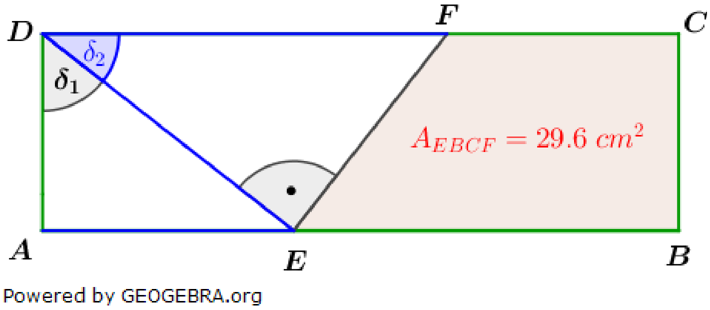
Lösung P1/2018

Lösungslogik



$A_{EBCF} = \frac{\overline{EB}+\overline{FC}}{2} \cdot \overline{BC}$

Berechnung von $\overline{AE}$ über den $\tan(\delta_1)$ im Dreieck AED.

Berechnung von $\overline{EB}$ über $\overline{AB} - \overline{AE}$.

Berechnung von $\overline{DE}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von δ_2 als Ergänzungswinkel zu $90°$ von δ_1.

Berechnung von $\overline{DF}$ über den $\cos(\delta_2)$ im Dreieck DEF.

Berechnung von $\overline{EB}$ über $\overline{AB} - \overline{DF}$.

Berechnung von A_{EBCF}.

Klausuraufschrieb

$A_{EBCF} = \frac{\overline{EB}+\overline{FC}}{2} \cdot \overline{BC}$

$\overline{AE}$: $\tan(\delta_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$

$\overline{AE} = \overline{AD} \cdot \tan(\delta_1) = 5{,}4 \cdot \tan(52\,°) = 6{,}9117$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 14{,}5 - 6{,}9 = 7{,}6$

$\overline{DE}$: $\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{DE} = \sqrt{5{,}4^2 + 6{,}9^2} = 8{,}76$

δ_2: $\delta_2 = 90\,° - \delta_1 = 90\,° - 52\,° = 38\,°$

$\overline{DF}$: $\cos(\delta_2) = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$

$\overline{DF} = \frac{\overline{DE}}{\cos(\delta_2)} = \frac{8{,}76}{\cos(38\,°)} = 11{,}12$

$\overline{FC}$: $\overline{FC} = \overline{AB} - \overline{DF} = 14{,}5 - 11{,}12 = 3{,}38$

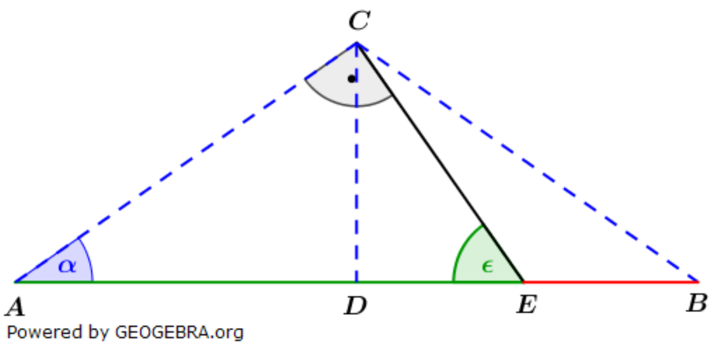
$\overline{BC}$: $\overline{BC} = \overline{AD} = 5{,}4$

$A_{EBCF} = \frac{7{,}6+3{,}38}{2} \cdot 5{,}4 = 29{,}646$

Das Trapez $EBCF$ hat eine Fläche von $29{,}6\ cm^2$.

Lösung P2/2018

Lösungslogik



$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE}$

Berechnung von $\overline{AC}$ über den $sin(\epsilon)$ im Dreieck AEC.

Berechnung von α als Ergänzungswinkel zu $90\,°$ von ϵ.

Berechnung von $\overline{AD}$ über den $cos(\alpha)$ im Dreieck ADC.

Berechnung von $\overline{AB}$ aus $2 \cdot \overline{AD}$ (Das Dreieck ABC ist gleichschenklig).

Berechnung von $\overline{EB}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE}$

$\overline{AC}$: $\quad sin\ (\epsilon) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

$\quad \overline{AC} = \overline{AE} \cdot sin(\epsilon) = 9{,}4 \cdot sin\ (55\ °) = 7{,}7$

α: $\quad \alpha = 90\ ° - \epsilon = 90° - 55° = 35°$

$\overline{AD}$: $\quad cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$

$\quad \overline{AD} = \overline{AC} \cdot cos(\alpha) = 7{,}7 \cdot cos(35\ °) = 6{,}3074$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD} = 2 \cdot 6{,}3074 = 12{,}615$

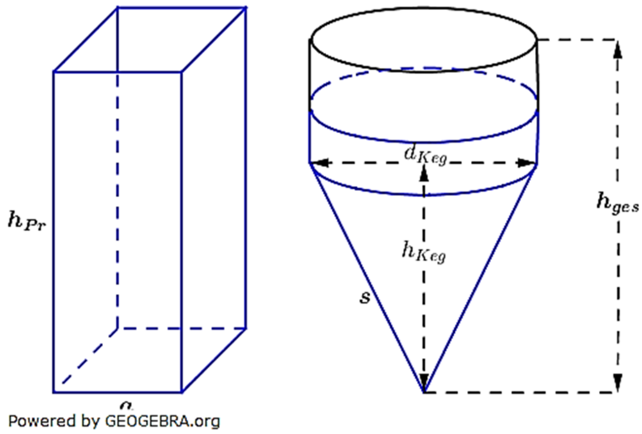
$\overline{EB}$: $\quad \overline{EB} = 12{,}615 - 9{,}4 = 3{,}215$

Die Strecke $\overline{EB}$ *ist* $3{,}2\ cm$ *lang.*

Lösung P3/2018

Lösungslogik

Die Wasserfüllung ist in nebenstehender Graphik durch die blauen Linien gekennzeichnet.



Wir berechnen zunächst das Volumen des Prismas über $V_{Pr} = G_{Pr} \cdot h_{Pr}$.
Danach berechnen wir das Volumen des Kreiskegels mit
$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$
Da h_{Keg} nicht gegeben ist, müssen wir h_{Keg} berechnen über den Satz des Pythagoras mit der Seitenkante s und dem Radius des Kegels mit $r_{Keg} = \frac{1}{2}d$.
Jetzt können wir V_{Keg} bestimmen.
Die Differenz aus $V_{Pr} - V_{Keg}$ ist das Wasservolumen, welches dann vom Zylinder aufgenommen wird. Über $V_{Pr} - V_{Keg} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$ (mit $r_{Zyl} = r_{Keg}$) ermitteln wir die Höhe des im Zylinder stehenden Wassers.
Die gesuchte Höhe ist dann $h_{Keg} + h_{Zyl}$.

Klausuraufschrieb

$V_{Pr} = G_{Pr} \cdot h_{Pr} = a^2 \cdot h_{Pr} = 100 \cdot 25 = 2500\ cm^3$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2}$ $\quad$ | $\quad$ Satz des Pythagoras

r_{Keg}: $\quad r_{Keq} = \frac{1}{2} \cdot d = 8{,}9$

$\quad h_{Keg} = \sqrt{20^2 - 8{,}9^2} = 17{,}91$

V_{Keq}: $\quad V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8{,}9^2 \cdot 17{,}91 = 1485{,}61$

V_{Rest}: $\quad V_{Rest} = V_{Pr} - V_{Keg} = 2500 - 1485{,}61 = 1014{,}39$

Der aufgesetzte Zylinder muss somit noch $1014{,}39\ cm^3$ Wasser aufnehmen.

h_{Zyl}: $V_{Rest} = V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$

$1014{,}39 = \pi \cdot 8{,}9^2 \cdot h_{Zyl}$

$1014{,}39 = 248{,}8456 \cdot h_{Zyl} \quad | \quad :248{,}8456$

$h_{Zyl} = 4{,}07$

h_W: $h_W = h_{Keg} + h_{Zyl} = 17{,}91 + 4{,}07 = 21{,}98$

Das Wasser steht ca. $22\ cm$ *hoch im Körper.*

Lösung P4/2018

Lösungslogik

Abnahme Wasserverbrauch zwischen 1990 du 2010:

Wir lesen den Verbrauch von *1990* und *2010* aus dem gegebenen Balkendiagramm ab. Gesucht ist der Prozentsatz der Abnahme.

Wasserverbrauch für Körperpflege in 2015:

Wir lesen den Verbrauch von *2015* aus dem gegebenen Balkendiagramm ab sowie den Prozentanteil für Körperpflege aus dem Tortendiagramm. Gesucht ist der Prozentwert.

Täglicher Wasserverbrauch pro Kopf in 2020:

Wir lesen den Verbrauch von *2015* aus dem gegebenen Balkendiagramm ab und vermindern diesen Wert fünfmal um $1\ \%$.

Eleganter ist jedoch die Exponentialformel, die wir von der Zinseszinsrechnung her kennen: $K_n = K_0 \cdot q^n$. Wegen der Abnahme müssen wir $q = 1 - \frac{p\%}{100}$ setzen.

Klausuraufschrieb

Abnahme Wasserverbrauch zwischen 1990 und 2010:

Verbrauch 1990 aus Diagramm : $147\ l$

Verbrauch 2010 aus Diagramm : $122\ l$

Prozentsatz der Abnahme:

$p\ \% = 100\ \% - \frac{V_{2010}}{V_{1990}} \cdot 100\ \% = 100\ \% - 83\ \% = 17\ \%$

Die Abnahme des pro Kopf-Verbrauchs von 1990 bis 2010 beträgt 17 %.

Wasserverbrauch für Körperpflege in 2015:

Verbrauch 2015 aus Balkendiagramm (Grundwert) : $122\ l$

Anteil Körperpflege aus Tortendiagramm (Prozentsatz) : $36\ \%$

Prozentwert :

$P = G \cdot \frac{p\%}{100} = 122 \cdot \frac{36\ \%}{100} = 42{,}7$

Im Jahre 2015 wurden etwa 42,7 Liter Wasser pro Kopf für die Körperpflege verbraucht.

Täglicher Wasserverbrauch pro Kopf in 2020 tabellarisch:

Verbrauch 2015 aus Balkendiagramm (Grundwert) : $122\ l$

Verbrauch 2016 : $122{,}00 \cdot 0{,}99 = 120{,}78$

Verbrauch 2017 : $120{,}78 \cdot 0{,}99 = 119{,}57$

Verbrauch 2018 : $119{,}57 \cdot 0{,}99 = 118{,}37$

Verbrauch 2019 : $118{,}37 \cdot 0{,}99 = 117{,}19$

Verbrauch 2020 : $117{,}19 \cdot 0{,}99 = 116{,}02$

Täglicher Wasserverbrauch pro Kopf in 2020 über Formel:

$V_{2020} = V_{2015} \cdot q^5$ *mit* $q = 1 - \frac{p\%}{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99$

$V_{2020} = 122 \cdot 0{,}99^5 = 116{,}02$

Im Jahre 2020 ist mit einem täglichen Wasserverbrauch von 116 Liter Wasser pro Kopf zu rechnen.

Lösung P5/2018

$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+2x}$

Nenner 1:		x
Nenner 2:		$x+2$
Nenner 3:	x^2+2x	$x(x+2)$
Hauptnenner:		$x(x+2)$

$x(x+2) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0; -2\}$

$\frac{4 \cdot \cancel{x} \cdot (x+2)}{\cancel{x}} + \frac{(2x-2) \cdot x \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = \frac{3x^2 \cdot \cancel{x(x+2)}}{\cancel{x^2+2x}}$

$4(x+2) + x \cdot (2x-2) = 3x^2$ | Klammern auflösen

$4x + 8 + 2x^2 - 2x = 3x^2$ | $-3x^2$

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ | $\cdot(-1)$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$ | p/q-Formel

$x_1 = 4; \quad x_2 = -2$

Wegen $x_2 = -2 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \{4\}$ die einzigste Lösung.

Lösung P6/2018

Lösungslogik

Bestimmung der Funktionsgleichung der Parabel P:

Die allgemeine Form einer Parabelgleichung (Normalparabel) lautet $y = x^2 + bx + c$. Über die beiden gegebenen Punkte aus der Tabelle $R(0|5)$ und $P_6(6|5)$ berechnen wir durch Punktproben die Parameter b und c.

Ergänzung der Tabelle:

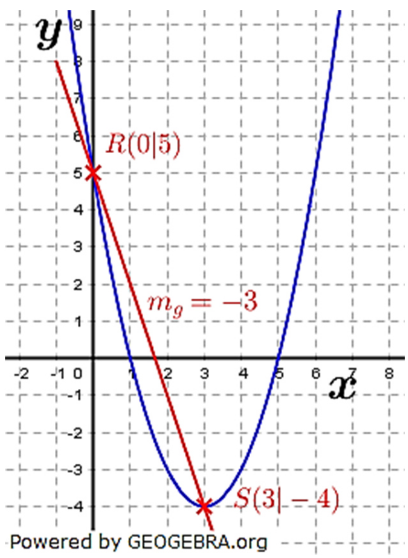
Nachdem wir die Parabelgleichung kennen, berechnen wir die fehlenden y-Werte zu den einzelnen x-Werten durch Einsetzen der x-Werte in die Parabelgleichung.

Bestimmung der Koordinaten von R und S:

$R(0|5)$ aus Tabelle abgelesen, $S(3|-4)$ aus ergänzter Tabelle abgelesen.

Berechnung der Steigung m einer Geraden durch R und S:

Nachdem die beiden Punkte bekannt sind, Berechnung der Steigung über die Formel $m = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}$.



Klausuraufschrieb

Bestimmung der Funktionsgleichung der Parabel P:

$y = x^2 + bx + c$

$5 = 0^2 + b \cdot 0 + c$ | Punktprobe mit $R(0|5)$ (siehe Tabelle)

$c = 5$

$5 = 6^2 + b \cdot 6 + 5$ | Punktprobe mit $P_6(6|5)$ (siehe Tabelle)

$5 = 36 + b \cdot 6 + 5$

$6b = -36$ | $:6$

$b = -6$

Die Funktionsgleichung der Parabel P lautet $y = x^2 - 6x + 5$.

Ergänzung der Tabelle:

P_1: $y_1 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$

P_2: $y_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$

P_3: $y_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

P_4: $y_4 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$

P_5: $y_5 = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Bestimmung der Koordinaten von R und des Scheitelpunktes S:

$R(0|5)$ (siehe Tabelle), $S(3|-4)$ (siehe Tabelle)

Berechnung der Steigung m einer Geraden durch R und S:

$m = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} = \frac{5-(-4)}{0-3} = \frac{9}{-3} = -3$

Die Steigung der Geraden g durch die Punkte R und S ist $m = -3$.

Lösung P7/2018

Lösungslogik

Für Grün im ersten Zug gilt $\frac{5}{12}$. Dies bedeutet, dass sich insgesamt 12 Gummibärchen in der Urne befinden.

Für Rot im zweiten Zug gilt $\frac{2}{11}$. Wegen der „11" im Nenner handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Da sich (wegen der „2" im Zähler) nach Ziehen von Rot im ersten Zug noch zwei rote Gummibärchen in der Urne befinden müssen, also waren es anfänglich drei rote Gummibärchen.

Damit verbleiben für Weiß vier weiße Gummibärchen, was ja insgesamt wieder 12 Gummibärchen macht.
Über diese Logik / Feststellung kann der Rest es Baumdiagramms ausgefüllt werden.

Genau ein rotes Gummibärchen:

Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{rg; rw; gr; wr\}$. Ermittlung der Wahrscheinlichkeit über die zweite Pfadregel.

Höchstens ein weißes Gummibärchen:
Höchstens bedeutet ein oder kein weißes Gummibärchen. Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{rr; rg; rw; gr; gg; gw; wr; wg\}$. Dies sind zu viele Berechnungen. Einfacher ist hier das Gegenereignis mit P(höchstens 1 weißes Bärchen)$= 1 - P(ww)$.

Klausuraufschrieb

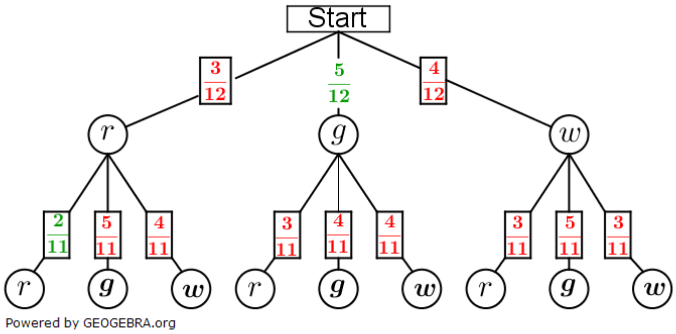
Genau ein rotes Gummibärchen:

$P(genau\ 1\ mal\ rot) =$

$P(rg; rw; gr; wr) =$

$\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} =$

$\frac{15+12+15+12}{132} = \frac{54}{132} = \frac{9}{22}$



Die Wahrscheinlichkeit, genau ein rotes Gummibärchen zu ziehen beträgt $\frac{9}{22}$.

Höchstens ein weißes Gummibärchen:
Das Gegenereignis ist zwei weiße Gummibärchen. Somit gilt:

$P(höchstens\ einmal\ weiß) = 1 - P(zweimal\ weiß)$

$P(zweimal\ weiß) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132} = \frac{1}{11}$

$1 - P(zweimal\ weiß) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens ein weißes Gummibärchen zu ziehen beträgt $\frac{10}{11}$.

Lösung P8/2018

Lösungslogik

Wir berechnen die Zentralwerte sowie die oberen Quartile an Hand der gegebenen Ranglisten und vergleichen die Ergebnisse mit den beiden Boxplots. Daraus leiten wir die Entscheidung ab, welches Boxplot zu welcher Klasse gehört.

Ergänzung der Ranglisten:
Wir lesen noch zusätzliche Informationen aus den Boxplots ab (z. B. Minimum und maximum) und ergänzen die Tabellen.

Behauptung von Alex:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

Rangliste Klasse 7a:
Die Rangliste hat $n = 17$ Elemente.
Zentralwert:

$\frac{n}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \implies$ Der Zentralwert steht auf Platz 9, $z = 28$.

Unteres Quartil:

$\frac{n}{4} = \frac{17}{4} = 4{,}25 \implies$ Das untere Quartil steht auf Platz 5, Platz 5 bei $7a$ nicht belegt, verweist auf Boxplot (1). Beide Boxplots haben $q_u = 22$, somit gehört Boxplot (1) zur Klasse 7a. Auf Platz 5 der Rangliste steht 22.

Oberes Quartil:

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 17 = 12{,}75 \implies$ Das obere Quartil steht auf Platz 13, $q_o = 40$, Boxplot (1) weist diesen Wert auf.

Minimum Boxplot (1)

$min = 12$

Maximum Boxplot (1)

$max = 46$

Rangliste Klasse 7b:

Die Rangliste hat $n = 13$ Elemente.

Zentralwert:

$\frac{n}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \implies$ Der Zentralwert steht auf Platz 7, $z = 28$.

Unteres Quartil:

$\frac{n}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25 \implies$ Das untere Quartil steht auf Platz 4, Platz 4 bei $7b$ nicht belegt, verweist auf Boxplot (2). Beide Boxplots haben $q_u = 22$, somit gehört Boxplot (2) zur Klasse 7b. Auf Platz 4 der Rangliste steht 22.

Oberes Quartil:

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 13 = 9{,}75 \implies$ Das obere Quartil steht auf Platz 10, $q_o = 36$, Boxplot (2) weist diesen Wert auf.

Minimum Boxplot (2)

$min = 6$

Maximum Boxplot (2)

$max = 48$

Vervollständigung der Ranglisten (grüne Zahlen waren gegeben, blaue Zahlen wurden errechnet, rote Zahlen sind die Ergänzungen):

Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Klasse 7a	12	14	16	18	22	23	25	28	28	35	36	38	40	42	43	44	46

Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Klasse 7b	6	8	14	22	24	25	28	28	29	36	38	40	48

Alex Behauptung:

In Klasse 7a befinden sich die beiden herauszunehmenden Werte einmal links vom Zentralwert ($23\,m$) und einmal rechts vom Zentralwert ($36\,m$). Die Rangliste hat nur noch 15 Elemente, wobei der Zentralwert wegen der Herausnahme von Rangplatz 6 vom Platz 9 auf den Platz 8 wandert. Mit $\frac{n}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \implies$ Zentralwert auf Platz 8, hat Alex recht.