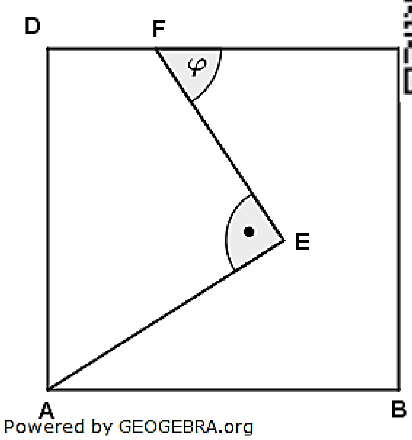
Aufgabe P1/2006

Im Quadrat $ABCD$ liegt der Streckenzug AEF.
Es gilt:

$\overline{AE} = 5{,}6\ cm$
$\overline{EF} = 4{,}7\ cm$
$\varphi = 57{,}0°$

Berechnen Sie die Länge einer Quadratseite.

Lösung: $\overline{AD} = a = 7{,}0\ cm$



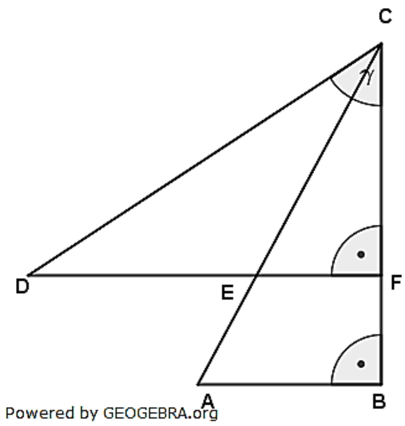
Aufgabe P2/2006

Die Figur besteht aus den Dreiecken ABC und DFC.
Gegeben sind:

$\overline{AB} = 4{,}0\ cm$
$\overline{BC} = 7{,}4\ cm$
$\overline{AE} = 2{,}7\ cm$
AC ist die Winkelhalbierende von γ.

Berechnen Sie die Länge $\overline{DF}$.

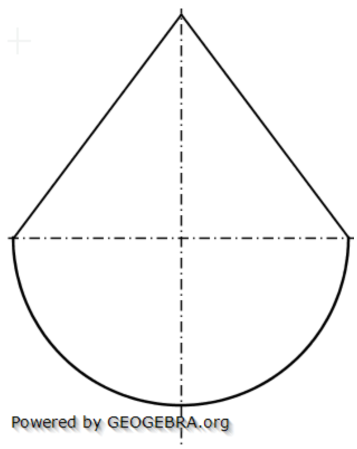
Lösung: $\overline{DF} = 7{,}7\ cm$



Aufgabe P3/2006

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Kegel und einer Halbkugel. Er hat die Oberfläche $O_{ges} = 149\ cm^2$.
Das Volumen der Halbkugel beträgt $V_{HK} = 97{,}7\ cm^3$.
Wie groß ist die Höhe des Kegels?

Lösung: $h_K = 4{,}8\ cm$



Aufgabe P4/2006

Für ein regelmäßiges fünfseitiges Prisma gilt:

$M = 100\ cm^2$ (Mantelfläche).

$h = 8\ cm$ (Körperhöhe).

Berechnen Sie das Volumen des Prismas. Lösung: $V = 86\ cm^3$

Aufgabe P5/2006

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $5(y-1) - 3(x-7) = 1$

(2) $\frac{2}{3}y + \frac{20+x}{3} = 1$ $\mathbb{L} = \{(-5; -6)\}$

Aufgabe P6/2006

Eine nach unten geöffnete Normalparabel hat den Scheitel $S(0|4)$.
Eine Gerade mit der Steigung $m = 2$ geht durch den Punkt $P(0|1)$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade. Wie weit sind diese Schnittpunkte voneinander entfernt?

Lösung: $d = 8{,}9\ LE$

Aufgabe P7/2006

Markus zahlt dreimal hintereinander jeweils zu Jahresanfang $1.500{,}00\ €$ auf ein Konto ein. Die Zinsbedingungen sind:

Zinssatz $2{,}25\ \%$

Zinsen werden mitverzinst

Wie hoch ist das Guthaben von Markus am Ende der drei Jahre?
Bettina möchte dieses Guthaben bei gleichen Zinsbedingungen bereits nach zwei Jahren erreichen. Welche gleiche Rate muss sie jeweils zu Jahresanfang einzahlen?

Lösung: Guthaben Markus $4.705{,}55\ €$, Rate Bettina $2.275{,}40\ €$

Aufgabe P8/2006

Die Mehrwertsteuersätze in Europa sind unterschiedlich.
Ein Unternehmen bietet in seinen europäischen Filialen Nordic-Walking-Stöcke zum gleichen Nettopreis an. Auf diesen Nettopreis kommen je nach Land unterschiedliche Mehrwertsteuerbeträge.
In Finnland kostet ein Paar dieser Stöcke einschließlich Mehrwertsteuer $41{,}48\ €$.

Dänemark	$25\ \%$
Deutschland	$16\ \%$
Finnland	$22\ \%$
Irland	$21\ \%$

Stand 31. Oktober 2005

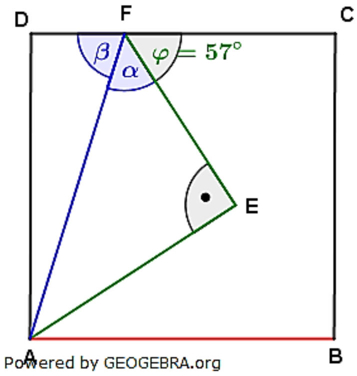
Was bezahlt man dafür in den dänischen Filialen einschließlich Mehrwertsteuer?
Wie viel Euro sind die Stöcke in Deutschland billiger als in Dänemark?
In Luxemburg ist ein Paar der Stöcke um $2{,}04\ €$ günstiger als in Irland.
Berechnen Sie den Mehrwertsteuersatz in Luxemburg.

Lösung: Dänemark $42{,}50\ €$
Deutschland $7{,}2\ \%$ billiger
Mehrwertsteuersatz Luxemburg $15\ \%$

Lösung P1/2006

<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von $\overline{AF}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von α über den tan.
Berechnung von β über die Ergänzungswinkel.
Berechnung von $\overline{AD} = \overline{AB}$ über den $sin\beta$.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{AF}$: $\quad \overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = 5,6^2 + 4,7^2 = 53,45 \quad | \sqrt{\ }$

$\overline{AF} = \sqrt{53,45} = 7,31$

α: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{5,6}{4,7} = 1,1915$

$\alpha = tan^{-1}(1,1915) = 50°$

β: $\quad \beta = 180° - \varphi - \alpha = 180° - 57° - 50° = 73°$

$\overline{AD}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} \quad | \cdot \overline{AF}$

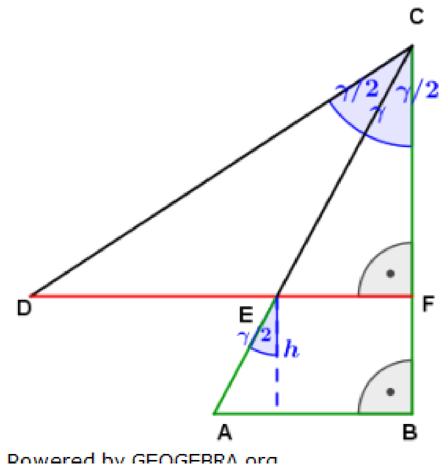
$\overline{AD} = \overline{AF} \cdot sin\beta = 7,31 \cdot sin73° = 6,99$

Die Quadratseite ist $7\ cm$ *lang.*

Lösung P2/2006

<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von $\frac{\gamma}{2}$ über den tan.
Berechnung von h über den $cos\frac{\gamma}{2}$.
Berechnung von $\overline{CF}$.
Berechnung von $\overline{DF}$ über den $tan\gamma$.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\frac{\gamma}{2}$: $\quad tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4}{7,4} = 0,54054$

$\frac{\gamma}{2} = tan^{-1}(0,54054) = 28,39°$

γ: $\quad \gamma = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = 2 \cdot 28,39° = 56,78°$

h: $\quad cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE}$

$h = \overline{AE} \cdot cos\frac{\gamma}{2} = 2,7 \cdot cos28,39° = 2,38$

$\overline{CF}$: $\quad \overline{CF} = \overline{BC} - h = 7,4 - 2,38 = 5,02$

$\overline{DF}$: $\quad tan\gamma = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \quad | \cdot \overline{CF}$

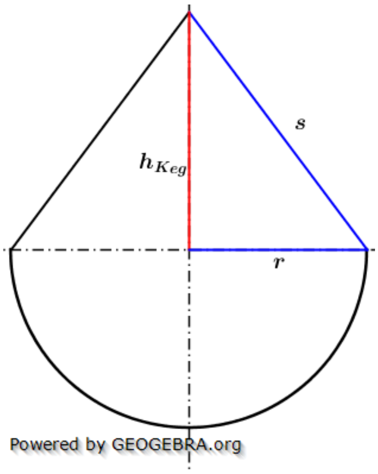
$\overline{DF} = \overline{CF} \cdot tan\gamma = 5,02 \cdot tan56,78° = 7,666$

Die Strecke $\overline{DF}$ *ist* $7,7\ cm$ *lang.*

Lösung P3/2006

Lösungslogik

Berechnung von r über das gegebene Volumen der Halbkugel.
Berechnung der Oberfläche O_{HK} der Halbkugel.
Berechnung von M_{Keg}.aus der Differenz von O_{Ges} und O_{HK}.
Berechnung von s aus der Mantelfläche des Kegels.
Berechnung von h_{Keg} über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

r: $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r^3$ | $\cdot 3;\ :(2\pi);\ \sqrt[3]{\ }$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{HK}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 97{,}7}{2\pi}} = 3{,}6$

O_{HK}: $O_{HK} = 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6^2 = 81{,}43$

M_{Keg}: $M_{Keg} = O_{Ges} - O_{HK} = 149 - 81{,}43 = 67{,}57$

s: $M_{Keg} = \pi \cdot r \cdot s$ | $:(\pi \cdot r)$

$s = \frac{M_{Keg}}{\pi \cdot r} = \frac{67{,}57}{\pi \cdot 3{,}6} = 5{,}97$

h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{5{,}97^2 - 3{,}6^2}$ | Satz des Pythagoras

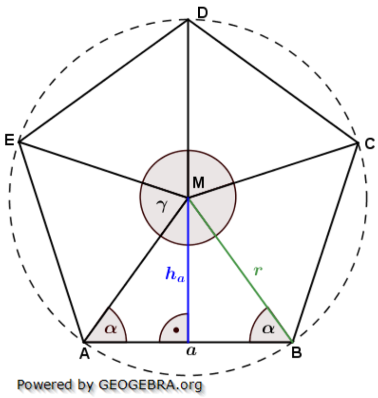
$h_{Keg} = \sqrt{22{,}6809} = 4{,}76$

Die Höhe des Kegels beträgt $4{,}8\ cm$.

Lösung P4/2006

Lösungslogik

Berechnung von u des Fünfecks über den gegebenen Mantel und die Höhe des Prismas.
Berechnung von a.
Berechnung von γ und α.
Berechnung von h_a über den $tan\alpha$.
Berechnung von A_{5-Eck}.
Berechnung des Volumens des Prismas.



Klausuraufschrieb

u: $M_{Prisma} = u \cdot h$ | $:h$

$u = \frac{M_{Prisma}}{h} = \frac{100}{8} = 12{,}5$

a: $a = \frac{u}{5} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$

γ: $\gamma = \frac{360°}{5} = 72°$

α: $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$

h_a: $tan\alpha = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$ | $\cdot \frac{a}{2}$

$h_a = \frac{a}{2} \cdot tan\alpha = 1{,}25 \cdot tan54° = 1{,}72$

A_{5-Eck} $A_{5-Eck} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}72 = 10{,}75$

V_{Prisma}: $V_{Prisma} = A_{5-Eck} \cdot h = 10{,}75 \cdot 8 = 86$

Das Prisma hat ein Volumen von $86\ cm^3$.

Lösung P5/2006

(1)	$5(y-1)-3(x-7)=1$	|	ausmultiplizieren
(2)	$\frac{2}{3}y+\frac{20+x}{3}=1$	|	Nennerbeseitigung mit $\cdot 3$
(1)	$5y-5-3x+21=1$	|	$+3x;\ -16$
(2)	$2y+20+x=3$	|	$-x;\ -20$
(1)	$5y=3x-15$	|	$\cdot 2$
(2)	$2y=-x-17$	|	$\cdot 5$
(1)	$10y=6x-30$		
(2)	$10y=-5x-85$		

(1)-(2)	$0=6x-(-5x)-30-(-85)$		
	$0=11x+55$	|	$-11x$
	$-11x=55$	|	$:(-11)$
	$x=-5\ \longrightarrow$ (2)		
(2)	$2y=-(-5)-17=-12$	|	$:2$
	$y=-6 \Longrightarrow\ \mathbb{L}=\{(-5;-6)\}$		

Aufgabe P6/2006

<u>Lösungslogik</u>

Aufstellen der Parabelgleichung p, Aufstellung der Geradengleichung g, Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung, Abstandsbestimmung der Schnittpunkte über den Satz des Pythagoras.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Parabelgleichung p:

p: $y=-x^2+4$ | in x–Richtung unverschobene Parabel

Geradengleichung g durch $P(0|1)$ mit $m=2$:

g: $y=2x+1$ | Wegen $P(0|1)$ ist $b=1$.

Schnittpunkte von p und g:

$p\cap g$		|	Schnittpunkt durch Gleichsetzung
	$-x^2+4=2x+1$	|	$-1;\ -2x$
	$-x^2-2x+3=0$	|	$\cdot(-1)$
	$x^2+2x-3=0$	|	p/q-Formel
	$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2$		
	$x_1=1;\quad x_2=-3$		
	$y_1=2x_1+1=2\cdot 1+1=3$		
	$y_2=2x_2+1=2\cdot(-3)+1=-5$		

Schnittpunkte sind $Q(1|3)$ und $R(-3|-5)$.

Abstand von Q und R:

$\overline{QR}$: $\overline{QR}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ | Satz des Pythagoras

$=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}\approx 8{,}94$

Die Punkte Q und R sind etwa $8{,}9\ LE$ voneinander entfernt.

Lösung P7/2006

Aufgabentyp: Ratensparvertrag über 3 Jahre mit festem Zinssatz.

Guthaben von Markus nach drei Jahren:

$K_3 = R \cdot (q^3 + q^2 + q)$

$K_3 = 1500 \cdot (1{,}0225^3 + 1{,}0225^2 + 1{,}0225)$

$K_3 = 4705{,}55$

Markus hat nach den drei Jahren ein Guthaben von $4.705{,}55$ €.

Rate von Bettina:

Sie soll nach zwei Jahren das gleiche Guthaben wie Markus haben, also ist jetzt $K_2 = 4705{,}55$.

$K_2 = R \cdot (q^2 + q)$

$4705{,}55 = R \cdot (1{,}0225^2 + 1{,}0225)$

$4705{,}55 = R \cdot (2{,}068) \quad | \quad :2{,}068$

$R = \frac{4705{,}55}{2{,}068} = 2275{,}41$

Bettina muss jeweils zu Jahresanfang einen Betrag von $2.275{,}40$ € *einzahlen.*

Lösung P8/2006

Nettopreis der Stöcke:

Wir müssen zunächst den Nettopreis der Stöcke aus den Angaben über Finnland ermitteln. $41{,}48$ ist der Prozentwert als erhöhter Grundwert bei einem Mehrwertsteuersatz in Finnland von $22\,\%$. Wir berechnen den Grundwert:

$G = \frac{P}{p} = \frac{41{,}48}{1{,}22} = 34{,}00$

Ein Paar Nordic-Walking-Stöcke kostet ohne Mehrwertsteuer $34{,}00$ €.

Verkaufspreis in Dänemark:

Der Mehrwertsteuersatz in Dänemark ist $25\,\%$. Der Verkaufspreis dort ist der Prozentwert als erhöhter Grundwert. Wir berechnen den Prozentwert:

$P = G \cdot p = 34{,}00 \cdot 1{,}25 = 42{,}50$

In Dänemark kostet ein Paar Stöcke $42{,}50$ €.

Prozentsatz „billiger" in Deutschland:

In Deutschland gilt (nach Aufgabe) ein Mehrwertsteuersatz von $16\,\%$. Ein Paar Stöcke kosten somit in Deutschland:

$P = G \cdot p = 34{,}00 \cdot 1{,}16 = 39{,}44$

Da von der Aufgabe her gefragt ist, um wie viel Prozent die Stöcke in **Deutschland** billiger sind, ist der dänische Preis der Grundwert und der deutsche Preis der Prozentwert als verminderter Grundwert. Wir berechnen den Prozentsatz:

$$p = 1 - \frac{P}{G} = 1 - \frac{39{,}44}{42{,}50} = 0{,}072 = 7{,}2\,\%$$

In Deutschland sind die Stöcke $7{,}2\,\%$ *billiger als in Dänemark.*

Mehrwertsteuersatz in Luxemburg:

Für Luxemburg benötigen wir zunächst den Preis in Irland. Irland hat einen Mehrwertsteuersatz von $21\,\%$.

$P_{Irland} = G \cdot p = 34{,}00 \cdot 1{,}21 = 41{,}14$

Preis in Luxemburg:

$P_{Luxemburg} = P_{Irland} - 2{,}04 = 41{,}14 - 2{,}04 = 39{,}10$

Dieser Preis ist nun der Prozentwert als erhöhter Grundwert zur Berechnung des Mehrwertsteuersatzes in Luxemburg. Der Grundwert ist nach wie vor $34{,}00$.

$$p = \frac{P}{G} - 1 = \frac{39{,}10}{34{,}00} - 1 = 0{,}15 = 15\,\%$$

Der Mehrwertsteuersatz in Luxemburg ist $15\,\%$*.*