
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
Alternativ kann die Fläche über die trigonometrische Flächenformel
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} \cdot sin\gamma_2$ ermittelt werden.
Berechnung von α über den sin.
Berechnung von β_2.
Berechnung von α_2.
Berechnung $\overline{DB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung $\overline{AB}$ über den $tan\alpha_2$.
Berechnung $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung $\overline{AD}$.
Berechnung A_{ADC} über Flächenformel Dreieck alternativ trigonometrischer Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$, alternativ $A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} \cdot sin\gamma_2$,

α: $sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{3{,}3}{4{,}4} = 0{,}75$

$\alpha = sin^{-1}(0{,}75) = 48{,}59°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \alpha = 180° - 48{,}59° = 131{,}41°$

α_2: $\alpha_2 = 180° - \gamma_2 - \alpha_2 = 180° - 18{,}1° - 131{,}41° = 30{,}49°$

$\overline{DB}$: $\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2 = 4,4^2 - 3,3^2 = 8{,}47 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\overline{DB} = 2{,}91$

$\overline{AB}$: $tan\alpha_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB};\ :tan\alpha_2$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan\alpha_2} = \frac{3{,}3}{tan 30{,}49°} = 5{,}6$

$\overline{AC}$: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 5,6^2 + 3,3^2 = 42{,}25 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\overline{AC} = 6{,}5$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 5{,}6 - 2{,}91 = 2{,}69$

A_{ADC}: $A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}69 \cdot 3{,}3 = 4{,}44\ cm^2$ | Dreiecksformel

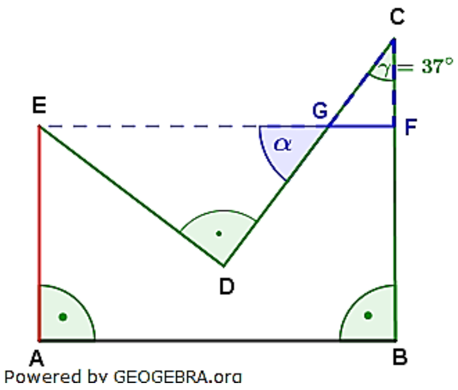
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 4{,}4 \cdot sin 18{,}1° = 4{,}44$ | trigonometrische Fläche

Das Dreieck ADC hat eine Fläche von etwa $4{,}4\ cm^2$.

Lösung P4/2003

Lösungslogik

Die Strecke $\overline{AE}$ errechnet sich aus der Strecke $\overline{BC}$ abzüglich der Strecke $\overline{CF}$.
Berechnung von α über den Scheitelwinkel.
Berechnung von $\overline{DG}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{GC}$.
Berechnung $\overline{FC}$ über $cos\gamma$.
Berechnung $\overline{AE} = \overline{FB}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{AE} = \overline{BC} - \overline{FC}$

α: $\quad \alpha = 90° - \gamma = 90° - 37° = 53°$

$\overline{DG}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{DG}} \quad | \quad \cdot \overline{DG};\ :tan\alpha$

$\overline{DG} = \frac{\overline{ED}}{tan\alpha} = \frac{5{,}4}{tan53°} = 4{,}07$

$\overline{GC}$: $\quad \overline{GC} = \overline{DC} - \overline{DG} = 6{,}6 - 4{,}07 = 2{,}53$

$\overline{FC}$: $\quad cos\gamma = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} \quad | \quad \cdot \overline{GC}$

$\overline{FC} = \overline{GC} \cdot cos\gamma = 2{,}53 \cdot cos37° = 2{,}02$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE} = \overline{BC} - \overline{FC} = 7{,}0 - 2{,}02 \approx 5{,}0$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist $5\ cm$ lang.

Lösung P5/2003

$\frac{2x^2 + x - 9}{x - 1} = x + 5$

Nenner 1: $\quad x - 1$
Nenner 2: $\quad 1$
Hauptnenner: $\quad (x - 1)$

$(x - 1) = 0$ für $x_1 = 1$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\frac{(2x^2+x-9)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = (x + 5) \cdot (x - 1)$

$2x^2 + x - 9 = (x + 5) \cdot (x - 1) \quad |$ ausmultiplizieren

$2x^2 + x - 9 = x^2 + 4x - 5 \quad | \quad -x^2;\ -4x;\ +5$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad |$ p/q-Formel

$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = -1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 1; \quad x_2 = -4$

$\mathbb{L} = \{-4; 1\}$

Lösung P6/2003

Lösungslogik

Bestimmung der Parabelgleichung über die Scheitelpunktgleichung mit $S(2|-3)$.
Bestimmung der Geradensteigung mit $m = 1$ und $P(4|1)$.
Gleichsetzung von Parabel- und Geradengleichung ergibt Schnittpunkte.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung von p mit Scheitelpunkt $S(2|-3)$:

p: $y = (x - x_s)^2 + y_s$
$y = (x - 2)^2 - 3$ | Scheitelpunktgleichung über $S(2|-3)$
$y = x^2 - 4x + 1$ | allgemeine Parabelgleichung

Geradengleichung g durch $P(4|1)$ mit $m = 1$:

g: $y = mx + b$
$1 = 1 \cdot 4 + b$ | Punktprobe Gerade mit $P(4|1)$ und $m = 1$
$b = -3$
$y = x - 3$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$ $x^2 - 4x + 1 = x - 3$ | Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen
$x^2 - 5x + 4 = 0$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 2{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = 4;\quad x_2 = 1$
$x_2 \longrightarrow g$
$y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2$

Der zweite Schnittpunkt ist $Q(1|-2)$.

Lösung P7/2003

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 3 Jahre mit festem Zinssatz.
Gegeben: $n = 3$ Jahre; $K_3 = 3721{,}87\ €$ Endkapital, $q = 1{,}035$ für alle Jahre.
Abhebungen nach dem ersten Jahr $700{,}00\ €$ und nach dem zweiten Jahr $500{,}00\ €$.
Gesucht: *Anfangskapital* K_0

Rein rechnerische Lösung (einfach)

$K_3 = \big((K_0 \cdot q - 700) \cdot q - 500\big) \cdot q$
$3721{,}87 = \big((K_0 \cdot 1{,}035 - 700) \cdot 1{,}035 - 500\big) \cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$
$3596{,}01 = (K_0 \cdot 1{,}035 - 700) \cdot 1{,}035 - 500$ | $+500$
$4096{,}01 = (K_0 \cdot 1{,}035 - 700) \cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$
$3957{,}50 = K_0 \cdot 1{,}035 - 700$ | $+700$
$4657{,}50 = K_0 \cdot 1{,}035$ | $:1{,}035$
$K_0 = 4500$

Der ursprünglich angelegte Betrag war $4.500\ €$.

Tabellarische Lösung (umständlich):

Jahr	Kapital am Jahresende	Zinssatz $p\%$	q	Zinsen	Kapital am Jahresanfang
3	3721,87 €	3,50 %	1,035	125,86 €	3596,01 €
2	4096,01 €	3,50 %	1,035	138,51 €	3957,50 €
1	4657,50 €	3,50 %	1,035	157,50 €	4500,00 €

Beachte: Bei der tabellarischen Lösung musst du von „hinten nach vorne" rechnen.

$K_{3_{Anfang}} = \frac{K_{3_{Ende}}}{q} = \frac{3721{,}87}{1{,}035} = 3596{,}01$

$K_{2_{Ende}} = K_{3_{Anfang}} + 500 = 3596{,}01 + 500 = 4096{,}01$

$K_{2_{Anfang}} = \frac{K_{2_{Ende}}}{q} = \frac{4096{,}01}{1{,}035} = 3957{,}50$

$K_{1_{Ende}} = K_{2_{Anfang}} + 700 = 3957{,}50 + 700 = 4657{,}50$

$$K_{1_{Anfang}} = K_0 = \frac{K_{1_{Ende}}}{q} = \frac{3657{,}50}{1{,}035} = 4500{,}00$$

Der ursprünglich angelegte Betrag war 4.500 *€.*

Lösung P8/2003

Gegeben: Gesamtverbrauch 1992 mit $213\,m^3$ und Gesamtverbrauch 2002 mit $185\,m^3$.

Prozentuale Veränderung 2002 zu 1992:

$p_{2002/1992} = \frac{185}{213} = 0{,}8685 \approx 86{,}9\,\%$

$100\,\% - 86{,}9\,\% = 13{,}1\,\%$

Der Wasserverbrauch 2002 lag etwa $13{,}1\,\%$ *unter dem von 1992.*

Prozentuale Veränderung 2002/1992 Wasserverbrauch für Toilettenspülung:

Prozentsatz Toilettenspülung 1992 mit $32\,\%$ und 2002 mit $26\,\%$.

Berechnung des Verbrauchs für Toilettenspülung (Prozentwert) in den beiden Jahren:

$P_{Toil_{1992}} = G_{1992} \cdot p_{Toil_{1992}} = 213 \cdot 0{,}32 = 68{,}16\,m^3$

$P_{Toil_{2002}} = G_{2002} \cdot p_{Toil_{2002}} = 185 \cdot 0{,}26 = 48{,}10\,m^3$

Minderverbrauch in 2002:

$V_{Differenz} = P_{Toil_{1992}} - P_{Toil_{2002}} = 86{,}16 - 48{,}1 \approx 20\,m^3$

Im Jahre 2002 wurden etwa $20\,m^3$ *Wasser weniger für die Toilettenspülung verbraucht als im Jahre 1992.*

Durchschnittlicher Wasserverbrauch pro Tag in 2002 für Geschirrspülen:

Jahresverbrauch:

$P_{Spülen_{2002}} = G_{2002} \cdot p_{Spülen_{2002}} = 185 \cdot 0{,}06 = 11{,}10\,m^3$

Tagesverbrauch (1 Jahr = 365 Tage)

$V_{Tag} = \frac{P_{Spülen_{2002}}}{365} = \frac{11{,}1}{365} = 0{,}030\,m^3$

Im Jahre 2002 wurden in dem Haushalt durchschnittlich $0{,}03\,m^3$ *Wasser für das Geschirrspülen pro Tag verbraucht.*