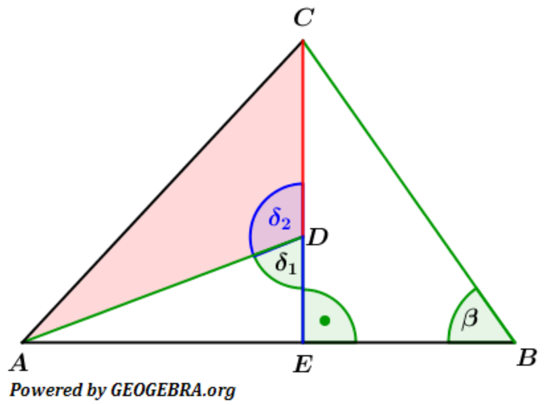
Lösung P1/2016

Lösungslogik

Berechnung von $\overline{CE}$ über $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{DE}$ über $cos\delta_1$.
Berechnung von $\overline{CD}$ über $\overline{CE} - \overline{DE}$.
Berechnung von δ_2 als Ergänzungswinkel von δ_1 zu $180\,°$.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ADC über den trigonometrischen Flächeninhalt mithilfe von $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ und δ_2.



Klausuraufschrieb

$\overline{CE}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \qquad | \cdot \overline{BC}$

$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot sin\beta = 9{,}0 \cdot sin55° = 7{,}37$

$\overline{DE}$: $\quad cos\delta_1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \qquad | \cdot \overline{AD}$

$\overline{DE} = \overline{AD} \cdot cos\delta_1 = 7{,}3 \cdot cos69{,}4\,° = 2{,}57$

$\overline{CD}$: $\quad \overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE} = 7{,}37 - 2{,}57 = 4{,}8$

Die Strecke $\overline{CD}$ *ist* $4{,}8\ cm$ *lang.*

δ_2: $\quad \delta_2 = 180° - \delta_1 = 180\,° - 69{,}4\,° = 110{,}6\,°$

A_{ADC}: $\quad A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot sin\delta_2 \qquad |$ trigonometrischer Flächeninhalt

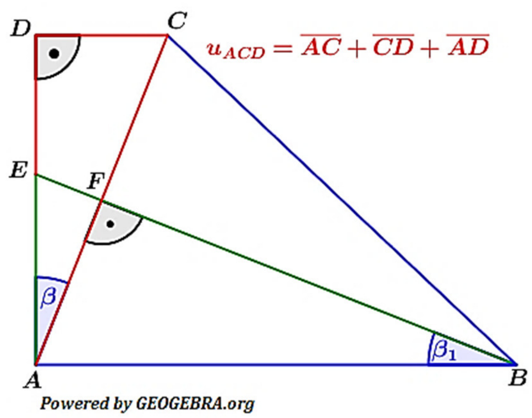
$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}3 \cdot 4{,}8 \cdot sin110{,}6\,° = 16{,}3997$

Das Dreieck ADC *hat eine Fläche von* $16{,}4\ cm^2$.

Lösung P2/2016

Lösungslogik

Berechnung von β_1 über den sin.
Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck. Der Punkt F liegt damit in der Mitte von $\overline{AC}$.
Wegen des rechten Winkels bei F ist $\beta = \beta_1$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den $cos\beta$.
Berechnung von $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AF}$.
Berechnung von $\overline{CD}$ über den $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Umfangs u des Dreiecks ACD.



Klausuraufschrieb

β_1: $\quad sin\beta_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{3,1}{8,4} = 0,36905$

$\beta_1 = sin^{-1}\left(\frac{3,1}{8,4}\right) = 21,675\,°$

$\overline{AF}$: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Der Punkt F liegt in der Mitte der Strecke $\overline{AC}$. Wegen des rechten Winkels bei F ist $\beta = \beta_1$.

$cos\beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \qquad | \quad \cdot \overline{AE}$

$\overline{AF} = \overline{AE} \cdot cos\beta$

$\overline{AF} = 3,1 \cdot cos 21,675\,° = 2,88$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AF} = 2 \cdot 2,88 = 5,76$

$\overline{CD}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \qquad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot sin\beta$

$\overline{CD} = 5,76 \cdot sin 21,675\,° = 2,13$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{5,76^2 - 2,13^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{AD} = \sqrt{28,6407} = 5,35$

u_{ACD}: $\quad u_{ACD} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 5,76 + 2,13 + 5,35 = 13,24$

Der Umfang des Dreiecks ACD beträgt $13,2\ cm$.

Lösung P3/2016

Lösungslogik

Wir benötigen zunächst den Radius des Kreiskegels mit $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$, Mantel M_{Keg} und Länger der Seitenkante s sind gegeben. Danach berechnen wir die Höhe des Kreiskegels über den Satz des Pythagoras. Jetzt steht der Berechnung des Volumens nichts mehr im Wege mit $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{keg}$.

Da Durchmesser und Mantelfläche von Zylinder und Kegel gleich groß sind, gilt $r_{Zyl} = r_{Keg}$ und $M_{Zyl} = M_{Keg}$. Hierüber berechnen wir die Höhe des Zylinders über $M_{Zyl} = 2\pi \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$. Nach ermittelter Höhenberechnung gilt dann für das Volumen des Zylinders $V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$.

Die Differenz aus V_{Zyl} und V_{Keg} führt dann zum Endergebnis.

Klausuraufschrieb

r_{Keg}: $\quad M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s \qquad | \quad :\pi;\ :s$

$r_{Keg} = \frac{M_{Keg}}{\pi \cdot s} = \frac{340}{\pi \cdot 18} = 6,01$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{18^2 - 6,01^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{287,88} = 16,97$

V_{Keg}: $\quad V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6,01^2 \cdot 16,97 = 641,89$

h_{Zyl}: $\quad M_{Keg} = M_{Zyl} = 2\pi \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl} \qquad | \quad :(2\pi \cdot r_{Zyl})$

$h_{Zyl} = \frac{M_{Zyl}}{2\pi \cdot r_{Zyl}} = \frac{340}{2\pi \cdot 6,01} = 9,00$

V_{Zyl}: $\quad V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot 6,01^2 \cdot 9 = 1021,27$

ΔV: $\quad \Delta V = V_{Zyl} - V_{Keg} = 1021,27 - 641,89 = 379,38$

Der Volumenunterschied zwischen Kegel und Zylinder beträgt $379,4\ cm^3$.

Lösung P4/2016

Lösungslogik

Boxplot Frauenschuhe:

Die Rangliste besteht aus $n = 17$ Elementen.
Wir berechnen den Zentralwert sowie das untere und obere Quartil und ergänzen den unvollständig vorgegebenen Boxplot.

Rangliste Männerschuhe:

Aus dem gegebenen Boxplot können wir den Wert für Rang 1 und Rang 13 ablesen. Der Zentralwert ist 70 €, bei einer Ranglistenlänge von 13 muss dieser Wert auf Platz 7 stehen.
Unteres Quartil ist 50 €, bei einer Ranglistenlänge von 13 muss dieser Wert auf Platz 4 stehen.
Oberes Quartil ist 120 €, bei einer Ranglistenlänge von 13 muss dieser Wert auf Platz 10 stehen.
Nach Ausfüllen dieser Werte verbleiben noch die Plätze 3, 8 und 9, deren Werte frei wählbar sind, jedoch größer oder gleich ihrem Vorgänger bzw. kleiner oder gleich ihrem Nachfolger sein müssen.

Klausuraufschrieb

Boxplot Frauenschuhe:

Die Rangliste hat $n = 17$ Elemente.

Zentralwert:

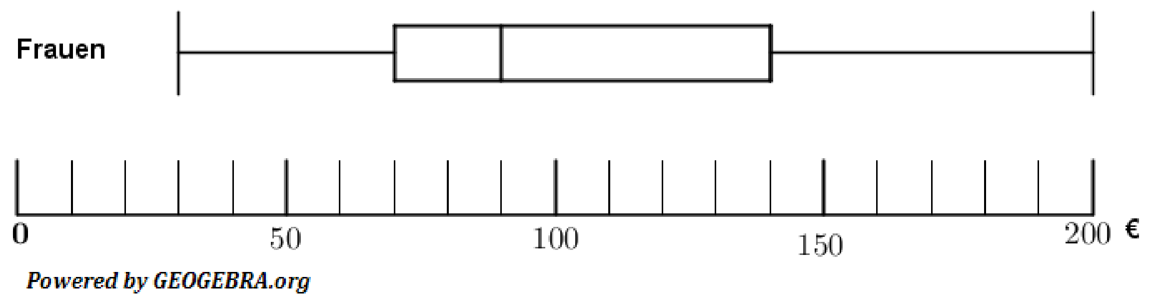
$\frac{n}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \implies$ Der Zentralwert steht auf Platz 9, $z = 90$.

Unteres Quartil:

$\frac{n}{4} = \frac{17}{4} = 4{,}25 \implies$ Das untere Quartil steht auf Platz 5, $q_u = 70$.

Oberes Quartil:

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 17 = 12{,}75 \implies$ Das obere Quartil steht auf Platz 13, $q_0 = 140$.



Rangliste Männerschuhe:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Preis	30	30	40	50	50	50	70	80	100	120	120	140	170

Lösung P5/2016

$$\frac{x+3}{x}=\frac{9}{x^2-3x}-\frac{3}{x-3}$$

Nenner 1:		x
Nenner 2:	x^2-3x	$x(x-3)$
Nenner 3:		$x-3$
Hauptnenner:		$x(x-3)$

$x(x-3)\ =0$ für $x_1=0$ und $x_2=3$.

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{0;3\}$

$$\frac{(x+3)\cdot\cancel{x}\cdot(x-3)}{\cancel{x}}=\frac{9\cdot\cancel{x(x-3)}}{\cancel{x(x-3)}}-\frac{3\cdot\cancel{x(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$(x+3)(x-3)=9-3x$ | Klammern auflösen

$x^2-9=9-3x$ | $-9;\ +3x$

$x^2+3x-18=0$

$x_{1,2}=-1{,}5\pm\sqrt{1{,}5^2+18}=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+18}$ | p/q-Formel

$\quad=-1{,}5\pm\sqrt{20{,}25}=-1{,}5\pm4{,}5$

$x_1=3;\quad x_2=-6$

Wegen $x_1=3\ \notin\ \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L}=\{-6\}$ die einzigste Lösung.

Lösung P6/2016

Lösungslogik

Aufstellen der Scheitelpunktgleichung von p mit Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes.

Aufstellen der Geradengleichung g mit $m=2$ durch den Scheitelpunkt der Parabel p.

Gleichsetzung von Parabelgleichung p mit der Geradengleichung g und Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten x. Einsetzen der ermittelten x-Werte in die Geradengleichung g zur Ermittlung der y-Koordinate der Schnittpunkte.

Klausuraufschrieb

Scheitelpunktgleichung von p und Scheitelpunkt S_p:

p: $y=x^2-6x+10{,}5$ | allgemeine Parabelgleichung

$y=(x-3)^2-9+10{,}5$

$y=(x-3)^2+1{,}5$ | Scheitelpunktgleichung

$S_p(3|1{,}5)$

Geradengleichung g mit $m=2$ durch S_p:

g: $y=2x+b$

$1{,}5=2\cdot3+b$ | Punktprobe mit $S_p(3|1{,}5)$

$1{,}5-6=b$

$b=-4{,}5$

$y=2x-4{,}5$

Schnittpunkt von p und g:

$p\cap g$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

(1) $y=\quad 2x-4{,}5$ | Gerade g

(2) $y=x^2-6x+10{,}5$ | Parabel p

(2)-(1) $0=x^2-8x+14{,}5$ | Subtraktionsverfahren

$x^2-8x+15$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm1$ | p/q-Formel

$x_1 = 5; \quad x_2 = 3$
$x_2 = 3$ gilt für den Scheitelpunkt $S_p(3|1{,}5)$
$y_1 = 2 \cdot x_1 - 4{,}5$
$y_1 = 2 \cdot 5 - 4{,}5 = 5{,}5$
Die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes sind $Q(5|5{,}5)$.

Lösung P7/2016

Lösungslogik
Gleichzeitiges Ziehen ist Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.
Im Beutel befinden sich insgesamt 10 Kärtchen, 6 mit dem Buchstaben „L", 3 mit dem Buchstaben „T" und eines mit dem Buchstaben „Z".
Wir bestimmen die Einzelereignisse und berechnen deren Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb
$P(SCHALL) = P(L;L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} \approx 33{,}3\ \%$
$P(SCHATZ) = P\{(T;Z),(Z;T)\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{90} \approx 6{,}7\ \%$

Lösung P8/2016

Lösungslogik
Europa:
Wir bilden das Verhältnis aus $726\ Mio.$ in 2050 zu $741\ Mio.$ in 2050. Dies ergibt den Prozentsatz $p_{2050}\%$ der noch vorhanden Bevölkerung Europas in 2050 an. Sie sinkt demnach um $1 - p_{250}\%$.
Afrika:
Der Zeitraum zwischen 2014 und 2017 beträgt 3 Jahre. Der Anfangsbestand von $1136\ Mio$ steigt jährlich um $2{,}5\ \%$. Dies entspricht einem exponentiellen Wachstum mit $B_n = B_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p\%}{100}$.
Amerika:
Wenn die Aussage stimmt, dann muss viermal die Bevölkerung von Amerika im Jahre 2050 etwa gleich sein mit der Gesamtsumme der Erdbevölkerung in 2050.

Klausuraufschrieb
Europa:
$p_{2050}\% = \frac{726}{741} \cdot 100 = 97{,}98\ \%$
In Europa leben in 2050 etwa $98\ \%$ der Bevölkerung von 2014. Das sind somit etwa $2\ \%$ weniger als in 2014.
Afrika:
Berechnungszeitraum 2014 bis 2017 entspricht $n = 3$ Jahren. Der Anfangsbestand im Jahre 2014 beträgt $1136\ Mio$. Die Wachstumsrate/Jahr ist $2{,}5\ \%$.
Mit $B_n = B_0 \cdot q^n$ und $q = 1 + \frac{p\%}{100}$ ergibt sich:
$B_n = 1136 \cdot 1{,}025^3 = 1223{,}35$
In Afrika leben im Jahre 2017 etwa $1223{,}4\ Mio$ Menschen.

Afrika:

Die Aussage stimmt nur, wenn die Bevölkerung von Afrika im Jahr 2050 multipliziert mit 4 etwa gleich groß ist der Weltgesamtbevölkerung im Jahre 2050.

$4 \cdot B_{2050_{Afrika}} \approx B_{2050_{Amerika}} + B_{2050_{Asien}} + B_{2050_{Afrika}} + B_{2050_{Europa}} + B_{2050_{Australien}}$

$4 \cdot 2428 \stackrel{?}{=} 1217 + 5252 + 2428 + 726 + 60$

$9712 \approx 9683$

Alternativ:

$p_{Afrika}\% = \frac{B_{2050_{Afrika}}}{B_{2050_{Welt}}} \cdot 100 = \frac{2428}{9683} \cdot 100 = 25{,}07\ \%$

Die Aussage ist richtig, da gemäß abgebildeter Weltkarte im Jahre 2050 der Prozentanteil der Afrikaner an der Gesamtweltbevölkerung etwa $25\ \%$ beträgt.