

Aufgabe P1/2015

Im Dreieck ABC gilt:

$$\overline{AC} = \overline{CE} = 9,2 \text{ cm}$$

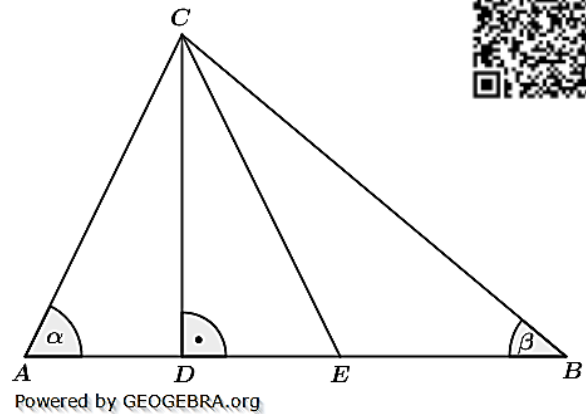
$$\alpha = 64^\circ$$

$$\beta = 40^\circ$$

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks EBC .

Lösung: $u = 27,9 \text{ cm}$

Tipp: Dreimal Sinussatz für \overline{AE} , \overline{AB} und \overline{BC} .



Aufgabe P2/2015

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

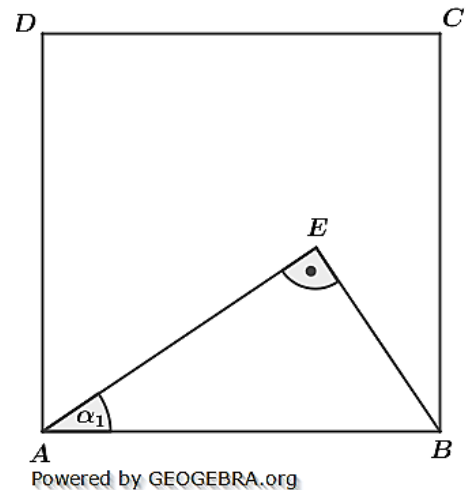
Es gilt:

$$\overline{AE} = 7,8 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 34^\circ$$

Berechnen Sie die Länge von \overline{CE} .

Lösung: $\overline{CE} = 5,84 \text{ cm}$



Aufgabe P3/2015

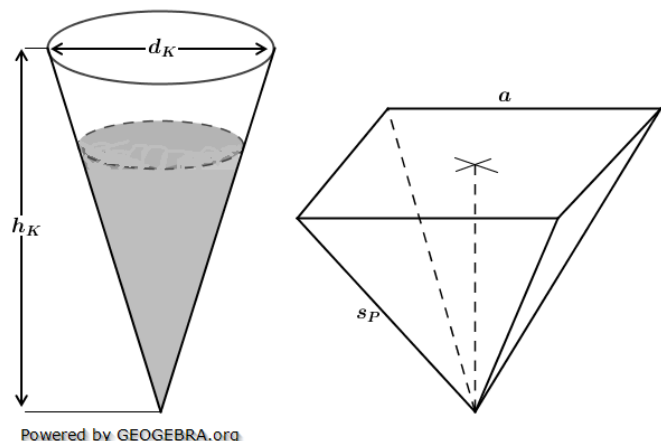
Ein Kegel ist teilweise mit Wasser gefüllt. Dabei nimmt das Wasser die Hälfte des Kegelvolumens ein. Das Wasser soll vollständig in eine quadratische Pyramide gefüllt werden. Es gilt:

$$d_k = 20 \text{ cm}; \quad h_k = 30,0 \text{ cm}$$

$$a = 16 \text{ cm}; \quad s_p = 24,0 \text{ cm}$$

Läuft das Wasser über? Überprüfen Sie durch Rechnung.

Berechnen Sie den Radius der Kugel.



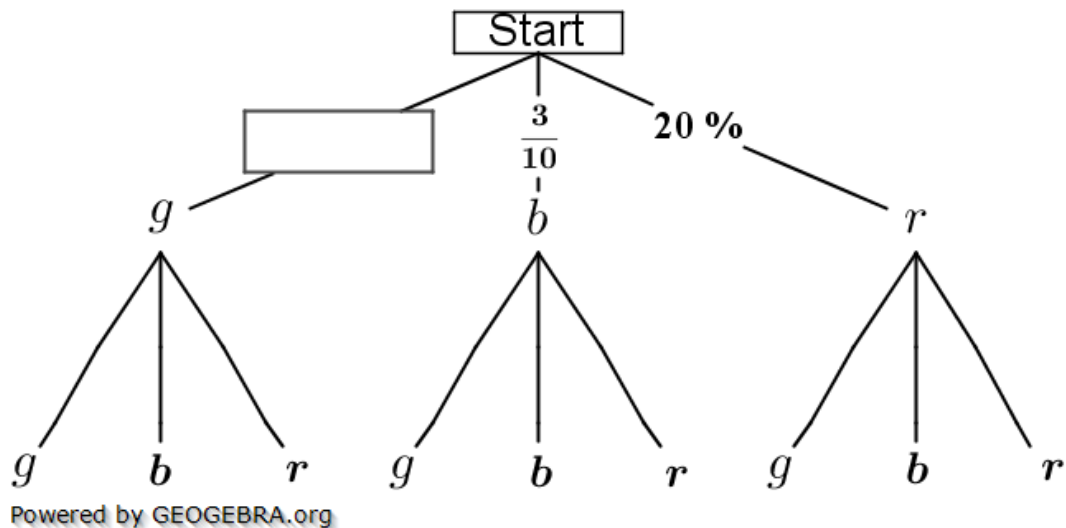
Lösung: Wasservolumen $V_W = 1570,8 \text{ cm}^3$

Pyramidenvolumen $V_P = 1806,2 \text{ cm}^3$

Somit läuft das Wasser beim Umfüllen nicht über.

Aufgabe P4/2015

In einem Behälter liegen 20 Kugeln. Sie sind rot, blau und grün gefärbt. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.



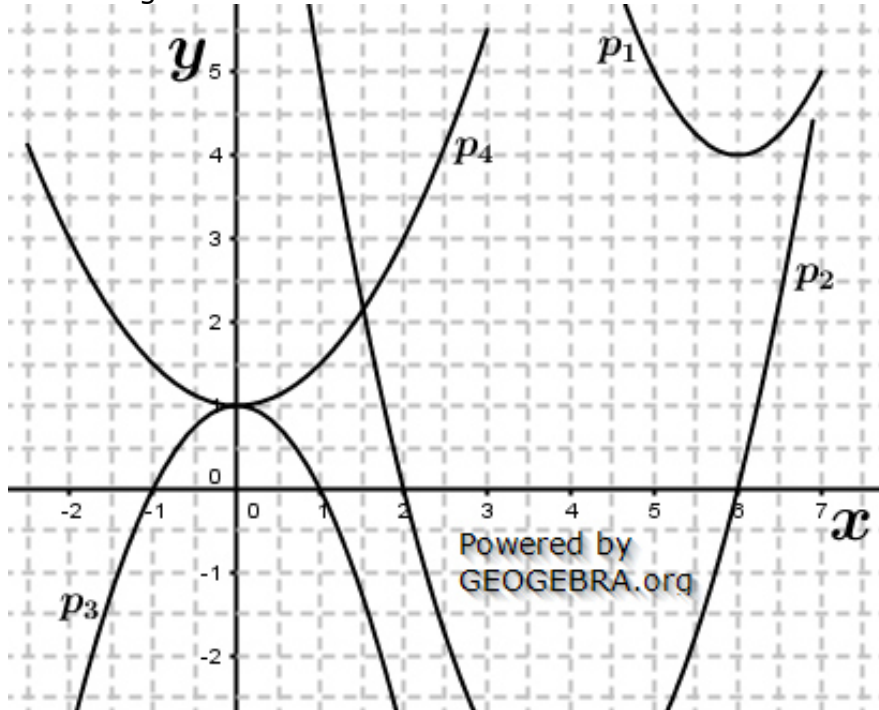
- Im Baumdiagramm fehlt eine Wahrscheinlichkeitsangabe. Ergänzen Sie diese.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugeln zu ziehen?
- In einem anderen Behälter liegen von jeder Farbe doppelt so viele Kugeln, also insgesamt 40 Kugeln. Es werden ebenfalls zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Uli sagt „Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, ist gleich.“ Hat Uli Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Aufgabe P5/2015

Das Schaubild zeigt die Ausschnitte von vier Parabeln.

- Welcher Graph gehört zur angegebenen Wertetabelle? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

| | | | | |
|-----|---|---|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 1 | 0 | -3 | -8 |



- Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q der beiden verschobenen Normalparabeln p_1 und p_2 .
 - Wie heißt die Gleichung der Parabel p_4 ?
- Entnehmen Sie dazu erforderliche Werte dem Schaubild.

Aufgabe P6/2015

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

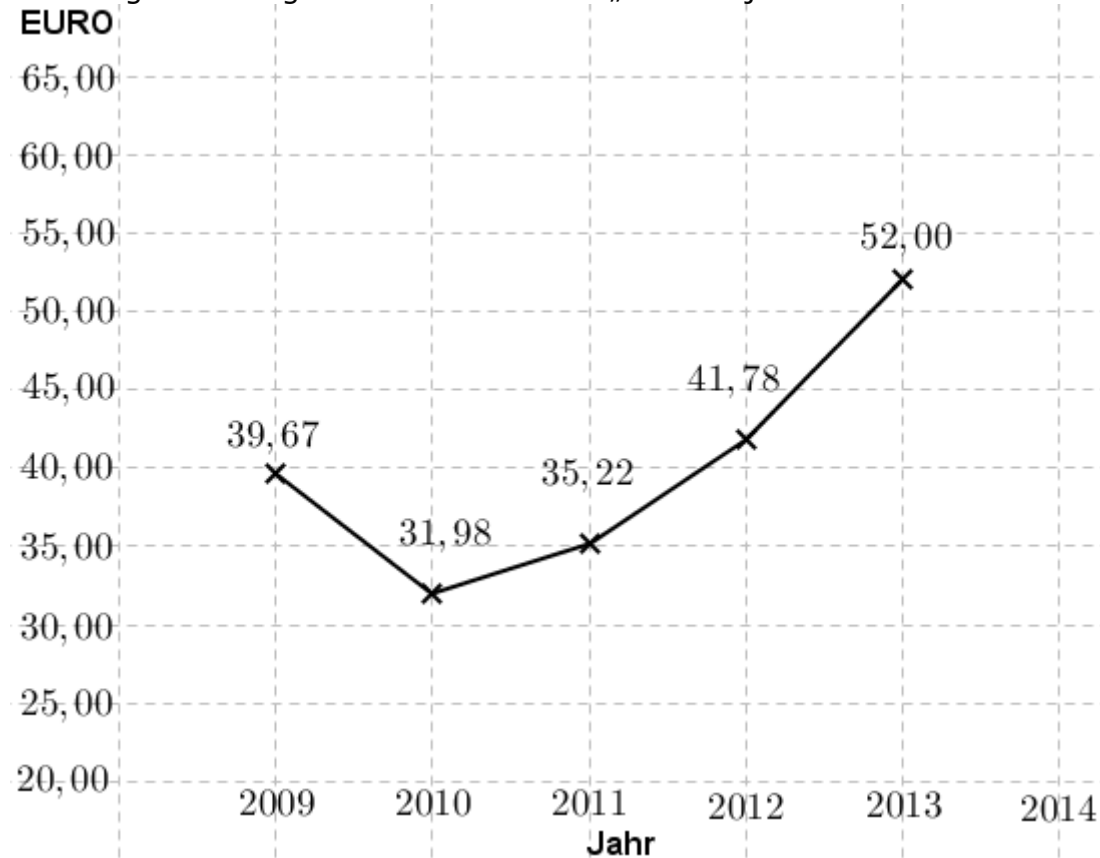
(1) $\frac{x-4y}{3} = 4$

(2) $3(2x + y) - 17 = \frac{x-2}{2}$

$\mathbb{L} = \{(4; -2)\}$

Aufgabe P7/2015

Das Diagramm zeigt den Wert der Aktie „Motelo“ jeweils am Jahresende.



- Um wie viel Prozent ist der Wert der Aktie von 2010 bis 2013 insgesamt gestiegen?
- Am Ende des Jahres 2014 lag der Wert der Aktie 15,4 % über dem Wert am Ende des Jahres 2013.
Zeichnen Sie im Diagramm den Jahresendwert von 2014 ein.
- Welchen jährlich gleichbleibenden Zinssatz hätte eine Bank bieten müssen, um von 2009 bis 2013 den gleichen Wertzuwachs zu erzielen.

Lösung: Anstieg von 2010 bis 2013 um 62,6 %.

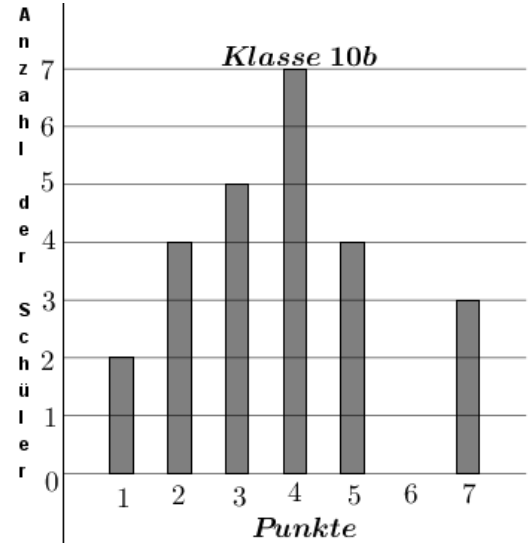
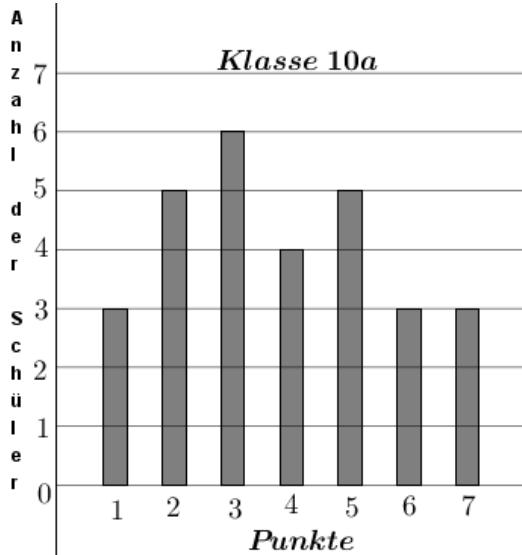
Jahresendwert von 2014: 60,01 €

Gleichbleibender Zinssatz: 7,0 %

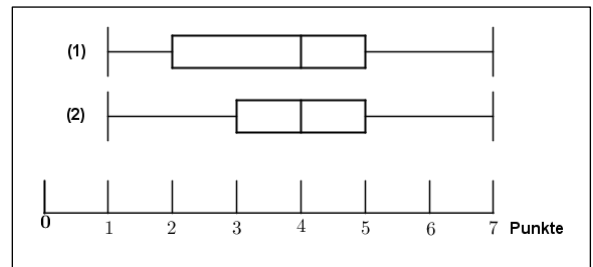
Aufgabe P8/2015

Die Klasse 10a und 10b machen einen gemeinsamen Ausflug und spielen Minigolf. Beim Minigolf zählt jeder Schlag als Punkt. Hat der Ball nach sechs Punkten sein Ziel nicht erreicht, ist ein Zusatzpunkt anzurechnen. Die Höchstanzahl an einer Bahn beträgt also sieben Punkte.

Die Diagramme und die Boxplots zeigen die Ergebnisse der beiden Klassen nach der ersten Bahn.



- Zu welcher Klasse gehört der jeweilige Boxplot? Begründen Sie.
- Wie viel Prozent der Schüler der Klasse 10a haben fünf oder mehr Punkte?
- Überprüfen Sie folgende Aussage: „Die durchschnittliche Punktzahl der Klasse 10b beträgt genau vier Punkte.“



Lösung: Boxplot (1) gehört zur Klasse 10a.

Boxplot (2) gehört zur Klasse 10b.

Der Prozentsatz der Klasse 10a ist 37,9 %.

Durchschnittliche Punktzahl ist 3,76. Die Aussage ist falsch.

Lösung P1/2015

Lösungslogik (einfach)

Umfang ist Summe der Strecken \overline{EB} , \overline{BC} und \overline{CE} .

Berechnung von γ über die Winkelsumme im Dreieck ABC .

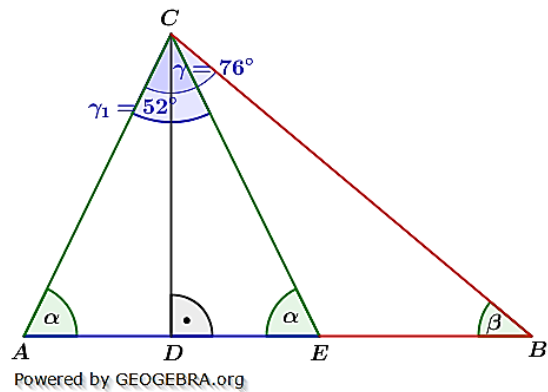
Berechnung von γ_1 über die Winkelsumme im Dreieck AEC .

Berechnung von \overline{AE} mit dem Sinussatz.

Berechnung von \overline{AB} mit dem Sinussatz.

Berechnung von \overline{BC} mit dem Sinussatz.

Berechnung von \overline{EB} aus Differenz von \overline{AB} und \overline{AE} .



Klausuraufschrieb

$$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}$$

$$\gamma: \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 64,0^\circ - 40,0^\circ = 76^\circ$$

$$\gamma_1: \quad \gamma_1 = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 128,0^\circ = 52^\circ$$

$$\overline{AE}: \quad \frac{\overline{AE}}{\sin \gamma_1} = \frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha} = \frac{9,2 \cdot \sin 52^\circ}{\sin 64^\circ} = 8,07$$

$$\overline{AB}: \quad \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{AC}}{\sin \beta} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{9,2 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 40^\circ} = 13,89$$

$$\overline{BC}: \quad \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin \beta} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{9,2 \cdot \sin 64^\circ}{\sin 40^\circ} = 12,86$$

$$\overline{EB}: \quad \overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 13,89 - 8,07 = 5,82$$

$$u: \quad u = 5,82 + 12,86 + 9,2 = 27,88$$

Der Umfang des Dreiecks EBC beträgt etwa 27,9 cm.

Lösungslogik (umständlich)

Umfang ist Summe der Strecken \overline{EB} , \overline{BC} und \overline{CE} .

Berechnung von γ über die Winkelsumme im Dreieck ABC .

Berechnung von γ_1 über die Winkelsumme im Dreieck AEC .

Berechnung von $\gamma_2 = \frac{1}{2} \gamma_1$.

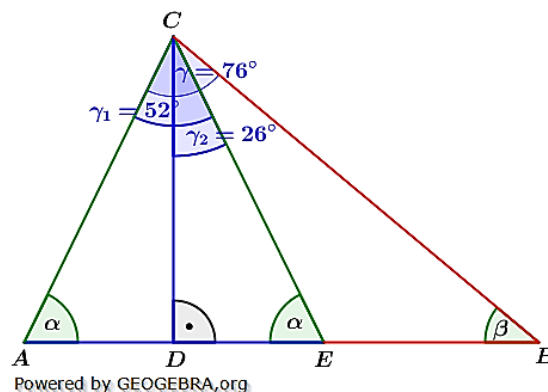
Berechnung von $\overline{AD} = \overline{DE}$ über den $\cos \alpha$.

Berechnung von \overline{DC} mit dem Satz des Pythagoras.

Berechnung von \overline{BC} über den $\sin \beta$.

Berechnung von \overline{DB} mit dem Satz des Pythagoras.

Berechnung von \overline{EB} aus Differenz von \overline{DB} und \overline{DE} .



Klausuraufschrieb

$$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}$$

$$\gamma: \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 64,0^\circ - 40,0^\circ = 76^\circ$$

$$\gamma_1: \quad \gamma_1 = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 128,0^\circ = 52^\circ$$

$$\gamma_2: \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1}{2} = 26^\circ$$

$$\overline{AD}: \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \cos\alpha \quad | \quad \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \cos\alpha = 9,2 \cdot \cos 64,0^\circ = 4,03$$

$$\overline{DC}: \quad \overline{DC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{9,2^2 - 4,03^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{68,3991} = 8,27$$

$$\overline{BC}: \quad \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \sin\beta \quad | \quad \cdot \overline{BC}; : \sin\beta$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{DC}}{\sin\beta} = \frac{8,27}{\sin 40^\circ} = 12,8658$$

$$\overline{DB}: \quad \overline{DB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{12,8658^2 - 8,27^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{DB} = \sqrt{97,1359} = 9,86$$

$$\overline{EB}: \quad \overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE} = 9,86 - 4,03 = 5,83$$

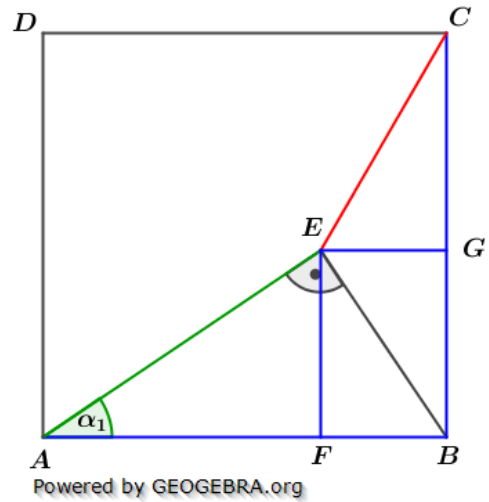
$$u: \quad u = 5,83 + 12,87 + 9,2 = 27,9$$

Der Umfang des Dreiecks EBC beträgt etwa 27,9 cm.

Lösung P2/2015

Lösungslogik

- Berechnung von \overline{EF} über den $\sin\alpha_1$.
- Berechnung von \overline{AB} über den $\cos\alpha_1$.
- Berechnung von \overline{AF} über den Satz des Pythagoras.
- Berechnung von $\overline{EG} = \overline{FB}$ aus der Differenz von \overline{AB} und \overline{AF} .
- Berechnung von \overline{CG} aus der Differenz von $\overline{AB} = \overline{BC}$ und \overline{EF} .
- Berechnung von \overline{EC} über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$$\overline{EF}: \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \sin\alpha_1 \quad |$$

$$\overline{EF} = \overline{AE} \cdot \sin\alpha_1 = 7,8 \cdot \sin 34^\circ = 4,3617$$

$$\overline{AB}: \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \cos\alpha_1 \quad | \quad \cdot \overline{AB}; : \cos\alpha_1$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{EF}}{\cos\alpha_1} = \frac{7,8}{\cos 34^\circ} = 9,4085$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{7,8^2 - 4,3617^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{AF} = \sqrt{41,8156} = 6,4665$$

$$\overline{EG}: \quad \overline{EG} = \overline{AB} - \overline{AF} = 9,4085 - 6,4665 = 2,942$$

$$\overline{CG}: \quad \overline{CG} = \overline{AB} - \overline{EF} = 9,4085 - 4,3617 = 5,0468$$

$$\overline{EC}: \quad \overline{EC} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{5,0468^2 + 2,942^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{EC} = \sqrt{34,1256} = 5,842$$

Die Strecke \overline{EC} ist 5,84 cm lang.

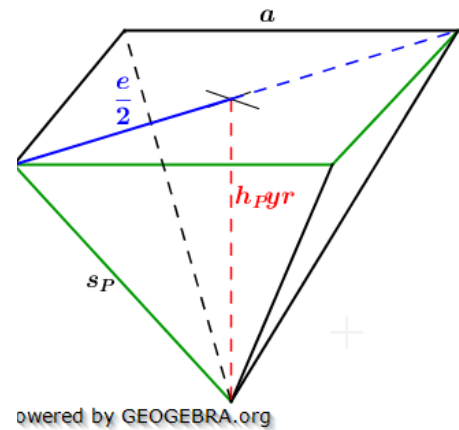
Lösung P3/2015

Lösungslogik

Wir benötigen zunächst das Volumen des

Kreiskegels mit $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{d_k}{2}\right)^2 \cdot h_K$. Da das Wasser nur das halbe Kegelvolumen einnimmt somit $\frac{1}{2} \cdot V_{Kegel}$.

Danach benötigen wir das Volumen der Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h_{Pyr}$. Da h_{Pyr} nicht gegeben ist, müssen wir es mit dem Satz des Pythagoras berechnen mithilfe der Strecken s_P und der halben Diagonalen $\frac{e}{2}$ der Grundfläche.



Klausuraufschrieb

$$V_{Kegel}: \quad V_{Kegel} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{d_k}{2}\right)^2 \cdot h_K = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 30 = 3141,59$$

$$V_{Wasser}: \quad V_{Wasser} = \frac{1}{2} V_{Kegel} = 1570,8$$

$$\frac{e}{2}: \quad \frac{e}{2} = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{2} = 11,3137$$

$$h_{Pyr}: \quad h_{Pyr} = \sqrt{s_P^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 - 11,3137^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{Pyr} = \sqrt{448,00} = 21,166$$

$$V_{Pyr}: \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 21,166 = 1806,2$$

Das Pyramidenvolumen ist größer als das mit Wasser gefüllte Kegelvolumen. Somit läuft das Wasser beim Umfüllen nicht über.

Lösung P4/2015

Lösungslogik

Ergänzung Baumdiagramm:

Die Summe aller möglichen Wahrscheinlichkeiten ist stets 100 %. Wegen $\frac{3}{10} = 30\%$ ist somit die Wahrscheinlichkeit für die grünen Kugeln gleich 50 %, alternativ $\frac{5}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für höchstens eine grüne Kugel:

Gleichzeitige Ziehen von 2 Kugeln entspricht Ziehen von 2 Kugeln hintereinander ohne Zurücklegen. Höchstens eine grüne Kugel ist entweder keine grüne Kugel oder eine Grüne Kugel. Das Gegenereignis ist somit 2 grüne Kugeln.

Doppelt so viele Kugeln in einem zweien Behälter:

Uli hat nicht Recht. Die Einzelwahrscheinlichkeiten im ersten Zug bleiben zwar bei 50 % für grün, 30 % für blau und 20 % für rot, jedoch ändert sich die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Zug.

Klausuraufschrieb

$$\frac{3}{10} = 30\%$$

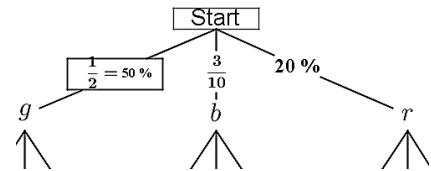
$$P(\text{grün}) = 100\% - P(\text{blau}) - P(\text{rot})$$

$$P(\text{grün}) = 100\% - 30\% - 20\% = 50\%$$

Höchstens eine grüne Kugel:

$$P(\text{höchstens 1 grüne Kugel}) = 1 - P(\text{zwei grüne Kugeln})$$

$$= 1 - \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{29}{38} \approx 76,3\%$$



Doppelt so viele Kugeln:

Uli hat nicht Recht, denn

$$P(\text{höchstens 1 grüne Kugel}) = 1 - P(\text{zwei grüne Kugeln})$$

$$= 1 - \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} = \frac{59}{78} \approx 75,6\%$$

Lösung P5/2015

Klausuraufschrieb

Graph zu Wertetabelle:

p_3 ist der Graph der Funktionswerte gemäß Wertetabelle. $S(0|1)$ ist der Schnittpunkt mit der y -Achse, $N(1|0)$ ein Schnittpunkt mit der x -Achse.

Schnittpunkt p_1 mit p_2 :

| | | | |
|--------|--|--|-----------------------------|
| $p_1:$ | $S_{p_1}(6 4)$ | | Scheitelpunkt von p_1 |
| | $y = (x - 6)^2 + 4$ | | Scheitelpunktgleichung |
| | $y = x^2 - 12x + 40$ | | allgemeine Parabelgleichung |
| $p_2:$ | $S_{p_2}(4 -4)$ | | Scheitelpunkt von p_2 |
| | (Eingezeichnete Parabel hat Nullstellen bei $N_1(2 0)$ und $N_2(6 0)$, somit liegt die Symmetrieachse bei $x = 4$) | | |
| | $y = (x - 4)^2 - 4$ | | Scheitelpunktgleichung |
| | $y = x^2 - 8x + 12$ | | allgemeine Parabelgleichung |

$$p_1 \cap p_2: \quad \text{I) } y = x^2 - 12x + 40$$

$$\quad \quad \quad \text{II) } y = x^2 - 8x + 12$$

$$\text{I)-II) } 0 = -4x + 28 \quad | \quad +4x; : 4$$

$$x = 7$$

$$x \rightarrow \text{II): } y = 7^2 - 8 \cdot 7 + 12 = 5$$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $S(7|5)$.

$$p_4: \quad y = ax^2 + 1$$

$P(2|3)$ ist Punkt der Parabel.

$$3 = a \cdot 2^2 + 1 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(2|3)$$

$$2 = 4a \quad | \quad : 4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Die Gleichung der Parabel p_4 lautet $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

Lösung P6/2015

| | | |
|--|--|-------------------|
| (1) $\frac{x-4y}{3} = 4$ | | · 3 |
| (2) $3(2x + y) - 17 = \frac{x-2}{2}$ | | · 2 |
| (1) $x - 4y = 12$ | | +4y |
| (2) $6(2x + y) - 34 = x - 2$ | | ausmultiplizieren |
| (1) $x = 4y + 12$ | | |
| (2) $12x + 6y - 34 = x - 2$ | | -x; -6y; +34 |
| (1) $x = 4y + 12$ | | · 12 |
| (2) $12x = -6y + 36$ | | |
| (1) $12x = 48y + 144$ | | |
| (2) <u>$12x = -6y + 36$</u> | | |
| (1)-(2) $0 = 54y + 108$ | | -108; : 54 |
| $y = -2 \rightarrow (1)$ | | |
| (1) $x - 4 \cdot (-2) = 12$ | | -8 |
| $x = 4$ | | |
| $\mathbb{L} = \{(4; -2)\}$ | | |

Lösung P7/2015

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung

Wertanstieg der Aktie zwischen 2010 und 2013 insgesamt:

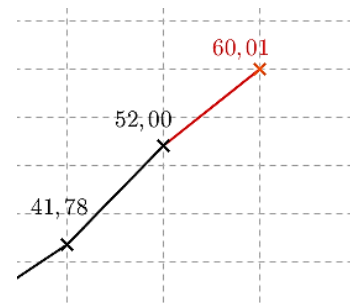
$$q = \frac{52,00}{31,98} = 1,626$$

$$q = 1 + \frac{p\%}{100} \Rightarrow p\% = 62,6 \%$$

Wert der Aktie Ende 2014:

$$K_{2014} = K_{2013} \cdot q \text{ mit } q = 1,154$$

$$K_{2014} = 52,00 \cdot 1,154 = 60,01 \text{ €}$$



Gleichbleibender Zinssatz:

$$K_{2013} = K_{2009} \cdot q^4$$

$$52,00 = 39,67 \cdot q^4$$

$$q^4 = 1,3108$$

$$q = 1,07$$

$$q = 1 + \frac{p\%}{100} \Rightarrow p\% = 7,0 \%$$

| | |
|--|-------------------|
| | : 39,67 |
| | $\sqrt[4]{\quad}$ |

Lösung P8/2015

Lösungslogik

Über die Grafiken ermitteln die Gesamtanzahl der Schüler getrennt nach Klasse 10a und 10b. Diese Zahlen entsprechen den Rangplätzen. Da in den Boxplots der Zentralwert als auch das obere Quartil auf gleichen Rangplätzen liegen, müssen wir die Rangplätze des unteren Quartils prüfen, um entscheiden zu können, welches Boxplot zu welcher Klasse gehört.

Die Prozentzahl der Schüler der Klasse 10a, die fünf oder mehr Punkte haben, ergibt sich aus der Division der Anzahl Schüler mit fünf oder mehr Punkten durch die Gesamtanzahl der Schüler der Klasse 10a.

Für die durchschnittliche Punktzahl der Klasse müssen wir zunächst die Summe der einzelnen Multiplikationen Anzahl Schüler mal erreichte Punktzahl bilden. Diese Summe ist dann durch die Gesamtanzahl der Schüler der Klasse 10b zu dividieren.

Klausuraufschrieb

Anzahl Schüler Klasse 10a:

$$n_{10a} = 3 + 5 + 6 + 4 + 5 + 3 + 3 = 29$$

Anzahl Schüler Klasse 10b:

$$n_{10b} = 2 + 4 + 5 + 7 + 5 + 3 = 25$$

Unteres Quartil Klasse 10a:

$$\frac{1}{4} \cdot n_{10a} = \frac{29}{4} = 7,25 \Rightarrow q_u \text{ entspricht Rangplatz } 8.$$

Der 8. Rangplatz erreichte 2 Punkte.

Boxplot (1) gehört zu Klasse 10a, Boxplot (2) zu Klasse 10b.

Anzahl Schüler Klasse 10a mit fünf oder mehr Punkten:

$$n_{10a+5} = 5 + 3 + 3 = 11$$

$$p_{10a}\% = \frac{n_{10a+5}}{n_{10a}} \cdot 100 = \frac{11}{29} \cdot 100 = 37,93\%$$

Durchschnittliche Punktzahl Klasse 10b:

$$\bar{m} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{n_{10b}} = \frac{94}{25} = 3,76$$

Die Aussage mit „genau vier Punkte“ ist falsch.