

Lösung P1/2019

Lösungslogik

Umfang ist Summe der Strecken \overline{EB} , \overline{BC} , \overline{EF} und \overline{FC} .
Wir erkennen, dass der $\sphericalangle AEB$ ebenfalls so groß ist wie der gegebene Winkel φ .

Berechnung von \overline{EB} im Dreieck ABE über $\sin(\varphi)$.

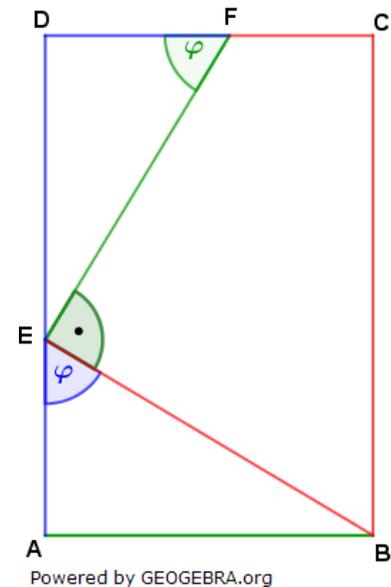
Berechnung von \overline{BC} über die Summe aus \overline{AE} und \overline{ED} .

Berechnung von \overline{AE} mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AED .

Berechnung von \overline{ED} im Dreieck EDF über den $\sin(\varphi)$.

Berechnung von \overline{FC} über die Differenz von \overline{AB} und \overline{DF} .

Berechnung von \overline{DF} über Satz des Pythagoras im Dreieck EDF .



Klausuraufschrieb

$$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC}$$

$$\sphericalangle AEB: \sphericalangle AEB = \varphi = 59,0^\circ$$

$$\overline{EB}: \sin(\varphi) = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$$

$$\overline{EB} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\varphi)} = \frac{6,6}{\sin(59^\circ)} = 7,6997$$

$$\overline{BC}: \overline{BC} = \overline{AE} + \overline{ED}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{7,7^2 - 6,6^2} = 3,966$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \quad | \quad \cdot \overline{EF}$$

$$\overline{ED} = \overline{EF} \cdot \sin(\varphi) = 7,2 \cdot \sin(59^\circ) = 6,17$$

$$\overline{BC} = 3,966 + 6,17 = 10,136$$

$$\overline{FC}: \overline{FC} = \overline{AB} - \overline{DF}$$

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{ED}^2} = \sqrt{7,2^2 - 6,17^2} = 3,71$$

$$\overline{FC} = 6,6 - 3,71 = 2,89$$

$$u: u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC} = 7,6997 + 10,136 + 7,2 + 2,89 = 27,9257 \text{ cm}$$

Der Umfang des Vierecks EBCF beträgt 27,9 cm.

Lösungslogik mittels Sinussatz

Umfang ist Summe der Strecken \overline{EB} , \overline{BC} , \overline{EF} und \overline{FC} .
Wir erkennen, dass der $\sphericalangle AEB$ ebenfalls so groß ist wie der gegebene Winkel φ .

Berechnung von \overline{EB} im Dreieck ABE über den Sinussatz.

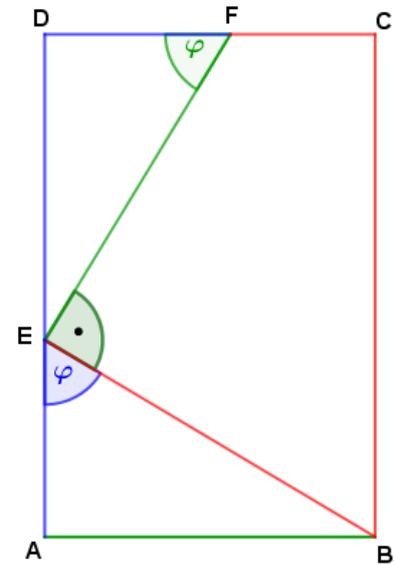
Berechnung von \overline{BC} über die Summe aus \overline{AE} und \overline{ED} .

Berechnung von \overline{AE} mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AED .

Berechnung von \overline{ED} im Dreieck EDF über den Sinussatz.

Berechnung von \overline{FC} über die Differenz von \overline{AB} und \overline{DF} .

Berechnung von \overline{DF} über Satz des Pythagoras im Dreieck EDF .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb mittels Sinussatz

$$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC}$$

$$\sphericalangle AEB: \sphericalangle AEB = \varphi = 59,0^\circ$$

$$\overline{EB}: \frac{\overline{EB}}{\sin 90^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin \varphi} \quad | \quad \cdot \sin 90^\circ$$

$$\overline{EB} = \frac{\overline{AB}}{\sin \varphi} \cdot \sin 90^\circ = \frac{6,6}{\sin(59^\circ)} = 7,6997$$

$$\overline{BC}: \overline{BC} = \overline{AE} + \overline{ED}$$

$$\overline{AE}: \overline{AE} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{7,7^2 - 6,6^2} = 3,966$$

$$\overline{ED}: \frac{\overline{ED}}{\sin \varphi} = \frac{\overline{EF}}{\sin 90^\circ} \quad | \quad \cdot \sin \varphi$$

$$\overline{ED} = \frac{\overline{EF}}{\sin 90^\circ} \cdot \sin \varphi = 7,2 \cdot \sin 59^\circ = 6,17$$

$$\overline{BC}: \overline{BC} = 3,966 + 6,17 = 10,136$$

$$\overline{FC}: \overline{FC} = \overline{AB} - \overline{DF}$$

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{ED}^2} = \sqrt{7,2^2 - 6,17^2} = 3,71$$

$$\overline{FC} = 6,6 - 3,71 = 2,89$$

$$u: u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC} = 7,6997 + 10,136 + 7,2 + 2,89 = 27,9257 \text{ cm}$$

Der Umfang des Vierecks $EBCF$ beträgt 27,9 cm.

Lösung P2/2019

Lösungslogik

Umfang ist Summe der Strecken \overline{EB} , \overline{BC} , \overline{EF} und \overline{FC} .
 Wir erkennen, dass der $\sphericalangle AEB$ ebenfalls so groß ist wie der gegebene Winkel φ .

Berechnung von \overline{EB} im Dreieck ABE über $\sin(\varphi)$.

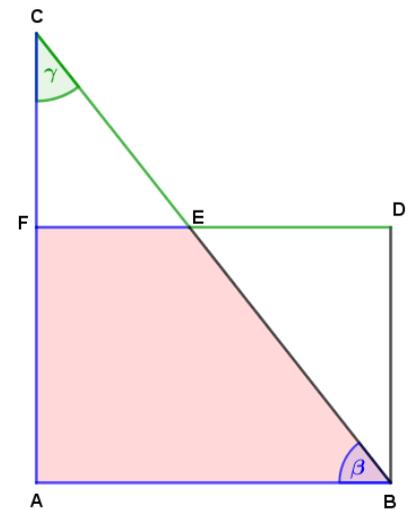
Berechnung von \overline{BC} über die Summe aus \overline{AE} und \overline{ED} .

Berechnung von \overline{AE} mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AED .

Berechnung von \overline{ED} im Dreieck EDF über den $\sin(\varphi)$.

Berechnung von \overline{FC} über die Differenz von \overline{AB} und \overline{DF} .

Berechnung von \overline{DF} über Satz des Pythagoras im Dreieck EDF .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC}$$

$$\sphericalangle AEB: \sphericalangle AEB = \varphi = 59,0^\circ$$

$$\overline{EB}: \sin(\varphi) = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$$

$$\overline{EB} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\varphi)} = \frac{6,6}{\sin(59^\circ)} = 7,6997$$

$$\overline{BC}: \overline{BC} = \overline{AE} + \overline{ED}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{7,7^2 - 6,6^2} = 3,966$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \quad | \quad \cdot \overline{EF}$$

$$\overline{ED} = \overline{EF} \cdot \sin(\varphi) = 7,2 \cdot \sin(59^\circ) = 6,17$$

$$\overline{BC} = 3,966 + 6,17 = 10,136$$

$$\overline{FC}: \overline{FC} = \overline{AB} - \overline{DF}$$

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{ED}^2} = \sqrt{7,2^2 - 6,17^2} = 3,71$$

$$\overline{FC} = 6,6 - 3,71 = 2,89$$

$$u: u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{FC} = 7,6997 + 10,136 + 7,2 + 2,89 = 27,9257 \text{ cm}$$

Der Umfang des Vierecks $EBCF$ beträgt 27,9 cm.

Lösungslogik über Sinussatz

Die Fläche des Trapezes $ABEF$ errechnet sich aus:

$$A_{ABEF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{FE}) \cdot \overline{AF}.$$

Berechnung von β über die Winkelsumme im Dreieck ABC .

Berechnung von \overline{FE} im Dreieck FEC über den Sinussatz.

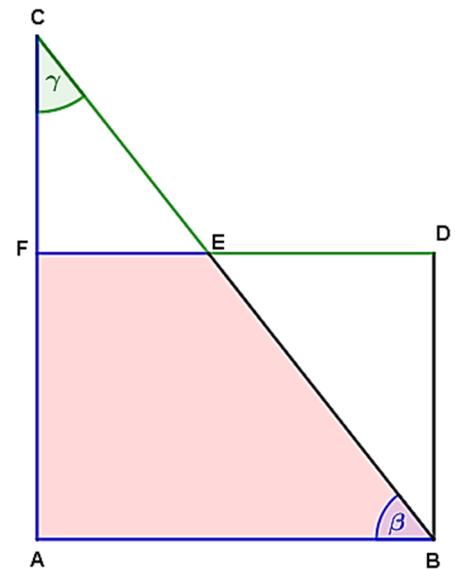
Berechnung von \overline{AB} über die Summe aus \overline{FE} und \overline{DE} .

Berechnung von \overline{AC} im Dreieck ABC über den Sinussatz.

Berechnung von \overline{FC} im Dreieck FEC mit dem Satz des Pythagoras.

Berechnung von \overline{AF} über die Differenz von \overline{AC} und \overline{FC} .

Berechnung der Fläche A_{ABEF} .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb über Sinussatz

$$A_{ABEF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{FE}) \cdot \overline{AF}$$

$$\beta: \quad \beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$$

$$\overline{FE}: \quad \frac{\overline{FE}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{CE}}{\sin 90^\circ} \quad | \quad \cdot \sin \gamma$$

$$\overline{FE} = \frac{\overline{CE}}{\sin 90^\circ} \cdot \sin(\gamma) = 6,3 \cdot \sin(38^\circ) = 3,8787$$

$$\overline{AB}: \quad \overline{AB} = \overline{FE} + \overline{DE} = 3,8787 + 5,1 = 8,9787$$

$$\overline{AC}: \quad \frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} \quad | \quad \cdot \sin \beta$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta = \frac{8,9787}{\sin 38^\circ} \cdot \sin 52^\circ = 11,4922$$

$$\overline{FC}: \quad \overline{FC} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{FE}^2} = \sqrt{6,3^2 - 3,8787^2} = 4,9644$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC} = 11,4922 - 4,9644 = 6,5278$$

$$A_{ABEF}: \quad A_{ABEF} = \frac{1}{2} \cdot (8,9787 + 3,8787) \cdot 6,5278 = 41,9653$$

Die Fläche des Trapezes $ABEF$ beträgt $42,0 \text{ cm}^2$

Lösung P3/2019

Lösungslogik

Oberfläche:

Die Oberfläche besteht aus 4 Seitenflächen des Würfels sowie zwei Mantelflächen der Pyramide (die Grundflächen der Pyramide verdecken zwei Seitenflächen des Würfels, sodass diese nicht zur Oberfläche gehören).

$$O_{\text{Körper}} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s$$

Berechnung von $\frac{a}{2}$ über den $\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ im Dreieck DEA .

Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras im Dreieck DEA .

Berechnung von $O_{\text{Körper}}$.

Länge der Strecke \overline{AB} :

In nebenstehender Grafik erkennen wir, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist mit einem rechten Winkel bei C . Weiterhin gilt, dass $\overline{AC} = \overline{BC}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{2 \cdot \overline{AC}^2} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2}$$

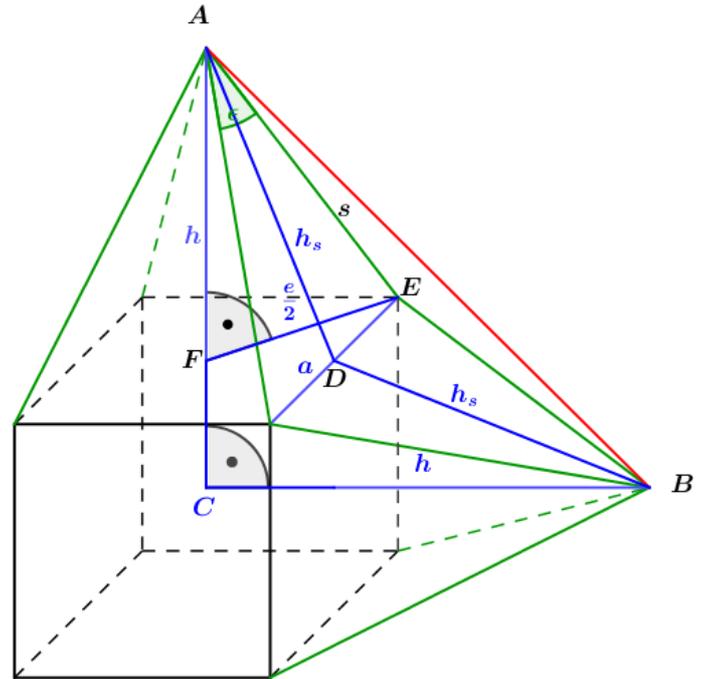
Berechnung von \overline{AC} aus der Summe von \overline{FC} und \overline{AF} .

$$\overline{AF} = h_{\text{pyr}}$$

Berechnung von $\frac{e}{2}$ als halbe Diagonale einer Würfelseitenfläche.

Berechnung von h_{pyr} über den Satz des Pythagoras im Dreieck AFE .

Der Punkt C liegt im Würfelmittelpunkt, damit ist $\overline{FC} = \frac{a}{2}$.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$O_{\text{Körper}} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s$$

$$a: \quad \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s} \quad | \quad \cdot s$$

$$\frac{a}{2} = s \cdot \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = 8,5 \cdot \sin(20,7^\circ) = 3,0$$

$$a = 6,0$$

$$h_s: \quad h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{8,5^2 - 3^2} = 7,95$$

$$O_{\text{Körper}} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s = 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 7,95 = 144 + 190,8 = 334,8$$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $334,8 \text{ cm}^2$

$$\overline{AB}: \quad \overline{AB} = \sqrt{2 \cdot \overline{AC}^2} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2}$$

$$\overline{AC}: \quad \overline{AC} = \overline{FC} + \overline{AF}$$

$$\overline{FC}: \quad \overline{FC} = \frac{a}{2} = 3,0$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = h_{pyr}$$

$$h_{pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$e = a \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \quad | \quad \text{Diagonale einer Würfelseite}$$

$$\frac{e}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$h_{pyr} = \sqrt{8,5^2 - (3 \cdot \sqrt{2})^2} = 7,365$$

$$\overline{AC}: \quad \overline{AC} = \overline{FC} + \overline{AF} = 3,0 + 7,365 = 10,365$$

$$\overline{AB}: \quad \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} = 10,365 \cdot \sqrt{2} = 14,66$$

Die Entfernung der Punkte A und B beträgt 14,7 cm.

Lösung P4/2019

- Anstieg E-Bikes von 2013 bis 2017:**
 Der Grafik entnimmst du, dass 410 000 E-Bikers in 2013 und 720 000 E-Bikes in 2017 verkauft wurden. Der Wert von 2013 ist der Grundwert, der von 2017 ist der Prozentwert. Gesucht ist der Prozentsatz.

$$p = \frac{P}{G} = \frac{720000}{410000} = 1,7561 = 175,6 \%$$

In 2017 wurden 175,6 % der E-Bikes von 2013 verkauft. Diers ist ein Anstieg um 75,6 %.
- Anzahl aller verkauften Fahrräder in 2017:**
 Der Grafik entnimmst du, dass die 720 000 E-Bikes in 2017 19 % aller verkauften Fahrräder waren. Die 720 000 E-Bikes sind damit Prozentwert bei einem Prozentsatz von 19 %. Gesucht ist somit der Grundwert.

$$G = \frac{P}{p} = \frac{720000}{0,19} = 3789473,7$$

In 2017 wurden insgesamt 3.789.473 Fahrräder verkauft.
- Anzahl Mountainbikes mit Vollfederung:**
 Der Grafik entnimmst du, dass 7 % aller in 2017 verkauften Fahrräder Mountain-Bikes waren. Von diesen waren laut Aufgabenstellung 22 % mit Vollfederung versehen.
 Wir bestimmen zunächst die Gesamtanzahl verkaufter Mountain-Bikes in 2017:

$$P = G \cdot \frac{p\%}{100} = 3789473 \cdot \frac{7\%}{100} = 265263,11$$

In wurden somit insgesamt 265263 Mountain-Bikes verkauft. Davon sind mit Vollfederung versehen:

$$P = G \cdot \frac{p\%}{100} = 265263 \cdot \frac{22\%}{100} = 58357,86$$

58.358 der in 2017 verkauften Mountain-Bikes sind mit Vollfederung versehen.

Lösung P5/2019

(1) $\frac{x+2}{4} - y = 6$		· 4
(2) $7 - (x - 2y) = y$		-Klammer auflösen
(1) $x + 2 - 4y = 24$		-2
(2) $7 - x + 2y = y$		-y
(1) $x - 4y = 22$		
(2) $7 - x + y = 0$		-7
(1) $x - 4y = 22$		
(2) $-x + y = -7$		-7
(1)+(2) $-3y = 15$:(-3)
$y = -5$		
(2) $-x - 5 = -7$		+5
$-x = -2$		· (-1)
$x = 2$		
$\mathbb{L} = \{(2; -5)\}$		

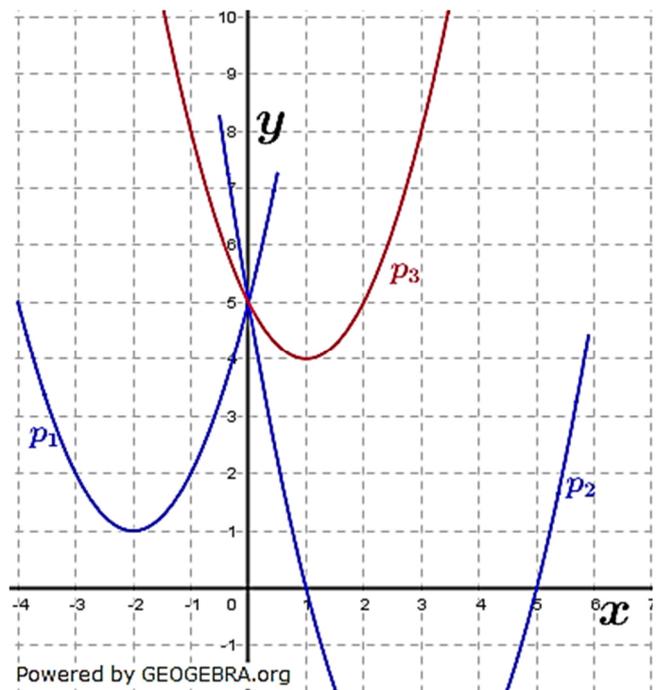
Lösung P6/2019

Lösungslogik

Suche aus der Wertetabelle die beiden Punkte $P_1(0|5)$ und $P_2(1|0)$ in der Graphik. Die beiden Punkte gehören zur Parabel p_2 .

Berechne von allen drei gegebenen Normalparabeln die Scheitelpunkte über die quadratische Ergänzung. Jetzt kannst du p_1 und p_2 problemlos den Graphen zuordnen.

Zeichne abschließend noch die Parabel p_3 in das Koordinatensystem ein.



Klausuraufschrieb

Aus Wertetabelle:

$P_1(0|5)$ und $P_2(1|0)$

Die beiden Punkte und damit die Wertetabelle gehören zum Graphen

p_2 .

Scheitelpunkte:

(A) $y = x^2 - 6x + 5$
 $y = (x - 3)^2 - 9 + 5$
 $y = (x - 3)^2 - 4$
 $S_A(3|-4)$

(B) $y = x^2 - 2x + 5$
 $y = (x - 1)^2 - 1 + 5$
 $y = (x - 1)^2 + 4$
 $S_B(1|4)$

(C) $y = x^2 + 4x + 5$
 $y = (x + 2)^2 - 4 + 5$
 $y = (x + 2)^2 + 1$
 $S_C(-2|1)$

Über die Scheitelpunkte ergibt sich:

Funktionsgleichung (A) gehört zum Graphen p_2 .

Funktionsgleichung (C) gehört zum Graphen p_1 .

Funktionsgleichung (B) gehört zum Graphen p_3 .

Lösung P7/2019

Lösungslogik

Bei allen Ereignissen handelt es sich um Ziehen **OHNE** Zurücklegen.

Zuerst einen roten, dann einen weißen Kaugummi:

Für Rot im ersten Zug gilt $\frac{10}{25}$. Für Weiß im zweiten Zug gilt $\frac{9}{24}$ (Ziehen ohne Zurücklegen, es sind zwar weiterhin 9 weiße Kaugummi im Automaten, aber insgesamt nur noch 24 Kaugummi).

Keinen grünen Kaugummi:

Wir bezeichnen die roten und weißen Kaugummi als „NICHT grün“, sodass für den ersten Zug „nicht grün“ gilt $\frac{19}{25}$ und für den zweiten Zug „nicht grün“ gilt $\frac{18}{24}$.

Zwei mit Brause gefüllte Kaugummis:

Wir teilen die roten und grünen Kugeln je zur Hälfte auf in 5 rote mit Kaugummi und 5 rote mit Brause, sowie 3 grüne mit Kaugummi und 3 grüne mit Brause. Der Ergebnisraum des Zufall-Versuches ist dann:

$$\Omega = \{r_{Brause}r_{Brause}; g_{Brause}g_{Brause}; r_{Brause}g_{Brause}; g_{Brause}r_{Brause}\}$$

Klausuraufschrieb

Zuerst einen roten, dann einen weißen Kaugummi:

$$P(\text{rot}) = \frac{10}{25} \text{ im ersten Zug, } P(\text{weiß}) = \frac{9}{24} \text{ im zweiten Zug.}$$

$$P(\text{erst rot, dann weiß}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20} = 15\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, zuerst einen roten und dann einen weißen Kaugummi zu ziehen beträgt 15 %.

Keinen grünen Kaugummi:

Rote und weiße Kaugummi bilden zusammen die „Nicht grünen“ Kaugummis.

$$P(\text{keinen grünen}) = P(\overline{\text{grün}}; \overline{\text{grün}}) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} = \frac{57}{100} = 57\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, keinen grünen Kaugummi zu ziehen beträgt 57 %.

Zwei mit Brause gefüllte Kaugummis:

Rote Brause (rb) = 5 Kugeln, grüne Brause (gb) = 3 Kugeln.

Die möglichen Ereignisse sind:

Zwei rb oder zwei gb oder einmal rb dann gb bzw. umgekehrt erst gb dann rb .

$$P(\text{zwei Brause}) = P(rbrb; gbgb; rbgb; gbrb) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} + 2 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{3}{24} = \frac{20+6+30}{600}$$

$$P(\text{zwei Brause}) = \frac{7}{25} = 9,33\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei Brausekugeln zu ziehen beträgt 28 %.

Lösung P8/2019

Lösungslogik

Wir berechnen die Zentralwerte sowie die oberen Quartile an Hand der gegebenen Ranglisten und vergleichen die Ergebnisse mit den beiden Boxplots. Daraus leiten wir die Entscheidung ab, welches Boxplot zu welcher Berufsgruppe gehört.

Zeichnung zweites Boxplot:

Siehe Klausuraufschrieb

Ergänzung der kaufmännischen Rangliste:

Wir stellen fest, an welchen Rangplätzen die Hinzufügungen erfolgen und prüfen, ob sich dadurch ein neuer Zentralwert bzw. andere Quartile ergeben.

Klausuraufschrieb

Rangliste technische Berufsausbildung:

Die Rangliste hat $n = 17$ Elemente.

Zentralwert:

$$\frac{n}{2} = \frac{17}{2} = 8,5 \Rightarrow \text{Der Zentralwert steht auf Platz 9, } z = 890.$$

Unteres Quartil:

$$\frac{n}{4} = \frac{17}{4} = 4,25 \Rightarrow \text{Das untere Quartil steht auf Platz 5, } q_u = 820$$

Oberes Quartil:

$$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 17 = 12,75 \Rightarrow \text{Das obere Quartil steht auf Platz 13, } q_o = 920$$

Minimum $min = 760$

Maximum $max = 970$

Rangliste kaufmännische Berufe:

Die Rangliste hat $n = 13$ Elemente.

Zentralwert:

$$\frac{n}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \Rightarrow \text{Der Zentralwert steht auf Platz 7, } z = 890.$$

Unteres Quartil:

$$\frac{n}{4} = \frac{13}{4} = 3,25 \Rightarrow \text{Das untere Quartil steht auf Platz 4, } q_u = 820$$

Oberes Quartil:

$$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 13 = 9,75 \Rightarrow \text{Das obere Quartil steht auf Platz 10, } q_o = 940$$

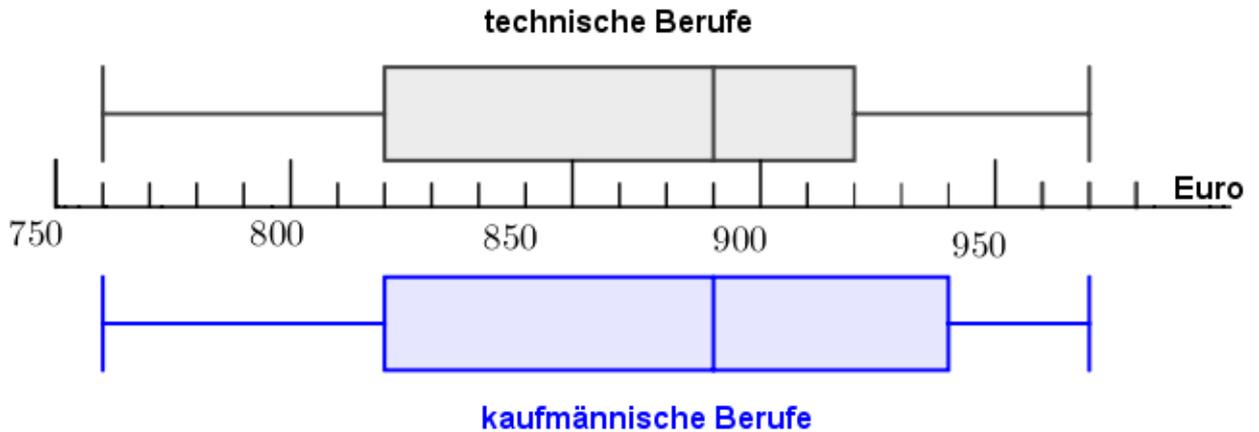
Minimum $min = 760$

Maximum $max = 970$

Zentralwert, Minimum, Maximum und unteres Quartil sind bei beiden Ranglisten identisch. Lediglich das obere Quartil weist einen Unterschied auf.

Der Boxplot gehört zur Berufsgruppe der technischen Berufe mit einem oberen Quartilswert von 920 €.

Boxplot der kaufmännischen Berufe:



Powered by GEOGEBRA.org

Erweiterung der kaufmännischen Rangliste:

760 | 770 | 800 | 820 | 820 | 840 | 850 | 880 | 890 | 900 | 910 | 920 | 940 | 940 | 950 | 950 | 970

Die Rangliste hat nun $n = 17$ Elemente.

Zentralwert:

$$\frac{n}{2} = \frac{17}{2} = 8,5 \Rightarrow \text{Der Zentralwert steht auf Platz 9, } z = 890.$$

Unteres Quartil:

$$\frac{n}{4} = \frac{17}{4} = 4,25 \Rightarrow \text{Das untere Quartil steht auf Platz 5, } q_u = 820$$

Oberes Quartil:

$$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 17 = 12,75 \Rightarrow \text{Das obere Quartil steht auf Platz 13, } q_o = 940$$

Minimum: $min = 760$

Maximum: $max = 970$

Durch die Erweiterung verändern sich Kennwerte nicht.