Aufgabe P1/2008

Gegeben sind das Rechteck $ABCD$ und das gleichschenklige Dreieck AEF.

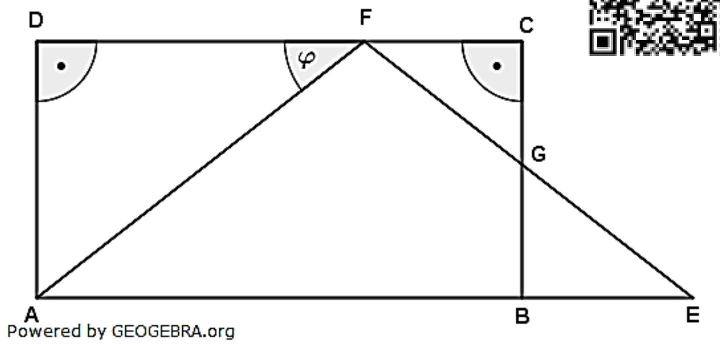
Es gilt:

$\varphi = 38{,}0°$

$\overline{AD} = 5{,}4\ cm$

$\overline{FG} = 4{,}2\ cm$

$\overline{AF} = \overline{EF}$



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BEG.

Lösung: $A_{BEG} = 5{,}1\ cm^2$.

Tipp: Trigonometrischen Flächeninhalt für das Dreieck BEG.

Aufgabe P2/2008

Im Viereck $ABCD$ sind bekannt:

$\overline{BC} = 6{,}6\ cm$

$\overline{AD} = 10{,}8\ cm$

$\alpha = 47{,}0°$

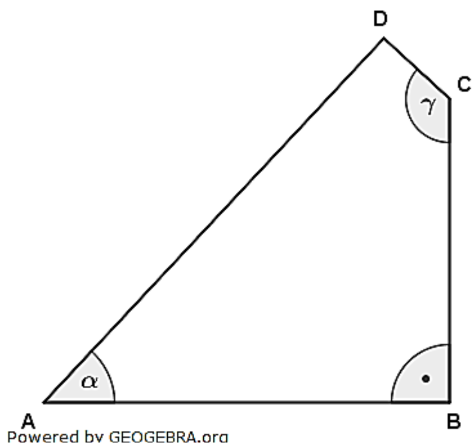
$\gamma = 132{,}0°$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$.

Berechnen Sie die Länge $\overline{AC}$.

Lösung: Abstand D von $\overline{AB}$: $7{,}9\ cm$.

Strecke $\overline{AC} = 11{,}0\ cm$.



Aufgabe P3/2008

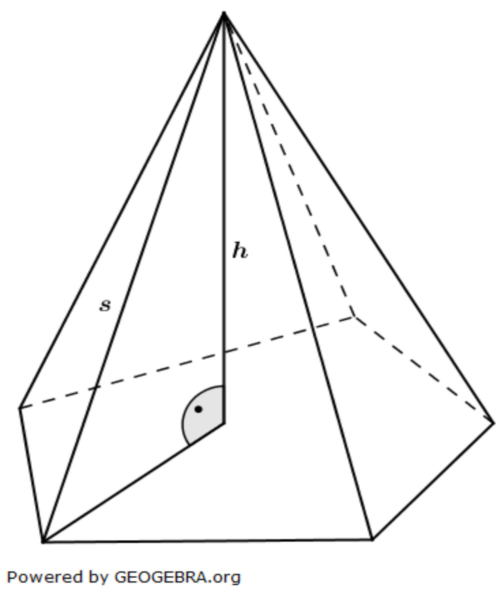
Von einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind bekannt:

$h = 8{,}4\ cm$

$s = 10{,}2\ cm$

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung: $V = 223{,}4\ cm^3$



Aufgabe P4/2008

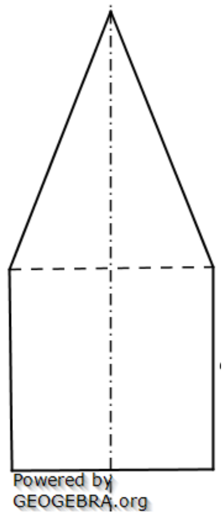
Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder und einem Kegel.
Der Achsenschnitt des Zylinders ist ein Quadrat.
Es gilt:

$A_{Ges} = 67{,}0\ cm^2$.(Flächeninhalt der nebenstehenden Achsenschnittfläche)

$a = 6{,}2\ cm$

Berechnen Sie die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $O = 245{,}6\ cm^2$



Aufgabe P5/2008

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{4x^2+3x-6}{x^2+2x} + \frac{4+x}{x+2} = \frac{1-3x}{x}$ $\qquad\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 0\}; \quad \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Aufgabe P6/2008

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $\frac{3y-7}{2} - 5 = x$

(2) $y - 6 = \frac{x+3}{5}$ $\qquad\qquad \mathbb{L} = \{(2; 7)\}$

Aufgabe P7/2008

Gabi legt bei ihrer Bank $2.500{,}00\ €$ zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr: $3{,}50\ \%$
2. Jahr: $3{,}75\ \%$
3. Jahr: $4{,}25\ \%$

Zinsen werden mitverzinst.
Das angesparte Geld lässt sie nach Ablauf der drei Jahre ein weiteres Jahr bei der Bank. Für dieses vierte Jahr erhält sie $132{,}93\ €$ Zinsen. Wie hoch ist der Zinssatz im vierten Jahr?

Lösung: $4{,}75\ \%$

Aufgabe P8/2008

In einem Behälter liegen fünf blaue, drei weiße und zwei rote Kugeln. Mona zieht eine Kugel, notiert die Farbe und legt die Kugel wieder zurück. Danach zieht sie eine zweite Kugel.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden?

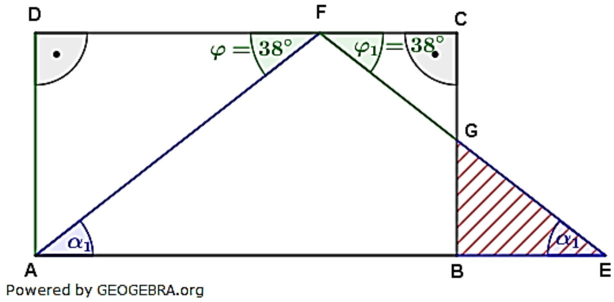
Lösung: $p = \frac{38}{100} = 38\ \%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden gezogenen Kugeln eine rot und eine weiß ist?

Lösung: $p = \frac{12}{100} = 12\ \%$

Lösung P1/2008

Lösungslogik



Berechnung von α_1 als Wechselwinkel geschnittener Parallelen.
Berechnung von $\overline{AF} = \overline{EF}$ (gleichseitiges Dreieck) über den $sin\varphi$.
Berechnung von $\overline{EG}$ als Differenz von $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den $cos\alpha_1$.
Berechnung von A_{BEG} mit dem trigonometrischen Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$A_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EG} \cdot sin\alpha_1$ | trigonometrischer Flächeninhalt.

α_1: $\alpha_1 = \varphi = 38°$

$\overline{AF}$: $sin\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}$ | $\cdot \overline{AF};\ : sin\varphi$

$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{sin\varphi} = \frac{5{,}4}{sin38°} = 8{,}77$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \overline{AF} - \overline{FG} = 8{,}77 - 4{,}2 = 4{,}57$

$\overline{BE}$: $cos\alpha_1 = \frac{\overline{BE}}{\overline{EG}}$ | $\cdot \overline{EG}$

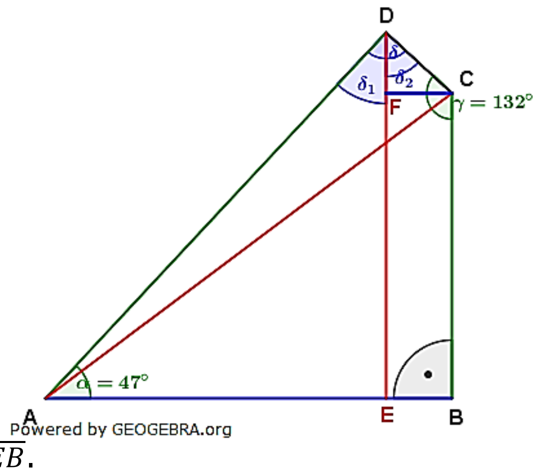
$\overline{BE} = \overline{EG} \cdot cos\alpha_1 = 4{,}57 \cdot cos38° = 3{,}60$

A_{BEG}: $A_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EG} \cdot sin38° = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}57 \cdot sin38° = 5{,}06$

Das Dreieck BEG hat eine Fläche von $5{,}1\ cm^2$.

Lösung P2/2008

Lösungslogik



Berechnung von δ über die Winkelsumme im Viereck.
Berechnung von δ_1 über die Winkelsumme im Dreieck.
Berechnung von δ_2.
Berechnung von $\overline{DE}$ über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{DF}$ als Differenz von $\overline{DE}$ und $\overline{BC}$.
Berechnung von $\overline{FC} = \overline{EB}$ über den $tan\delta_2$.
Berechnung von $\overline{AB}$ als Summe von $\overline{AE}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{AC}$ mit dem Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

δ: $\delta = 360° - \alpha - 90° - \gamma = 360° - 90° - 41° - 132° = 91°$.

δ_1: $\delta_1 = 90° - \alpha = 90° - 47° = 43°$

δ_2: $\delta_2 = \delta - \delta_1 = 91° - 43° = 48°$

$\overline{DE}$: $sin\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$ | $\cdot \overline{AD}$

$\overline{DE} = \overline{AD} \cdot sin\alpha = 10{,}8 \cdot sin47° = 7{,}9$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2 = 10,8^2 - 7,9^2 = 54,23 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\overline{AE} = 7,36$

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \overline{DE} - \overline{BC} = 7,9 - 6,6 = 1,3$

$\overline{FC}$: $\quad tan\delta_2 = \frac{\overline{FC}}{\overline{DF}} \quad | \quad \cdot \overline{DF}$

$\overline{FC} = \overline{DF} \cdot tan\delta_2 = 1,3 \cdot tan48° = 1,44$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{FC} = 7,36 + 1,44 = 8,8$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 8,8^2 + 6,6^2 = 121 \quad | \quad \sqrt{\ }$

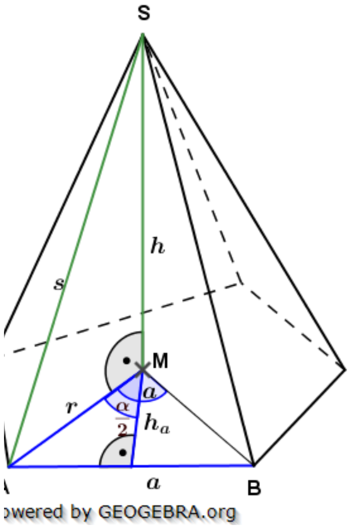
$\overline{AC} = 11$

Der Punkt D hat einen Abstand von $7,9\ cm$ von der Strecke $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{AC}$ ist $11\ cm$ lang.

Lösung P3/2008

Lösungslogik

Mit der gegebenen Höhe h der Pyramide muss lediglich noch der Flächeninhalt G der Grundfläche ermittelt werden.
Berechnung von r über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Spitzenwinkels α und daraus $\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von h_a über den $cos\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von $\frac{a}{2}$ über den Satz des Pythagoras und daraus a.
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABM.
Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche .
Berechnung des Volumens der Pyramide.



Klausuraufschrieb

r: $\quad r = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{10,2^2 - 8,4^2} = \sqrt{33,48}$ | Satz des Pythagoras

$r = 5,79$

α: $\quad \alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$

h_a: $\quad cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h_a}{r} \quad | \quad \cdot r$

$h_a = r \cdot cos\alpha = 5,79 \cdot cos36° = 4,68$

$\frac{a}{2}$: $\quad \frac{a}{2} = \sqrt{r^2 - h_a^2} = \sqrt{5,79^2 - 4,68^2}$ | Satz des Pythagoras

$\frac{a}{2} = \sqrt{11,6217} = 3,41$

hieraus $a = 6,82$

A_{ABM}: $\quad A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 6,82 \cdot 4,68 = 15,96$

G: $\quad G = 5 \cdot A_{ABM} = 5 \cdot 15,96 = 79,8$

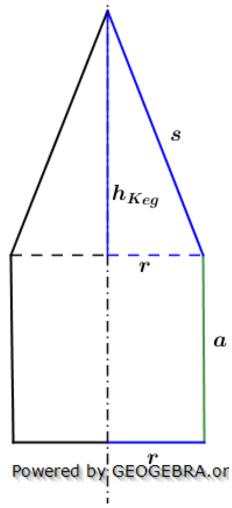
V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 79,8 \cdot 8,4 = 223,44$

Das Volumen der Pyramide beträgt $223,4\ cm^3$.

Lösung P4/2008

<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von r.
Berechnung der Quadratfläche.
Berechnung der Dreiecksfläche aus der Differenz von A_{Ges} und der Quadratfläche.
Berechnung von h_{Keg} über die Flächenformel für das Dreieck.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels M_{Zyl} des Zylinders.
Berechnung des Mantels M_{Keg} des Kegels.
Berechnung der kreisförmigen Grundfläche.
Berechnung von O_{Ges}.



<u>Klausuraufschrieb</u>

r: $r = 0{,}5 \cdot a = 0{,}5 \cdot 6{,}2 = 3{,}1$

A_Q: $A_Q = a^2 = 6,2^2 = 38{,}44$

A_{3-Eck}: $A_{3-Eck} = A_{Ges} - A_Q = 67 - 38{,}44 = 28{,}56$

h_{Keg}: $A_{3-Eck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{Keg}$ | $\cdot 2;\ : a$

$h_{Keg} = \frac{2 \cdot A_{3-Eck}}{a} = \frac{2 \cdot 28{,}56}{6{,}2} = 9{,}21$

s: $s = \sqrt{r^2 + h_{Keg}^2} = \sqrt{3,1^2 + 9{,}21^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{94{,}4341} = 9{,}72$

M_{Zyl}: $M_{Zyl} = 2\pi r \cdot h_{Zyl} = 2\pi \cdot 3{,}1 \cdot 6{,}2 = 120{,}76$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi r s = \pi \cdot 3{,}1 \cdot 9{,}72 = 94{,}66$

A_{Kreis}: $A_{Kreis} = \pi r^2 = \pi \cdot 3,1^2 = 30{,}19$

O_{Ges}: $O_{Ges} = M_{Zyl} + M_{Keg} + A_{Kreis} = 120{,}76 + 94{,}66 + 30{,}19 = 245{,}61$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $245{,}6\ cm^2$.

Lösung P5/2008

$$\frac{4x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x} + \frac{4 + x}{x + 2} = \frac{1 - 3x}{x}$$

Nenner 1: $x^2 + 2x$ $\quad x(x+2)$
Nenner 2: $x + 2$
<u>Nenner 3: x</u>
Hauptnenner: $x(x+2)$

$x(x+2) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 0\}$

$$\frac{(4x^2 + 3x - 6) \cdot \cancel{x(x+2)}}{\cancel{x(x+2)}} + \frac{(4+x) \cdot x\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = \frac{(1-3x) \cdot \cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}$$

$4x^2 + 3x - 6 + x \cdot (4 + x) = (1 - 3x)(x + 2)$ | Klammern auflösen

$4x^2 + 3x - 6 + 4x + x^2 = -3x^2 - 5x + 2$ | $+3x^2;\ +5x;\ -2$

$8x^2 + 12x - 8 = 0$ | $:(8)$

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ | p/q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -2$

Wegen $x_2 = -2 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ die einzigste Lösung.

Lösung P6/2008

(1)	$\frac{3y-7}{2}-5=x$	|	$\cdot 2$
(2)	$y-6=\frac{x+3}{5}$	|	$\cdot 5$
(1)	$3y-7-10=2x$	|	$+17$
(2)	$5y-30=x+3$	|	$+30$
(1)	$3y=2x+17$		
(2)	$5y=x+33$	|	$\cdot 2$
(1)	$3y=2x+17$		
(2)	$10y=2x+66$		
(2)-(1)	$7y=0+66-17$		
	$7y=49$	|	$:7$
	$y=7 \longrightarrow$ (2)		
(2)	$5\cdot 7=x+33$	|	-33
	$x=2$		
	$\mathbb{L}=\{(2;7)\}$		

Lösung P7/2008

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 3 bzw. 4 Jahre mit variablem Zinssatz.

Endkapital nach drei Jahren:

$K_3=K_0\cdot q_1\cdot q_2\cdot q_3$

$K_3=2500\cdot 1{,}035\cdot 1{,}0375\cdot 1{,}0425$

$K_3=2798{,}62$

Gabi hat am Ende der drei Jahren ein Guthaben von $2.798{,}62$ €.

Zinssatz für das vierte Jahr:

$K_4=K_3+132{,}93$

$K_4=2798{,}62+132{,}93=2931{,}55$

$K_4=K_3\cdot q_4$

$2931{,}55=2798{,}62\cdot q_4 \qquad | \quad :2798{,}62$

$q_4=\frac{2931{,}55}{2798{,}62}=1{,}0475$

$q_4=1+\frac{p_4\%}{100} \Longrightarrow \quad p_4\%=4{,}75\ \%$

Der Zinssatz im vierten Jahr beträgt $4{,}75\ \%$.

Lösung P8/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b),(w;w),(r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r),(r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$$