Aufgabe P1/2013

Im Trapez $ABCD$ gilt:

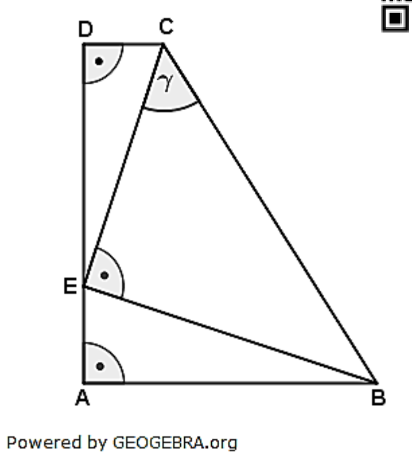
$\overline{AB} = 5{,}2\ cm$

$\overline{BC} = 7{,}1\ cm$

$\gamma = 50{,}5°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{AD}$.

Lösung: $\overline{AD} = 6{,}0\ cm$



Aufgabe P2/2013

Das rechtwinklige Dreieck AEF überdeckt das Quadrat $ABCD$ teilweise.

Es gilt:

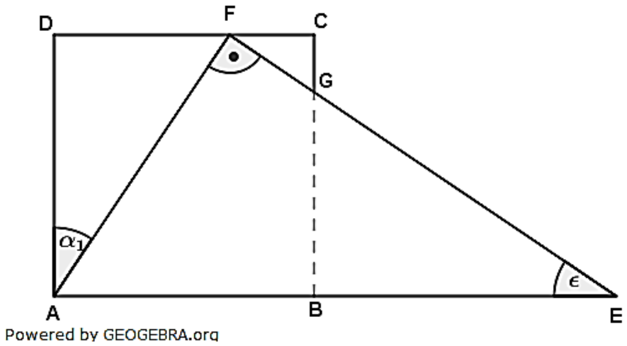
$\overline{AD} = 5{,}0\ cm$

$\alpha_1 = 34°$

Berechnen Sie den Winkel ϵ und die Länge von $\overline{EG}$.

Lösung: $\epsilon = 34°$

$\overline{EG} = 7\ cm$



Aufgabe P3/2013

Ein Zylinder und eine quadratische Pyramide haben gleich große Mantelflächen.

Die Umfänge der beiden Grundflächen sind ebenfalls gleich.

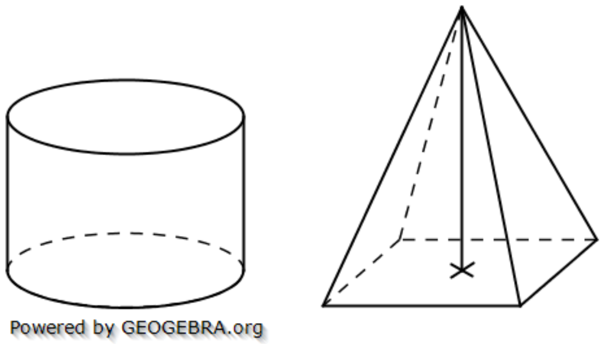
Für den Zylinder gilt:

$V_Z = 220\ cm^3$ (Volumen)

$r_Z = 3{,}8\ cm$ (Radius)

Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Lösung: $h_{Pyr} = 9{,}2\ cm$



Aufgabe P4/2013

Lösen Sie die Gleichung:

$$(3x+1)^2 + x(5-4x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)(6x+2) - 11$$

$\mathbb{L} = \{-7; -1\}$

Aufgabe P5/2013

Eine Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 4x + q$ geht durch den Punkt $A(-3|-4)$.
Der Punkt $B(1|y_B)$ liegt ebenfalls auf der Parabel p.
Berechnen Sie die y–Koordinate des Punktes B.
Die Gerade g geht durch den Scheitelpunkt S von p und durch den Punkt B.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

Lösung: $B(1|4)$; $g\colon\ y = 3x + 1$

Aufgabe P6/2013

Frau Wagner möchte einen Betrag von $5000{,}00\ €$ für drei Jahre anlegen.
Das Bankhaus Adler wirbt mit folgendem Angebot:

Zinsen für das 1. Jahr	*1,50 %*
Zinsen für das 2. Jahr	*1,75 %*
Zinsen für das 3. Jahr	*2,25 %*
Zinsen werden mitverzinst	

Im Beratungsgespräch bietet das Bankhaus Adler an, dass Frau Wagner nach Ablauf der drei Jahre zuzüglich eine Bonusprämie von $100{,}00\ €$ erhält.
Welchen Gesamtbetrag würde das Bankhaus Adler nach Ablauf der drei Jahre einschließlich Bonusprämie auszahlen?
Zusätzlich lässt sich Frau Wagner von der Opti-Bank beraten.
Ihr wird ein jährlich gleichbleibender Zinssatz angeboten. Zinsen werden mitverzinst. Eine Bonusprämie wird nicht vereinbart.
Wie hoch müsste der jährlich gleichbleibende Zinssatz für die drei Jahre bei der Opti-Bank mindestens sein, damit sich Frau Wagner für dieses Angebot entscheidet?

Lösung: $K_{3Bonus} = 5.380{,}00\ €$
$p_O\ \% = 2{,}48\ \%$

Aufgabe P7/2013

In einer Schale liegen gleich aussehende Schokowürfel.
Sechs Schokowürfel sind mit Marzipan, vier mit Nougat und zwei mit Karamell gefüllt. Anastasia zieht gleichzeitig zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen?
In einer anderen Schale liegen von jeder Sorte halb so viele Schokowürfel (dreimal Marzipan, zweimal Nougat, einmal Karamell). Leon zieht ebenfalls zwei Schokowürfel mit einem Griff.
Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen zu ziehen bleibt gleich.“
Hat Leon recht? Begründen Sie durch Rechnung.

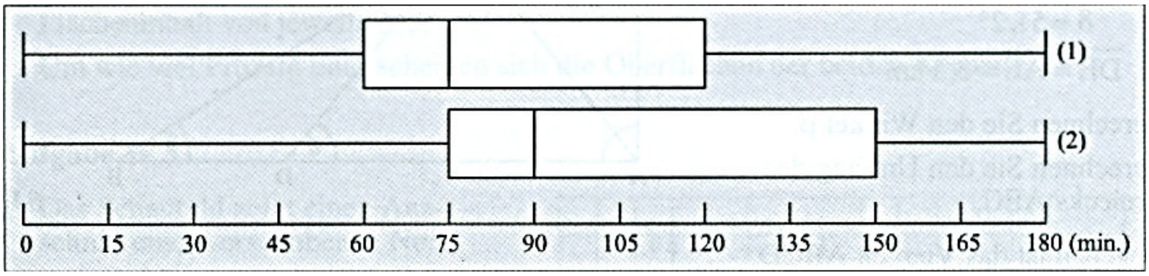
Lösung:
$P_1(unterschiedlich) = 66{,}7\ \%$
Leon hat nicht recht.
$P_2(unterschiedlich) = 73{,}3\ \%$

Aufgabe P8/2013

Drei Jugendgruppen wurden über den Zeitraum von einer Woche nach Ihren Onlinezeiten bei der Nutzung „Soziale Netzwerke" befragt. Dabei ergaben sich folgende Zeitangaben in Minuten:

Gruppe A	0	0	0	30	45	60	60	150	150	150	165	180	180				
Gruppe B	0	30	45	45	60	60	60	75	75	75	90	105	120	135	150	150	180
Gruppe C	0	30	45	75	90	90	90	90	120	150	150	180	180				

Zu welchen Gruppen gehören die beiden Boxplots?
Begründen Sie Ihre Antwort.

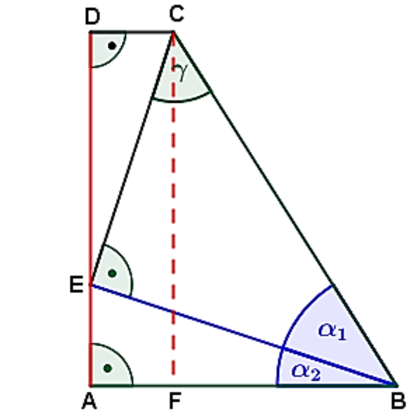


Erstellen Sie für die dritte Gruppe den fehlenden Boxplot.

Lösung P1/2013

Lösungslogik

Berechnung von α_1 über die Winkelsumme im Dreieck BCE.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den $sin\gamma$ im Dreieck BEC.
Berechnung von α_2 über den cos im Dreieck ABE.
Die Strecke $\overline{AD}$ entspricht der Strecke $\overline{FC}$.
Berechnung von $\overline{AD} = \overline{FC}$ über den $sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ im Dreieck ABE.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

α_1: $\alpha_1 = 90° - \gamma = 90° - 50{,}5° = 39{,}5\,°$

$\overline{BE}$: $sin\gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\overline{BE} = \overline{BC} \cdot sin\gamma = 7{,}1 \cdot sin50{,}5° = 5{,}48$

α_2: $cos\alpha_2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$

$cos\alpha_2 = \frac{5{,}2}{5{,}48} = 0{,}95$

$\alpha_2 = cos^{-1}(0{,}95) = 18{,}19°$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = \overline{FC}$

$sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$

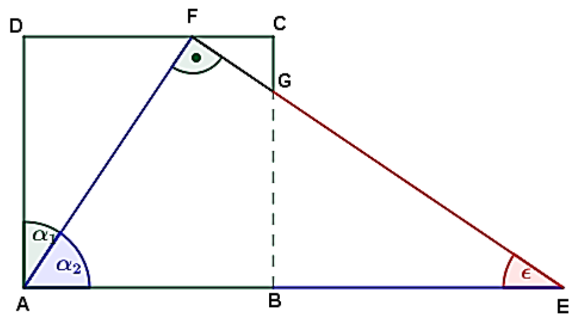
$\overline{AD} = \overline{BC} \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 7.1 \cdot sin(39{,}5° + 18{,}19°) = 7.1 \cdot sin57{,}69° = 6$

Die Strecke $\overline{AD}$ ist $6\,cm$ lang.

Lösung P2/2013

Lösungslogik

Berechnung von α_2 als Ergänzungswinkel von α_1 zu $90°$.
Berechnung von ϵ im rechtwinkligen Dreieck AEF.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den $cos\alpha_1$ im Dreieck AFD.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den $cos\alpha_2$ im Dreieck AEF.
Berechnung von $\overline{BE}$ als Differenz aus $\overline{AE}$ und $\overline{AB}$ ($\overline{AB} = \overline{AD}$).
Berechnung von $\overline{EG}$ über den $cos\epsilon$ im Dreieck AEG.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

α_2: $\alpha_2 = 90° - \alpha_1 = 90° - 34° = 56°$

ϵ: $\epsilon = 90° - \alpha_2 = 901° - 56° = 34°$

$\overline{AF}$: $cos\alpha_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} \quad | \quad \cdot \overline{AF};\ :cos\alpha_1$

$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{cos\alpha_1} = \frac{5{,}0}{cos34°} = 6{,}03$

$\overline{AE}$: $\quad cos\alpha_2 = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{AE};\ : cos\alpha_2$

$\overline{AE} = \frac{\overline{AF}}{cos\alpha_2} = \frac{6{,}03}{cos56°} = 10{,}78$

$\overline{BE}$: $\quad \overline{BE} = \overline{AE} - \overline{AD} = 10{,}78 - 5 = 5{,}78$

$\overline{EG}$ $\quad cos\epsilon = \frac{\overline{BE}}{\overline{EG}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{EG};\ : cos\epsilon$

$\overline{EG} = \frac{\overline{BE}}{cos\epsilon} = \frac{5{,}78}{cos34°} = 6{,}97$

Der Winkel ϵ ist $34\,°$ groß, die Strecke $\overline{EG}$ ist $7\ cm$ lang.

Lösung P3/2013

Lösungslogik

Über das gegebene Volumen des Zylinders berechnen wir zunächst dessen Höhe über die Volumenformel $V_z = \pi r_z^2 \cdot h_z$.
Mit dem gefundenen h_z berechnen wir den Mantel des Zylinders über die Formel $M_Z = 2\pi r_Z \cdot h_z$.
Über den gegebenen Radius r_Z berechnen wir den Umfang des Grundkreises des Zylinders über die Formel $u_Z = 2\pi \cdot r_z$.
Der Umfang der Grundfläche der Pyramide ist (nach Aufgabenstellung) gleich groß wie der Umfang der Grundfläche des Zylinders. Somit muss gelten:

$u_Z = u_P = 4 \cdot a$.

Hieraus errechnen wir die Länge der Seitenkante der Pyramidengrundfläche.
Der Mantel der quadratischen Pyramide errechnet sich aus $M_P = 2 \cdot a \cdot h_s$ mit h_s als Höhe einer Seitenfläche. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h_s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$.

Daraus folgt $h_s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$.

Mantelfläche des Zylinders soll gleich groß sein wie die Mantelfläche der Pyramide, also $M_Z = M_P = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$

Die so gefundene Formel lösen wir dann nach h auf.

Klausuraufschrieb

h_z: $\quad V_z = \pi r_Z^2 \cdot h_z$

$220 = \pi \cdot 3{,}8^2 \cdot h_z$ $\quad | \quad : \pi \cdot 3{,}8^2$

$h_z = \frac{220}{\pi \cdot 3{,}8^2} = 4{,}85$

M_z: $\quad M_Z = 2\pi r_Z \cdot h_z = 2\pi \cdot 3{,}8 \cdot 4{,}85 = 115{,}8$

u_z: $\quad u_Z = 2\pi \cdot r_z = 2\pi \cdot 3{,}8 = 23{,}88$

a_P: $\quad u_Z = u_P = 4 \cdot a_P$

$23{,}88 = 4 \cdot a_P$ $\quad | \quad : 4$

$a_P = \frac{23{,}88}{4} = 5{,}97$

h_P: $\quad M_P = 2 \cdot a_p \cdot h_s$

$h_s^2 = \left(\frac{a_P}{2}\right)^2 + h_p^2 \Rightarrow \quad h_s = \sqrt{\frac{a_p^2}{4} + h_p^2}$ $\quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$M_P = 2 \cdot a_p \cdot \sqrt{\frac{a_p^2}{4} + h_p^2}$

$M_Z = M_P = 115{,}8$

$115{,}8 = 2 \cdot 5{,}97 \cdot \sqrt{\frac{5{,}79^2}{4} + h_P^2}$ $\quad | \quad : 2 \cdot 5{,}97$

$\frac{115,8}{2\cdot 5,97} = \sqrt{8,91 + h_P^2}$

$9,7 = \sqrt{8,91 + h_P^2}$	|	^{2}
$94,06 = 8,91 + h_P^2$	|	$-8,91$
$h_P^2 = 85,15$	|	$\sqrt{\ }$
$h_p = 9,23$		

Die Höhe der Pyramide beträgt $9,2\ cm$.

Lösung P4/2013

$(3x+1)^2 + x(5-4x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)(6x+2) - 11$	|	ausmultiplizieren
$9x^2 + 6x + 1 + 5x - 4x^2 = 3x^2 + x - 6x - 2 - 11$	|	Zusammenfassen
$5x^2 + 11x + 1 = 3x^2 - 5x - 13$	|	$-3x^2;\ +5x;\ +13$
$2x^2 + 16x + 14 = 0$	|	$:2$
$x^2 + 8x + 7 = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-7} = -4 \pm \sqrt{9} = -4 \pm 3$

$x_1 = -7; \quad x_2 = -1$

$\mathbb{L} = \{-7; -1\}$

Lösung P5/2013

<u>Lösungslogik</u>

Über eine Punktprobe mit Punkt A ermitteln wir die Unbekannte q
Wir errechnen y_B, indem wir in die Parabelgleichung $x = 1$ einsetzen.
Wir stellen die Parabelgleichung in die Scheitelpunktgleichung um und bestimmen die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
Wir berechnen die Steigung der Geraden g durch die beiden Punkte S und B.
Wir berechnen b der Geradengleichung, indem wir einen der beiden Punkte S oder B in die Geradengleichung einsetzen.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Bestimmung von q*:*

$y = x^2 + 4x + q$	|	Punktprobe mit Punkt $A(-3\|-4)$
$-4 = (-3)^2 + 4\cdot(-3) + q$		
$-4 = 9 - 12 + q$	|	$+3$
$q = -1$		

Koordinaten von B*:*

$y = x^2 + 4x - 1$	|	y_B für $x = 1$
$y_B = 1^2 + 4\cdot 1 - 1 = 4 \implies B(1\|4)$		

Scheitelpunkt von p*:*

$y = x^2 + 4x - 1$	|	Umstellen in die Scheitelpunktgleichung
$y = (x+2)^2 - 4 - 1$		
$y = (x+2)^2 - 5 \implies S(-2\|-5)$		

Geradengleichung g *durch* S *und* B*:*

$g\colon\ y = mx + b$

$m\colon \quad m = \frac{y_S - y_B}{x_S - x_B} = \frac{-5-4}{-2-1} = \frac{-9}{-3} = 3$

$g\colon\ y = 3x + b$	|	Punktprobe mit $B(1\|4)$
$y_B = 3x_B + b$		
$4 = 3\cdot 1 + b \implies b = 1$		

$g\colon\ y = 3x + 1$

Lösung P6/2013

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung; beim Bankhaus Adler variabler Zinssatz, bei der Opti-Bank fester Zinssatz.

Endkapital beim Bankhaus Adler:

$K_{3Bonus} = K_o \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + 100$

$K_{3Bonus} = 5000 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0225 + 100$

$K_{3Bonus} = 5380$

Das Endkapital beim Bankhaus Adler beträgt 5380 €.

Fester Zinssatz bei der Opti-Bank:

Das Endkapital soll gleich hoch sein, also $K_{3Bonus} = K_{3Opti} = 5380$

$K_{3Opti} = K_0 \cdot q^3$

$5380 = 5000 \cdot q^3 \quad | \quad :5000$

$q^3 = \frac{5380}{5000} \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}0247$

$q = 1 + \frac{p\%}{100} \Longrightarrow \; p\% = 2{,}47\ \%$

Die Opti-Bank muss Frau Wagner mindestens $2{,}48\ \%$ *Zinsen bieten.*

Lösung P7/2013

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.

Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen" sind:

„Marzipan; Nougat", „Marzipan; Karamell", „Nougat; Marzipan", „Karamell; Marzipan", Nougat; Karamell" und „Karamell; Nougat".

Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.

Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen" ist „Zwei gleiche Füllungen". Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:

„Marzipan; Marzipan", „Nougat; Nougat" und „Karamell; Karamell"

Aus $1 -$ „Zwei gleiche Füllungen" erhalten wir dann das Endergebnis.

Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche\ ) = 1 - P(gleiche)$

$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$

$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132} \qquad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132} \qquad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$.

Leon hat nicht recht, denn:

$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} \qquad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$.

Lösung P8/2013

Lösungslogik

Wir ermitteln die Zentralwerte getrennt nach Gruppe A, Gruppe B und Gruppe C. Nach den sich ergebenden Zentralwerten, entscheiden wir, welches Boxplot zu welcher Gruppe gehört.
Für den Boxplot der dritten Gruppe ermitteln wir noch das untere sowie obere Quartil, um den Boxplot zeichnen zu können.

Klausuraufschrieb

Gruppe A: $n = 13$ $\frac{13}{2} = 6{,}5 \Rightarrow z_A = 60$

Gruppe B: $n = 17$ $\frac{17}{2} = 8{,}5 \Rightarrow z_B = 75$

Gruppe C: $n = 17$ $\frac{13}{2} = 6{,}5 \Rightarrow z_C = 90$

Boxplot (1) gehört zur Gruppe B, da der Zentralwert bei $75\,min$ *eingetragen ist.*
Boxplot (2) gehört zur Gruppe C, da der Zentralwert bei $90\,min$ *eingetragen ist.*

Für den Boxplot der dritten Gruppe ermitteln wir noch das untere sowie obere Quartil, um den Boxplot zeichnen zu können.

Gruppe A: q_u: $\frac{13}{4} = 3{,}25 \Rightarrow q_u = 30$

q_o: $\frac{3 \cdot 13}{4} = 9{,}75 \Rightarrow q_o = 150$

Boxplot für Gruppe A: