Aufgabe P1/2005

Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt:

$M = 54{,}9\ cm^2$ (Mantelfläche)

$h_s = 6{,}1\ cm.$ (Höhe einer Seitenfläche)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. Lösung: $V_{Pyr} = 38{,}3\ cm^3$

Aufgabe P2/2005

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegel.

Für den Körper gilt:

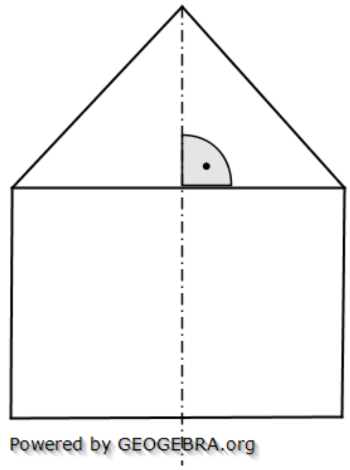
$V_{Ke} = 115\ cm^3$ (Volumen).

$h_{Ke} = 9\ cm$ (Höhe).

Die Höhe des Zylinders ist gleich lang wie die Mantellinie des Kegels.

Berechnen Sie die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $O = 355{,}7\ cm^2$



Aufgabe P3/2005

Lösen Sie die Gleichung:

$2(2x-5)\cdot(3x+4)-(2-3x)^2=(x+3)^2+67$ $\mathbb{L}=\{-6;10\}$

Aufgabe P4/2005

Eine Gerade g_1 hat die Gleichung $y=-2x-2$.

Eine zweite Gerade g_2 hat die Steigung $m=\frac{1}{2}$ und schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|3)$.

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Normalparabel p.

Berechnen Sie die Gleichung der Parabel. Lösung: $y=x^2+4x+6$

Aufgabe P5/2005

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

Es gilt:

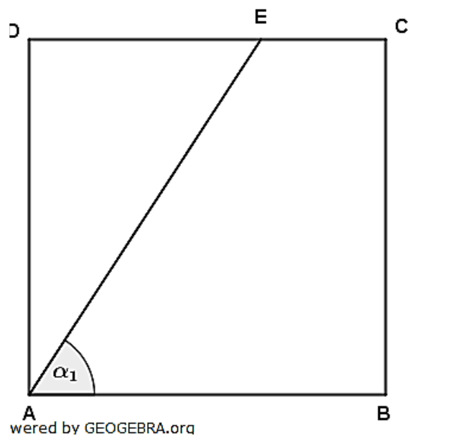
$\overline{AE} = 8\ cm$

$\alpha_1 = 57{,}0°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{BE}$.

Lösung: $\overline{BE} = 7{,}1\ cm$

Tipp: Kosinussatz für $\overline{BE}$.



Aufgabe P6/2005

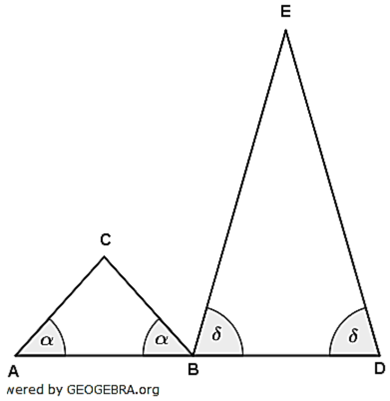
Auf der Geraden AD liegen die Dreiecke ABC und BDE.
Es gilt:

$\overline{AB} = 5{,}4\ cm$
$\alpha = 48{,}0°$
$\overline{BE} = 10{,}3\ cm$
$\delta = 74{,}0°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{CE}$.

Lösung: $\overline{CE} = 8{,}9\ cm$

Tipp: Kosinussatz für $\overline{CE}$.



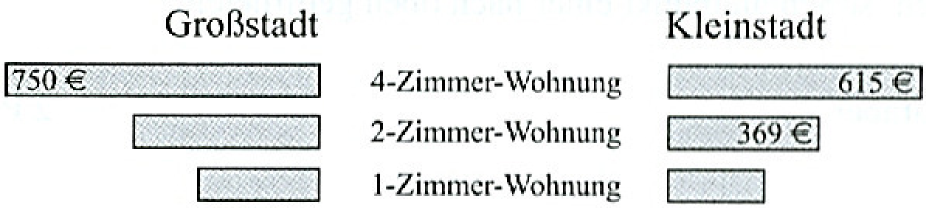
Aufgabe P7/2005

Ulrike legt bei ihrer Bank einen Betrag von $8.000{,}00\ €$ für drei Jahre an. Zinsen werden mitverzinst.
Bis zum Ende der drei Jahre wächst ihr Guthaben um insgesamt $8{,}73\ \%$ an. Im ersten Jahr beträgt der Zinssatz $2\ \%$. Im zweiten Jahr werden $204{,}00\ €$ Zinsen gutgeschrieben.
Wie hoch ist der Zinssatz im dritten Jahr?

Lösung: $4\ \%$

Aufgabe P8/2005

Die Mietpreise für Wohnungen in einer Großstadt und in einer Kleinstadt werden verglichen. Bei den aufgeführten Wohnungen sind die Mieten in der Kleinstadt stets um den gleichen Prozentsatz niedriger als in der Großstadt.



Um wie viel Prozent ist die Miete für die 4-Zimmer-Wohnung in der Kleinstadt niedriger als in der Großstadt?
Wie hoch ist die Miete der 2-Zimmer-Wohnung in der Großstadt?
Die Miete der 1-Zimmer-Wohnung ist in der Kleinstadt um $54\ €$ niedriger als in der Großstadt. Berechnen Sie beide Mietpreise.

Lösung: Miete 4-Zimmerwohnung Kleinstadt: $-18\ \%$
Miete 2-Zimmerwohnung Großstadt: $450\ €$
Miete 1-Zimmerwohnung Großstadt: $300\ €$
Miete 1-Zimmerwohnung Kleinstadt: $246\ €$

Lösung P1/2005

Lösungslogik

Berechnung der Grundkante a der Pyramide über die Mantelformel.
Berechnung der Höhe h der Pyramide über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens der Pyramide über die Volumenformel.

Klausuraufschrieb

a: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s$ | $:(2 \cdot h_S)$

$a = \frac{M_{Pyr}}{2 \cdot h_S} = \frac{54{,}9}{2 \cdot 6{,}1} = 4{,}5$

h: $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}1^2 - 2{,}25^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{32{,}1475} = 5{,}67$

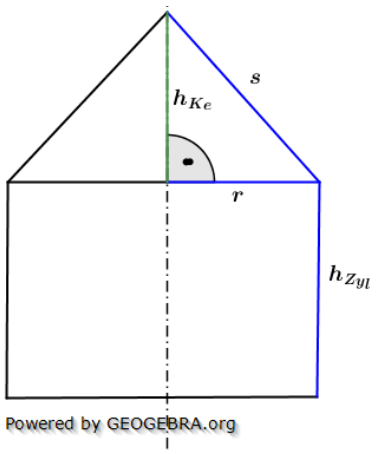
V: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5^2 \cdot 5{,}67 = 38{,}3$

Das Volumen der Pyramide beträgt $38{,}3\ cm^3$.

Lösung P2/2005

Lösungslogik

Berechnung von r über das gegebene Volumen der Kegels.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M_{Kegel}.
Berechnung von M_{Zyl}.
Berechnung der Grundfläche G.
Berechnung von O_{Ges}.



Klausuraufschrieb

r: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{Keg}$ | $\cdot 3;\ :(\pi \cdot h_{Keg});\ \sqrt{\ }$

$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V_{Keg}}{\pi \cdot h_{Keg}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 115}{\pi \cdot 9}} = 3{,}49$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r^2} = \sqrt{9^2 + 3{,}49^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{93{,}1801} = 9{,}65$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 3{,}49 \cdot 9{,}65 = 105{,}80$

M_{Zyl}: $M_{Zyl} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot s = 2\pi \cdot 3{,}49 \cdot 9{,}65 = 211{,}61$

G: $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3{,}49^2 = 38{,}26$

O_{Ges}: $O_{Ges} = M_{Keg} + M_{Zyl} + g = 105{,}80 + 211{,}61 + 38{,}26 = 355{,}67$

Die Oberfläche des Körpers beträgt $355{,}7\ cm^2$.

Lösung P3/2005

$2(2x-5)\cdot(3x+4)-(2-3x)^2=(x+3)^2+67$ | Ausmultiplizieren
$2(6x^2+8x-15x-20)-(4-12x+9x^2)=x^2+6x+9+67$
| Restklammer auflösen
$12x^2-14x-40-4+12x-9x^2=x^2+6x+76$ | Zusammenfassen
$3x^2-2x-44=x^2+6x+76$ | $-x^2;-6x;-76;$
$2x^2-8x-120=0$ | $:(2)$
$x^2-4x-60=0$ | p/q-Formel
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+60}=2\pm\sqrt{64}=2\pm 8$
$x_1=10;\quad x_2=-6$
$\mathbb{L}=\{-6;10\}$

Aufgabe P4/2005

Lösungslogik

Aufstellen der Geradengleichung g_2, Berechnung des Schnittpunktes von g_1 mit g_2 ergibt den Scheitelpunkt der Parabel.
Aufstellung der Parabelgleichung über die Scheitelpunktgleichung.

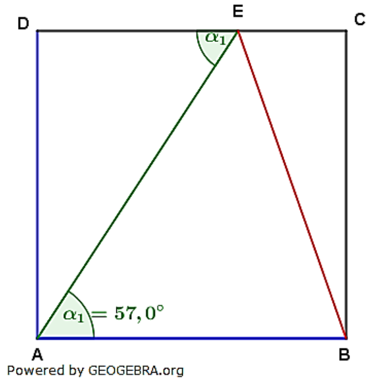
Klausuraufschrieb

Geradengleichung g_2 durch $P(0|3)$ mit $m=\frac{1}{2}$:
$g_1:\quad y=-2x-2$
$g_2:\quad y=\frac{1}{2}x+b$
Wegen $P(0|3)$ ist $b=3$
Schnittpunkt von g_1 und g_2:
$g_1\cap g_2$ | Schnittpunkt durch Gleichsetzung
(1) $y=-2x-2$
(2) $y=0{,}5x+3$
(1)-(2) $0=-2{,}5x-5$ | Subtraktionsverfahren
$2{,}5x=-5$ | $:2{,}5$
$x=-2$
$x\longrightarrow(1)$
$y=-2\cdot(-2)-2=2$
Schnittpunkt von g_1 mit g_2 ist $S(-2|2)$, dies ist der Scheitelpunkt der Parabel.
Parabelgleichung mit Scheitel $S(-2|2)$:
$p:\quad y=(x+2)^2+2$ | Scheitelpunktgleichung
$y=x^2+4x+6$ | allgemeine Parabelgleichung

Lösung P5/2005

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Berechnung von $\overline{AD} = \overline{AB}$ über $sin\alpha_1$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den Kosinussatz.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{AD}$: $\quad sin\alpha_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE}$

$\overline{AD} = \overline{AE} \cdot sin\alpha_1 = 8{,}0 \cdot sin57° = 6{,}71$

$\overline{BE}$: $\quad \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AB} \cdot cos\alpha_1$

$= 8^2 + 6{,}71^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6{,}71 \cdot cos57°$

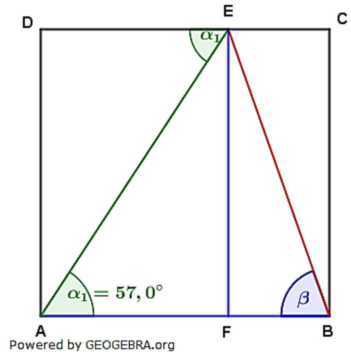
$= 50{,}55 \quad | \sqrt{}$

$\overline{BE} = 7{,}11$

Die Strecke $\overline{BE}$ ist $7{,}1\ cm$ lang.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)

Berechnung von $\overline{AD} = \overline{EF}$ über $sin\alpha_1$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{FB}$ über $\overline{AB} - \overline{AF}$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den Satz des Pythagoras.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{EF}$: $\quad sin\alpha_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE}$

$\overline{EF} = \overline{AE} \cdot sin\alpha_1 = 8{,}0 \cdot sin57° = 6{,}71$

$\overline{AF}$: $\quad \overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{FE}^2$

$= 8^2 + 6{,}71^2$

$= 18{,}9759 \quad | \sqrt{}$

$\overline{AF} = 4{,}3561$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FB} = \overline{EF} - \overline{AF} = 6{,}71 - 4{,}3561 = 2{,}3539$

$\overline{BE}$: $\quad \overline{BE}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{EF}^2 = 2{,}3539^2 + 6{,}71^2 = 50{,}5649 \quad | \sqrt{}$

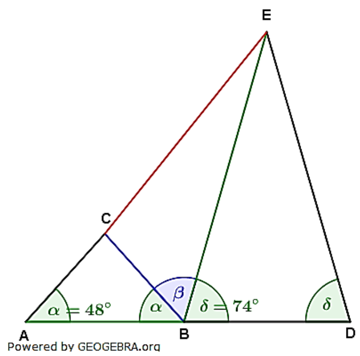
$\overline{BE} = 7{,}1109$

Die Strecke $\overline{BE}$ ist $7{,}1\ cm$ lang.

Lösung P6/2005

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Berechnung von β als Ergänzungswinkel von α und δ zu $180°$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über $cos\alpha$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den Kosinussatz.



Klausuraufschrieb

$\overline{CE}$: $\quad \overline{CE} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CB} \cdot \overline{BC} \cdot cos\beta}$

| Kosinussatz

β: $\quad \beta = 180° - \alpha - \delta$

$= 180° - 48° - 74° = 58°$

$\overline{CB}$: $\quad cos\alpha = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{CB}}$ $\quad$ | $\cdot \overline{CB};\ : cos\alpha$

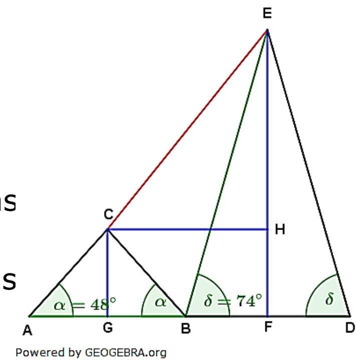
$\overline{CB} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{cos\alpha} = \frac{2{,}7}{cos48°} = 4{,}035$

$\overline{CE}$: $\quad \overline{CE} = \sqrt{4{,}035^2 + 10{,}3^2 - 2 \cdot 4{,}035 \cdot 10{,}3 \cdot cos58°} = 8{,}85$

Die Strecke $\overline{CE}$ ist $8{,}9\ cm$ lang.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{GC}$ über den $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{FE}$ über den $sin\delta$.
Berechnung von $\overline{HE}$ aus $\overline{FE} - \overline{GC}$.
Berechnung von $\overline{GB}$ aus $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.
Berechnung von $\overline{BF}$ über den Satz des Pythagoras
Berechnung von $\overline{CH}$ aus $\overline{GB} + \overline{BF}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den Satz des Pythagoras



Klausuraufschrieb

$\overline{CE}$: $\quad \overline{CE} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HE}^2}$ $\quad$ | Satz des Pythagoras

$\overline{GC}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{GC}}{\frac{\overline{AB}}{2}}$ $\quad$ | $\cdot \frac{\overline{AB}}{2}$

$\overline{GC} = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot tan\alpha = 2{,}7 \cdot \tan(48°) = 2{,}9987$

$\overline{FE}$: $\quad sin\delta = \frac{\overline{FE}}{\overline{BE}}$ $\quad$ | $\overline{BE}$

$\overline{FE} = \overline{BE} \cdot sin\delta = 10{,}3 \cdot \sin(74°) = 9{,}901$

$\overline{HE}$: $\quad \overline{HE} = \overline{FE} - \overline{GC} = 9{,}901 - 2{,}9987 = 6{,}9023$

$\overline{GB}$: $\quad \overline{GB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}4 = 2{,}7$

$\overline{BF}$: $\quad \overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{FE}^2$ $\quad$ | Satz des Pythagoras

$= 10{,}3^2 - 9{,}901^2 = 8{,}0602$ $\quad$ | $\sqrt{\ }$

$\overline{BF} = 2{,}839$

$\overline{CH}$: $\quad \overline{CH} = \overline{GB} + \overline{BF} = 2{,}7 + 2{,}893 = 5{,}593$

$\overline{CE}$: $\quad \overline{CE}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{CH}^2$ $\quad$ | Satz des Pythagoras

$= 6{,}9023^2 + 5{,}593^2 = 78{,}9234$ $\quad$ | $\sqrt{\ }$

$\overline{CE} = 8{,}884$

Die Strecke $\overline{CE}$ ist $8{,}9\ cm$ lang.

Lösung P7/2005

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 3 Jahre mit variablem Zinssatz.

Endkapital von Ulrike:

Das Guthaben von Ulrike steigt in drei Jahren um $8{,}73\%$ an. Über diese Angabe wird das Endkapital ermittelt.

$K_3 = K_0 \cdot 1{,}0873$

$K_3 = 8000 \cdot 1{,}0873 = 8698{,}40$

Zinssatz im dritten Jahr:

$K_3 = (K_0 \cdot q_1 + 204{,}00) \cdot q_3$

$8698{,}40 = (8000 \cdot 1{,}02 + 204{,}00) \cdot q_3$

$8698{,}40 = 8364 \cdot q_3 \qquad | \quad : 8364$

$q_3 = \frac{8698{,}40}{8364} = 1{,}04$

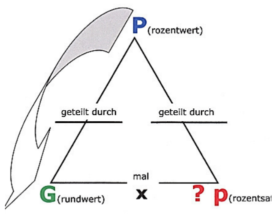
$q_3 = 1 + \frac{p_3\%}{100} \Longrightarrow \quad p_3\% = 4\%$

Der Zinssatz im dritten Jahr ist $4\ \%$.

Lösung P8/2005

Geringerer Prozentsatzes für 4-Zimmerwohnung in der Kleinstadt:

Gegeben Grundwert 750 € in der Großstadt und Prozentwert 615 € in der Kleinstadt. Gesucht ist der Prozentsatz. Aus der Aufgabenstellung „niedriger" erkennst du, dass es sich beim Prozentwert um einen verminderten Grundwert handelt.



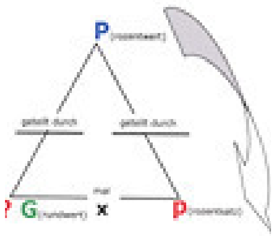
$p = \frac{P}{G} = \frac{615}{750} = 0{,}82 = 82\ \%$

Wegen „Vermindertem Grundwert" musst du rechnen:

$p_{vermindert} = 100\ \% - p = 100 - 82 = 18\ \%$

Die Miete für die 4-Zimmerwohnung in der Kleinstadt ist um $18\ \%$ *niedriger als in der Großstadt.*

Miete einer 2-Zimmerwohnung in der Großstadt:



Gemäß Aufgabenstellung ist der prozentuale Unterschied bei allen Wohnungen gleich. Also sind die 369 € für die 2-Zimmerwohnung in der Kleinstadt auch $82\ \%$ der Miete in der Großstadt. Gesucht ist der Grundwert (Miete in der Großstadt).

$G = \frac{P}{p} = \frac{369}{0{,}82} = 450$

Die 2-Zimmerwohnung in der Großstadt kostet 450 € *Miete.*

Miete einer 1-Zimmerwohnung in der Groß- sowie Kleinstadt:

Die Angabe „um 54 € niedriger" bedeutet, dass diese 54 € $18\ \%$ der Miete der Großstadt sind (siehe hierzu Berechnung zur 4-Zimmerwohnung). Gesucht ist wiederum der Grundwert (Miete in der Großstadt).

$G = \frac{P}{p} = \frac{54}{0{,}18} = 300$

Die Miete der 1-Zimmerwohnung in der Großstadt beträgt 300 €. *Die Miete in der Kleinstadt somit* $300 - 54 = 246$ €.