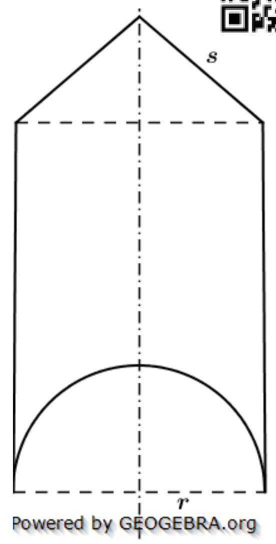
Aufgabe P1/2010

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder und aufgesetztem Kegel.
Aus diesem Körper wird eine Halbkugel herausgearbeitet (siehe Achsenschnitt).
Es gilt:

$r = 3{,}0\ cm$ (Radius des Zylinders)
$h = 8{,}6\ cm$ (Höhe des Zylinders)
$s = 3{,}8\ cm$ (Mantellinie des Kegels)

Berechnen Sie das Volumen des Restkörpers.

Lösung: $V_{Rest} = 209\ cm^3$



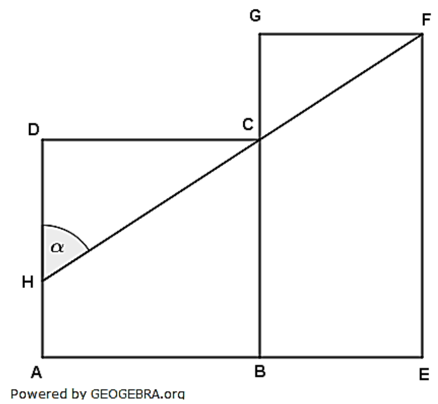
Aufgabe P2/2010

Ein Quadrat und ein Rechteck haben die Punkte B und C gemeinsam.
Es gilt:

$\overline{CD} = 4{,}8\ cm$
$\overline{FH} = 10{,}0\ cm$
$\alpha = 57{,}0°$

Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $BEFC$.

Lösung: $u_{BEFC} = 19{,}8\ cm$.



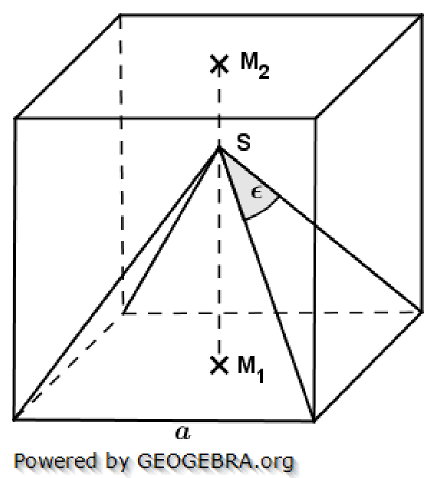
Aufgabe P3/2010

Das Schrägbild zeigt eine Pyramide in einem Würfel.
Es gilt:

$a = 8\ cm$
$\epsilon = 58{,}0\ °$

Wie groß ist das Volumen der Pyramide?
Berechnen Sie die Länge $\overline{ES}$.

Lösung: $V = 128\ cm^3$
$\overline{ES} = 6{,}0 cm$



Aufgabe P4/2010

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

(1) $\frac{x-3}{2} = y + 1$

(2) $\frac{2x-5}{3} - 10(y-1) = 16$ $\mathbb{L} = \{(4; -0{,}5)\}$

Aufgabe P5/2010

Die nach unten geöffnete Parabel p hat die Gleichung $y = -\frac{1}{4}x^2 + 5$. Zeichnen Sie die Parabel in ein Koordinatensystem.
Die Gerade g hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$ und schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von p und g.

Lösung: $P(-4|1); Q(2|4)$

Aufgabe P6/2010

In einem Behälter befinden sich drei blaue und drei rote Kugeln. Viola führt zwei Zufallsexperimente durch:

Experiment 1: Sie zieht zwei Kugeln mit Zurücklegen.

Lösung: $p = \frac{1}{2} = 50\ \%$

Experiment 2: Sie zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

Lösung: $p = \frac{18}{30} = 60\ \%$

Sie vermutet: "In beiden Experimenten ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, fünfzig Prozent."
Überprüfen Sie diese Vermutung.

Aufgabe P7/2010

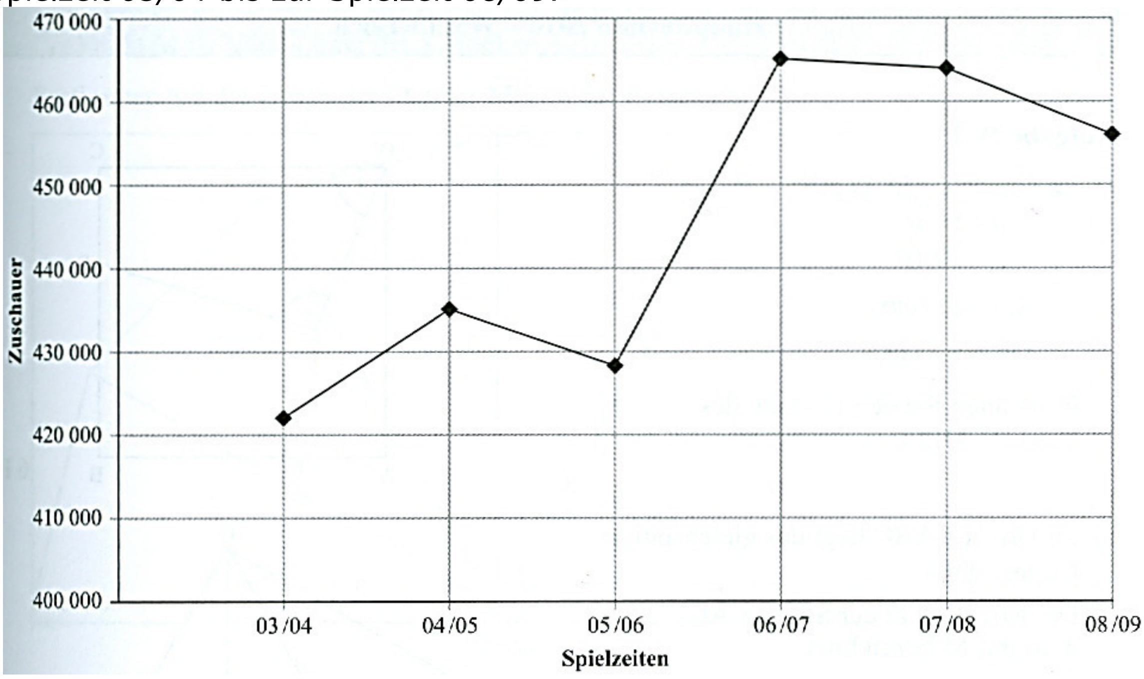
Die Klasse 10c wurde über die Anzahl der im letzten Monat versandten SMS befragt. Die Tabelle zeigt die Angaben von 12 Jungen und von 15 Mädchen:

Jg.	5	0	39	21	77	14	46	25	128	24	35	66			
Md.	37	29	67	36	10	47	34	177	56	116	28	51	80	0	132

Um wie viel Prozent liegt das arithmetische Mittel der versandten SMS der 15 Mädchen über dem der 12 Jungen?
Geben Sie die Zentralwerte der beiden Datenreihen an.
Florian (20 SMS), Eva (15 SMS) und Laura (170 SMS) können ihre Werte erst nachträglich mitteilen.
Welchen Einfluss hat dies auf die bereits ermittelten Zentralwerte?

Aufgabe P8/2010

Die Grafik veranschaulicht die Zuschauerentwicklung eines Fußballvereins von der Spielzeit *03/04* bis zur Spielzeit *08/09.*



Zwischen welchen Spielzeiten liegt die größte Steigerung vor; wie viel Prozent beträgt sie? (Entnehmen Sie der Zeichnung die notwendigen Werte so genau wie möglich).

Um die Zuschauerzahl für 09/10 vorhersagen zu können, wird die prozentuale Veränderung zwischen *07/08* und *08/09* ermittelt. Diese prozentuale Veränderung verwendet der Verein für die Prognose.

Mit welcher Zuschauerzahl kann er für 09/10 planen?

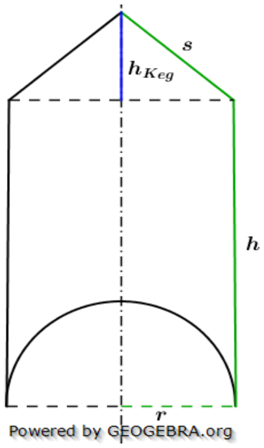
Lösung: Größte Steigerung Zuschauerzahlen 05/06 nach 06/07: $8{,}6\ \%$

Planung für Spielzeit 09/10 etwa 449000 Zuschauer.

Lösung P1/2010

Lösungslogik

Das Volumen des Körpers setzte sich zusammen aus dem Volumen des Zylinders mit der Höhe h abzüglich des Volumens der Halbkugel mit dem Radius r zuzüglich dem Volumen des aufgesetzten Kegels mit dem Radius r und der Höhe h_{Keg}.
Berechnung von h_{keg} Über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens des Zylinders.
Berechnung des Volumens der Halbkugel.
Berechnung des Volumens des Kegels.
Berechnung des Volumens des zusammengesetzten Körpers.



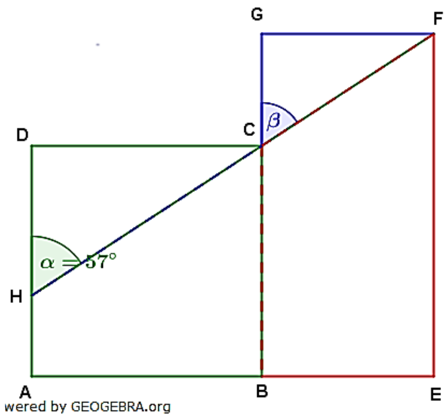
Klausuraufschrieb

h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{3{,}8^2 - 3^2}$ | Satz des Pythagoras
$h_{Keg} = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33$
V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 8{,}6 = 243{,}2$
V_{HK}: $V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 56{,}55$
V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{Keg} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}33 = 22{,}0$
$V_{Körper}$: $V_{Körper} = V_{Zyl} - V_{HK} + V_{Keg} = 243{,}2 - 56{,}55 + 22 = 208{,}65$
Der Körper hat ein Volumen von $209\ cm^3$.
Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $311\ cm^2$.

Lösung P2/2010

Lösungslogik

Berechnung von β als Stufenwinkel.
Berechnung von $\overline{HC}$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{CF}$ aus der Differenz von $\overline{HF}$ und $\overline{HC}$.
Berechnung von $\overline{GF}$ über den $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{GC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{EF}$ aus der Summe von $\overline{BC} = \overline{CD}$ und $\overline{GC}$.
Berechnung von u_{BEFC}.



Klausuraufschrieb

$u_{BEFC} = \overline{BC} + \overline{CF} + \overline{EF} + \overline{BE}$
β: $\beta = \alpha = 57°$
$\overline{HC}$: $sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{HC}}$ | $\cdot \overline{HC};\ : sin\alpha$
$\overline{HC} = \frac{\overline{CD}}{sin\alpha} = \frac{4{,}8}{sin57°} = 5{,}72$
$\overline{CF}$: $\overline{CF} = \overline{HF} - \overline{HC} = 10{,}0 - 5{,}72 = 4{,}28$

$\overline{GF}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{GF}}{\overline{CF}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{CF}$

$\overline{GF} = \overline{CF} \cdot sin\beta = 4{,}28 \cdot sin57° = 3{,}59$

$\overline{GC}$: $\quad \overline{GC}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{GF}^2 = 4{,}28^2 - 3{,}59^2 = 5{,}4304$ $\quad | \quad \sqrt{}$

$\overline{GC} = 2{,}33$

$\overline{EF}$: $\quad \overline{EF} = \overline{CD} + \overline{GC} = 4{,}8 + 2{,}33 = 7{,}13$

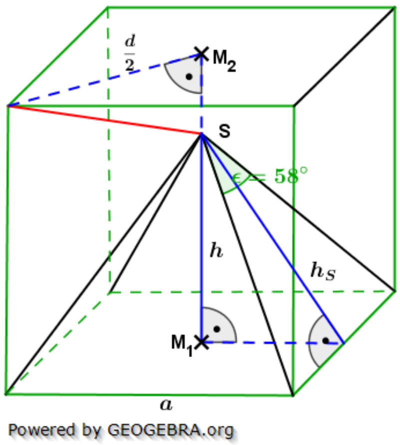
u_{BEFC}: $\quad u_{BEFC} = \overline{BC} + \overline{CF} + \overline{EF} + \overline{BE} = 4{,}8 + 4{,}28 + 7{,}13 + 3{,}59 = 19{,}8$

Der Umfang des Vierecks $BEFC$ beträgt $19{,}8\ cm$.

Lösung P3/2010

Lösungslogik

Berechnung von h_s über den $tan\frac{\epsilon}{2}$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens der Pyramide.
Berechnung von $\overline{SM_2}$ aus der Differenz von a und h.
Berechnung der Diagonalen d des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.
Berechnung von $\overline{ES}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

h_s: $\quad tan\frac{\epsilon}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_S}$ $\quad | \quad \cdot h_S;\ : tan\frac{\epsilon}{2}$

$h_s = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\epsilon}{2}} = \frac{4}{tan29°} = 7{,}22$

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7{,}22^2 - 4^2}$ $\quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{36{,}1284} = 6{,}0$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 128$

Das Volumen der Pyramide beträgt $128\ cm^3$.

$\overline{SM_2}$: $\quad \overline{SM_2} = a - h = 8 - 6 = 2$

d: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2} = 11{,}31 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = 5{,}66$

$\overline{ES}$: $\quad \overline{ES} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \overline{SM_2}^2} = \sqrt{5{,}66^2 + 2^2}$ $\quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$\overline{ES} = \sqrt{36{,}0356} = 6{,}0$

Die Strecke $\overline{ES}$ ist $6{,}0\ cm$ lang.

Lösung P4/2010

(1) $\quad \frac{x-3}{2} = y + 1$ $\quad | \quad \cdot 2$

(2) $\quad \frac{2x-5}{3} - 10(y-1) = 16$ $\quad | \quad \cdot 3$

(1) $\quad x - 3 = 2y + 2$ $\quad | \quad -2$

(2) $\quad 2x - 5 - 30(y - 1) = 48$ $\quad | \quad$ ausmultiplizieren

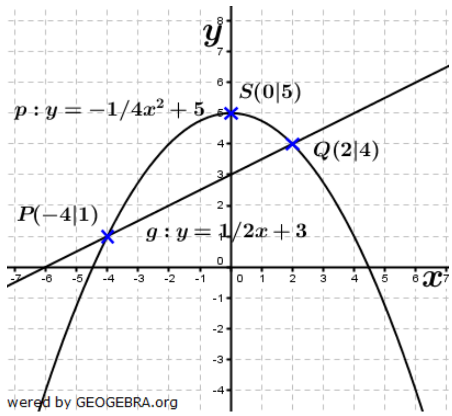
(1)	$2y = x - 5$	$\cdot 2$
(2)	$2x - 5 - 30y + 30 = 48$	$-2x;\ -25$
(1)	$4y = 2x - 10$	
(2)	$-30y = -2x + 23$	
(1)+(2)	$-26y = 0 - 10 + 23$	$:(-26)$
	$y = -0{,}5 \longrightarrow$ (1)	
(1)	$2 \cdot (-0{,}5) = x - 5$	$+5$
	$x = 4$	
	$\mathbb{L} = \{(4; -0{,}5)\}$	

Lösung P5/2010

Lösungslogik

Erstellung der Graphik. Die Parabel ist nach unten geöffnet, breiter und in x–Richtung nicht verschoben, der Scheitel liegt somit bei $S(0|5)$.
Aufstellung der Geradengleichung.
Berechnung der Schnittpunkte zwischen p und g durch Gleichsetzung.

Klausuraufschrieb



p: $\quad y = -\frac{1}{4}x^2 + 5$

Geradengleichung g durch $P(0|3)$ mit $m = \frac{1}{2}$:

g: $\quad y = mx + b \quad |\quad m = \frac{1}{2}$ (gegeben)

$\quad y = \frac{1}{2}x + 3 \quad |\quad$ wegen $P(0|3)$ ist $b = 3$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g \quad |\quad$ Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$\frac{1}{4}x^2 + 5 = \frac{1}{2}x + 3 \quad |\quad -3;\ -\frac{1}{2}x$

$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad |\quad \cdot(-4)$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad |\quad p/q$-Formel

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -4$

$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$

$y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 3 = 1$

Schnittpunkte sind $P(-4|1)$ und $Q(2|4)$.

Lösung P6/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} \quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$$

Ohne Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30} \quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{30} + \frac{9}{30} = \frac{18}{30} = 60\ \%$$

Violas Vermutung ist falsch.

Lösung Aufgabe P7/2010

Lösungslogik

Erstellung einer Rangliste getrennt nach Klasse Jungen und Mädchen
Berechnung der prozentualen Differenz des arithmetischen Mittels der versandten SMS der Mädchen und Jungen.
Berechnung des Zentralwertes der beiden Datenreihen.
Einfluss der Nachmeldung von Florian, Eva und Laura auf die ermittelten Zentralwerte.

Klausuraufschrieb

Rangliste Jungen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl SMS	0	5	14	21	24	25	35	39	46	66	77	128

Rangliste Mädchen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Anzahl SMS	0	10	28	29	34	36	37	47	51	56	67	80	116	132	177

Arithmetische Mittel:

$\overline{x}_{Jungen}$: $\quad \overline{x}_{Jungen} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{12}}{12} = \frac{0+5+14\ldots+128}{13} = \frac{480}{12} = 40\ SMS$

$\overline{x}_{Mädchen}$: $\quad \overline{x}_{Mädchen} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{15}}{15} = \frac{0+10+28\ldots+177}{15} = \frac{900}{15} = 60\ SMS$

$p\%$: $\quad p\% = \frac{\overline{x}_{Mädchen}}{\overline{x}_{Jungen}} \cdot 100 = \frac{60}{40} \cdot 100 = 150\ \%$

$\overline{x}_{Mädchen}$ ist erhöhter Grundwert von $\overline{x}_{Jungen}$.

$p\%_{Diff}$: $\quad p\%_{Diff} = p\% - 100\% = 50\ \%$

Das arithmetische Mittel der versandten SMS der Mädchen liegt $50\ \%$ *höher als der Jungen.*

Zentralwerte:

z_{Jungen}: $\quad r_z = n \cdot 12 = 12 \cdot 0{,}5 = 6$

$z_{Jungen} = \frac{x_6+x_7}{2} = \frac{25+35}{2} = 30\ SMS$

$z_{Mädchen}$: $\quad r_z = n \cdot 15 = 15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5$

$z_{Mädchen} = x_8 = 47\ SMS$

Einfluss der Nachmeldung auf die Zentralwerte:

Rangliste Jungen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl SMS	0	5	14	21	24	25	35	39	46	66	77	128

↑ neu: $\boxed{20}$

Rangliste Mädchen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Anzahl SMS	0	10	28	29	34	36	37	47	51	56	67	80	116	132	177

↑ neu: $\boxed{15}$ ↑ neu: $\boxed{170}$

z_{Jungen}: $r_z = n \cdot 13 = 13 \cdot 0{,}5 = 6{,}5$

$z_{Jungen} = x_7 = 25\ SMS$

$z_{Mädchen}$: $r_z = n \cdot 17 = 17 \cdot 0{,}5 = 8{,}5$

$z_{Mädchen} = x_9 = 47\ SMS$

Der Zentralwert der Jungen sinkt auf $25\,SMS$ *während der der Mädchen gleichbleibt.*

Lösung P8/2010

Größte Steigerung der Zuschauerzahlen und Prozentsatz hierzu:

Die größte Steigerung fand von der Spielzeit 05/06 zur Spielzeit 06/07 statt. Aus der Grafik liest du ab:

Zuschauerzahlen 05/06 etwa 428000 Zuschauerzahlen 06/07 etwa 465000. Gesucht ist der Prozentsatz der Steigerung. Der Grundwert ist 428000, der Prozentwert als erhöhter Grundwert ist 465000.

$p = \frac{P}{G} = \frac{465000}{428000} = 1{,}086 = 108{,}6\ \%$

Wegen des „erhöhten Grundwertes“ musst du rechnen:

$p_{erhöht} = p - 100\% = 108{,}6 - 100 = 8{,}6\ \%$

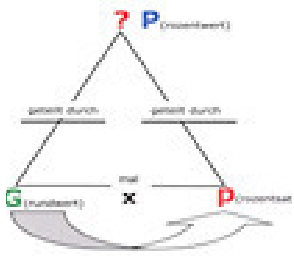
Die größte Steigerung der Zuschauerzahlen von 05/06 nach 06/07 liegt bei etwa $8{,}6\ \%$.

Prognose für die Spielzeit 09/10:

Wir berechnen zunächst die prozentuale Veränderung von 07/08 auf 08/09. Grundwert 07/08 aus Grafik etwa 463000. Prozentwert 08/09 aus Grafik etwa 456000.

$p = \frac{P}{G} = \frac{456000}{463000} = 0{,}985 = 98{,}5\ \%$

Die Zuschauerzahlen sind also rückläufig. Dieser Prozentsatz wird nach Aufgabenstellung für die Zuschauerzahl 09/10 angenommen, jetzt ist 456000 der Grundwert mit $p = 98{,}5\ \%$. Gesucht ist der Prozentwert.



$P = G \cdot p = 456000 \cdot 0{,}985 = 449160$

Der Verein kann mit etwa 449000 *Zuschauern für die Spielzeit 09/10 planen.*