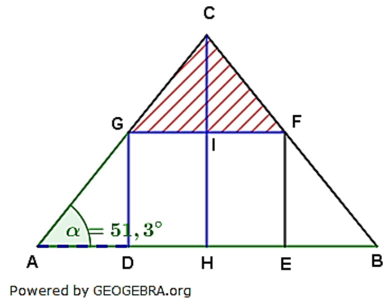
Lösung P1/2009

Lösungslogik

Berechnung von $\overline{GD}$ über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{CH}$ über den $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{CI}$ aus der Differenz von $\overline{CH}$ und $\overline{GD}$.
Berechnung von $\overline{GF}$ über $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.
Berechnung von A_{GFC} über die Flächenformel eines Dreiecks.



Klausuraufschrieb

$A_{GFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GF} \cdot \overline{CI}$

$\overline{GD}$: $\quad sin\alpha = \frac{\overline{GD}}{\overline{AG}} \quad | \quad \cdot \overline{AG}$

$\overline{GD} = \overline{AG} \cdot sin\alpha = 3{,}1 \cdot sin51{,}3° = 2{,}42$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GD}^2 = 3{,}1^2 - 2{,}42^2 = 3{,}7536 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\overline{AD} = 1{,}94$

$\overline{CH}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{CH}}{0{,}5 \cdot \overline{AB}} \quad | \quad \cdot 0{,}5 \cdot \overline{AB}$

$\overline{CH} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot tan\alpha = 0{,}5 \cdot 7{,}2 \cdot tan51{,}3° = 4{,}49$

$\overline{CI}$: $\quad \overline{CI} = \overline{CH} - \overline{GD} = 4{,}49 - 2{,}42 = 2{,}07$

$\overline{GF}$: $\quad \overline{GF} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AD} = 7{,}2 - 2 \cdot 1{,}94 = 3{,}32$

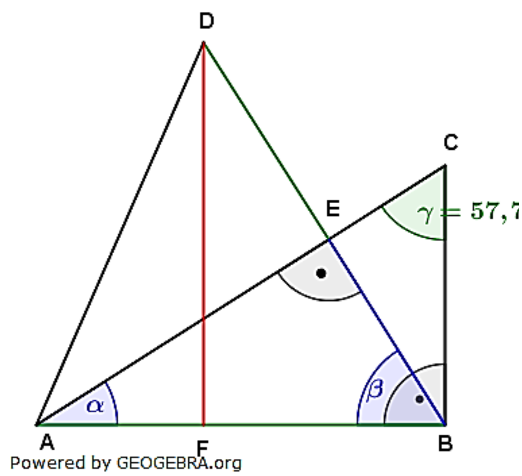
A_{GFC}: $\quad A_{GFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GF} \cdot \overline{CI} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}32 \cdot 2{,}07 = 3{,}43$

Das Dreieck GFC hat einen Flächeninhalt von $3{,}4\ cm^2$.

Lösung P2/2009

Lösungslogik

Berechnung von α als Ergänzungswinkel des Dreiecks ABC.
Berechnung von β als Ergänzungswinkel des Dreiecks ABD.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{DF}$ über den $sin\beta$.



Klausuraufschrieb

α: $\quad \alpha = 90° - \gamma = 90° - 57{,}7° = 32{,}3°$

β: $\quad \beta = 90° - \alpha = 90° - 32{,}3° = 57{,}7°$

$\overline{EB}$: $\quad sin\alpha = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}$

$\overline{EB} = \overline{AB} \cdot sin\alpha = 6{,}8 \cdot sin32{,}3° = 3{,}63$

$\overline{DF}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}+\overline{EB}} \quad | \quad \cdot (\overline{DE} + \overline{EB})$

$\overline{DF} = (\overline{DE} + \overline{EB}) \cdot sin\alpha = (3{,}9 + 3{,}63) \cdot sin57{,}7° = 6{,}36$

Der Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$ beträgt $6{,}4\ cm$.

Lösung P3/2009

Lösungslogik

Berechnung von r über das gegebene Volumen des Kegels und dessen Höhe.
Berechnung der Seitenkante s des Kegels über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Mantelfläche M_{Keg} des Kegels.
Berechnung der Restoberfläche O_{Rest} für den Zylinder aus der Differenz von O_{Ges} und M_{Keg}.
Berechnung der Fläche A_{Kreis} des Grundkreises.
Berechnung der Mantelfläche M_{Zyl} des Zylinders aus der Differenz von O_{Rest} und M_{Kreis}.
Berechnung der Höhe h_{Zyl} des Zylinders über dessen Mantelfläche M_{Zyl}.

Klausuraufschrieb

r: $\quad V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{Keg} \qquad | \quad \cdot 3;\ : (\pi \cdot h_{Keg});\ \sqrt{\ }$

$\quad r = \sqrt{\frac{3 \cdot V_{Keg}}{\pi \cdot h_{Keg}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 223}{\pi \cdot 8{,}5}} = 5{,}0$

s: $\quad s = \sqrt{r^2 + h_{Keg}^2} = \sqrt{5^2 + 8,5^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\quad s = \sqrt{97{,}25} = 9{,}86$

M_{Keg}: $\quad M_{Keg} = \pi r s = \pi \cdot 5 \cdot 9{,}86 = 154{,}88$

O_{Rest}: $\quad O_{Rest} = O_{Ges} - M_{Keg} = 344 - 154{,}88 = 189{,}12$

A_{Kreis}: $\quad A_{Kreis} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54$

M_{Zyl}: $\quad M_{Zyl} = O_{Rest} - A_{Kresi} = 189{,}12 - 78{,}54 = 110{,}58$

h_{Zyl}: $\quad M_{Zyl} = 2\pi r h_{Zyl} \qquad | \quad : (2\pi \cdot r)$

$\quad h_{Zyl} = \frac{M_{Zyl}}{2\pi \cdot r} = \frac{110{,}58}{2\pi \cdot 5} = 3{,}52$

Die Höhe des Zylinders beträgt $3{,}5\ cm$.

Aufgabe P4/2009

Lösungslogik

Über den Scheitelpunkt S die Parabelgleichung aufstellen.
Berechnung der Schnittpunkte zwischen p und g durch Gleichsetzung.
Abstandsberechnung mit dem Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p mit $S(3|-2)$:

p: $\quad y = (x - x_s)^2 + y_s$

$\quad y = (x-3)^2 - 2 \qquad |$ Scheitelpunktgleichung

$\quad y = x^2 - 6x + 7 \qquad |$ allgemeine Gleichung der Parabel

g: $\quad y = 2x - 5$

Schnittpunkte von p und g:

$p \cap g \qquad |$ Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$\quad x^2 - 6x + 7 = 2x - 5 \qquad | \quad +5;\ -2x$

$\quad x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad |$ p/q-Formel

$\quad x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$

$\quad x_1 = 6;\quad x_2 = 2$

$\quad y_1 = 2x_1 - 5 = 2 \cdot 6 - 5 = 7$

$\quad y_2 = 2x_2 - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

Schnittpunkte sind $P(6|7)$ und $Q(2|-1)$.

Abstand von P und Q:

$\overline{PQ}$: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{(2-6)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$

Die Punkte P und Q sind etwa $8{,}9\ LE$ voneinander entfernt.

Lösung P5/2009

$\frac{x+4}{x-1} - \frac{5}{x} = \frac{3x^2+x-7}{x(x-1)}$

Nenner 1: $x-1$

Nenner 2: x

Nenner 3: $x(x-1)$

Hauptnenner: $x(x-1)$

$x(x-1) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$\frac{(x+4)\cdot \cancel{x(x-1)}}{\cancel{x-1}} - \frac{5\cdot \cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \frac{(3x^2+x-7)\cdot \cancel{x(x-1)}}{\cancel{x(x-1)}}$

$x(x+4) - 5x(x-1) = 3x^2 + x - 7$ | Klammern auflösen

$x^2 + 4x - 5x + 5 = 3x^2 + x - 7$ | $-3x^2;\ -x;\ +7$

$-2x^2 - 2x + 12 = 0$ | $:(-2)$

$x^2 + x - 6 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 2;\quad x_2 = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 2\}$

Lösung P6/2009

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 3 bzw. 4 Jahre mit festem Zinssatz.

Endkapital von Frau Schön:

$K_4 = K_0 \cdot q^4$

$K_4 = 10000 \cdot 1{,}042^4 = 11788{,}83$

Frau Schön hat nach vier Jahren ein Guthaben von $11.788{,}83$ €.

Zinssatz von Frau Reiche:

Frau Reiche möchte das gleiche Ergebnis bereits nach drei Jahren erzielen, somit ist $K_3 = 11788{,}83$.

$K_3 = K_0 \cdot q^3$

$11788{,}83 = 10000 \cdot q^3$ | $:10000$

$q^3 = \frac{11788{,}83}{10000} = 1{,}179$ | $\sqrt[3]{\ }$

$q = 1{,}0564$

$q = 1 + \frac{p\%}{100} \Longrightarrow\ p\% \approx 5{,}65\ \%$

Frau Reiche muss einen festen Zinssatz von $5{,}65\ \%$ vereinbaren.

Lösung P7/2009

Lösungslogik

Erstellung einer Rangliste getrennt nach Klasse 8a und 8b.

Berechnung des Zentralwertes und des Mittelwertes getrennt nach Klasse 8a und 8b.

Beurteilung der Auswirkung auf Zentral- und Mittelwert von Klasse 8a nach Wegnahme der Wertung von Paul.

Klausuraufschrieb

Rangliste Jungen 8a:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weite (m)	22,5	27	27,5	29	32	32	39,5	41,5	42	51

Rangliste Jungen 8b:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Weite (m)	19	25	25,5	26	29	29,5	30	33	36	36,5	39,5	41,5	45,5

Klasse 8a:

z_{8a}: $r_z = n \cdot 10 = 10 \cdot 0{,}5 = 5$

$z_{8a} = \frac{x_5+x_6}{2} = \frac{32+32}{2} = 32\ m$

$\overline{x}_{8a}$: $\overline{x}_{8a} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{10}}{10} = \frac{22{,}5+27+\dots+51}{10} = \frac{344}{10} = 34{,}4\ m$

Klasse 8b:

z_{8b}: $r_z = n \cdot 13 = 13 \cdot 0{,}5 = 6{,}5$

$z_{8b} = x_7 = 30\ m$

$\overline{x}_{8b}$: $\overline{x}_{8b} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{10}}{13} = \frac{19+25+\dots+45{,}5}{13} = \frac{416}{13} = 32{,}0\ m$

Klasse 8a ohne Wurf von Paul:

z_{8aoP}: $r_z = n \cdot 9 = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$

$z_{8aoP} = x_5 = 32\ m$

$\overline{x}_{8aoP}$: $\overline{x}_{8aoP} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_9}{9} = \frac{22{,}5+27+\dots+42}{9} = \frac{293}{9} = 32{,}6\ m$

Die Herausnahme der Wertung für Paul hat keinen Einfluss auf den Zentralwert. Das arithmetische Mittel hingegen nimmt ab.

Lösung P8/2009

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$$

$$P(r;r) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} \quad P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \left(P(r;r) + P(b;b)\right)$$
$$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$$

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$$

Höchstens eine Kugel ist rot:

$$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$$