Aufgabe P1/2020

Im Quadrat $ABCD$ liegt der Streckenzug $DEFB$.
Es gilt:

$\overline{BF} = 8{,}5\ cm$

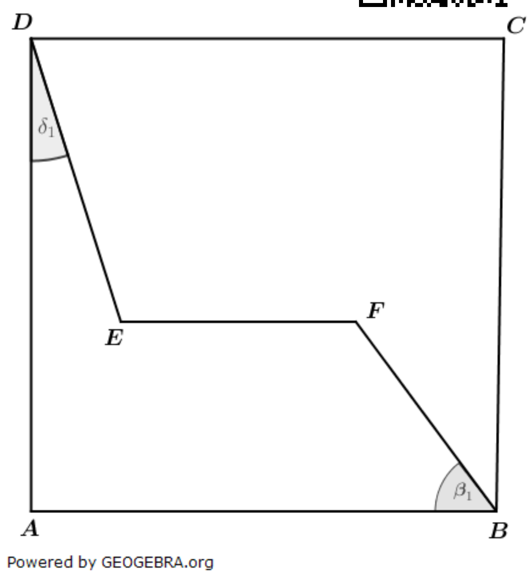
$\overline{EF} = 8{,}3\ cm$

$\overline{AB} = 16{,}7\ cm$

$\beta_1 = 52{,}0°$

$\overline{EF}$ verläuft parallel zu $\overline{AB}$.
Berechnen Sie den Winkel δ_1

Lösung: $\delta_1 = 17{,}6\ °$



Aufgabe P2/2020

Die Eckpunkte des Dreiecks ABC liegen auf den Parallelen g und h.
Es gilt:

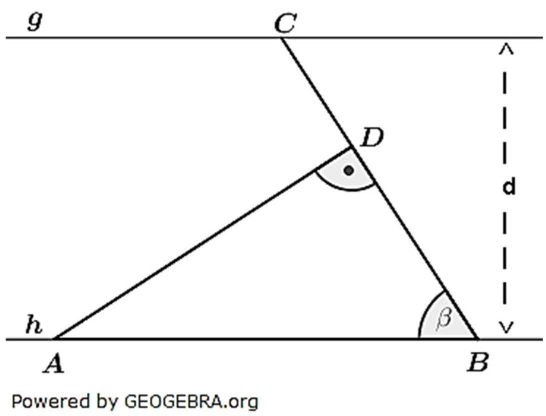
$\overline{AB} = 9{,}4\ cm$

$\beta = 57{,}0°$

$d = 6{,}7\ cm$

Berechnen Sie den Umfang des Dreieck ADC

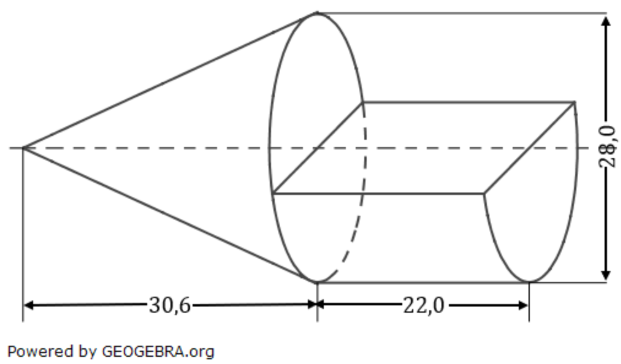
Lösung: $u_{ADC} = 19{,}1\ cm$



Aufgabe P3/2020

Ein Werkstück besteht aus einem Kegel und einem halben Zylinder.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Werkstücks.
(Maße in cm)

Lösung: $O_{Werkstück} = 3679{,}4\ cm^2$



Aufgabe P4/2020

Lösen Sie die Gleichung:

$(2x+1)^2-3(x+4)=(x-1)(2x+1)+2$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{L}=\{-3;2\}$

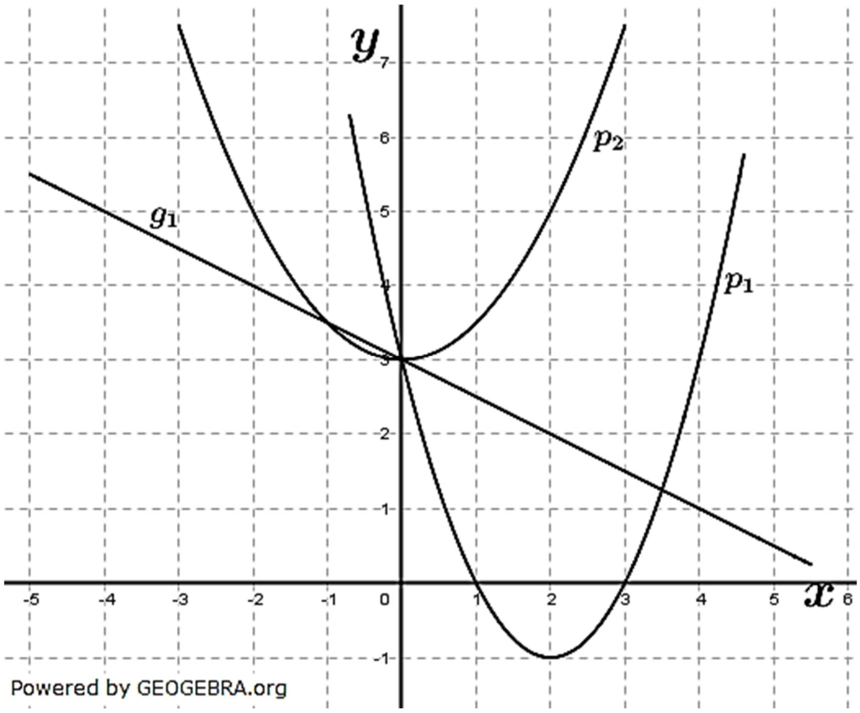
Aufgabe P5/2020

Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen und drei Graphen.

(1) $y=\frac{1}{2}x+3$ $\qquad$ (2) $y=x^2+4x+3$

(3) $y=\frac{1}{2}x^2+3$ $\qquad$ (4) $y=x^2-4x+3$

(5) $y=-\frac{1}{2}x+3$



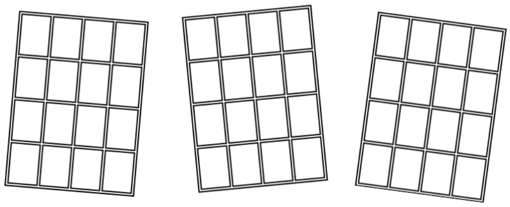
- Ordnen Sie jedem Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- Zeichnen Sie die beiden fehlenden Graphen in ein Koordinatensystem.

Lösung: (5) *gehört zu* g_1

(4) *gehört zu* p_1

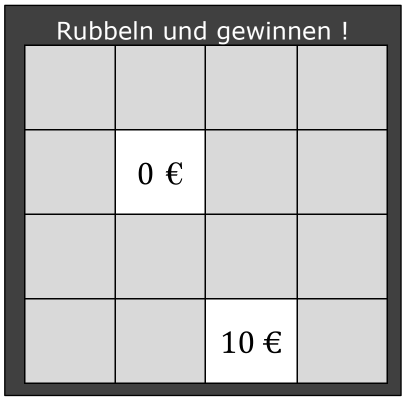
(3) *gehört zu* p_1

Aufgabe A6/2020



Ben, Laura und Emma besitzen jeweils ein Rubbel-Los. Auf jedem Los befinden sich 16 Felder. Nur zwei der 16 Felder werden freigrubbelt. Die beiden Beträge, die dadurch sichtbar werden, werden addiert und geben den Gewinn.

Auf acht Feldern steht der Betrag $0\,€$, auf sechs Feldern der Betrag $1\,€$ und auf zwei Feldern der Betrag $10\,€$.



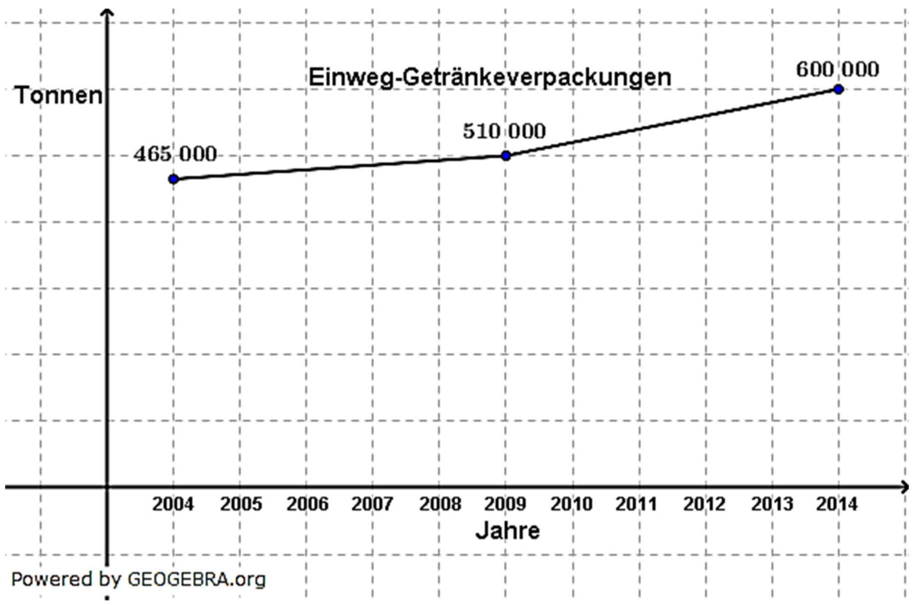
- Ben hat auf seinem Los zwei Felder freigerubbelt (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis Gewinn „$10\,€$“.
- Laura überlegt sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, den Hauptgewinn von 20 € zu erhalten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit.
- Emma möchte mehr als $10\,€$ gewinnen. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Lösung: $P(Gewinn\ 10\,€) = \frac{2}{15} = 13{,}3\,\%$; $P(Hauptgewinn\ 20\,€) = \frac{1}{120} = 0{,}83\,\%$

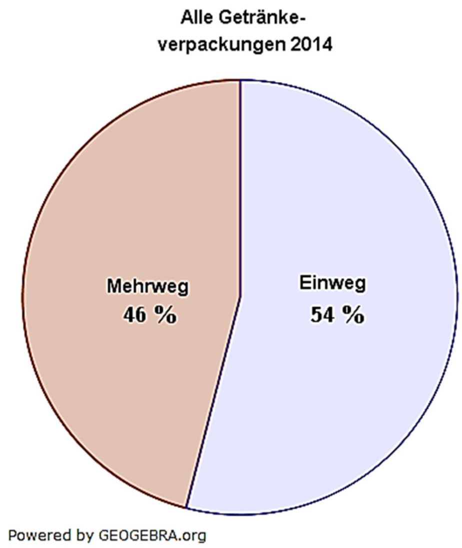
$$P(Gewinn\ größer\ 10\,€) = \frac{13}{120} = 10{,}83\,\%$$

Aufgabe P7/2020

Die Diagramme zeigen den Verbrauch von Getränkepackungen.



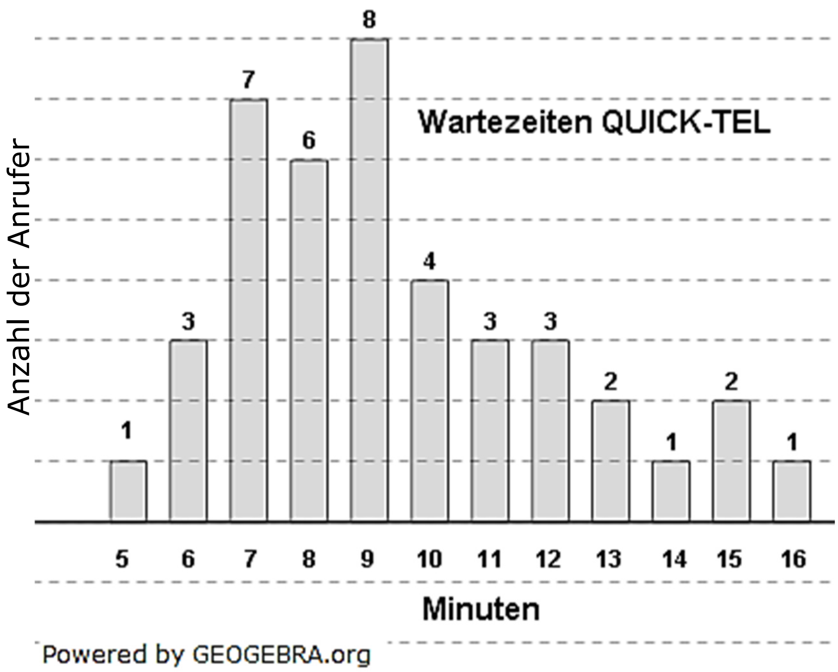
- Um wie viel Prozent ist der Verbrauch der Einweg-Getränkeverpackungen von 2004 bis 2014 insgesamt gestiegen?
- Wie viele Tonnen Getränkeverpackungen (Einweg und Mehrweg) wurden im Jahr 2014 insgesamt verbraucht?
- Der Verbrauch von Einweg-Getränkeverpackungen soll in den 10 Jahren von 2014 bis 2024 jährlich um jeweils 5 % gegenüber dem Vorjahr sinken.
  Wie viele Tonnen Einweg-Getränkeverpackungen wären es dann im Jahr 2024?



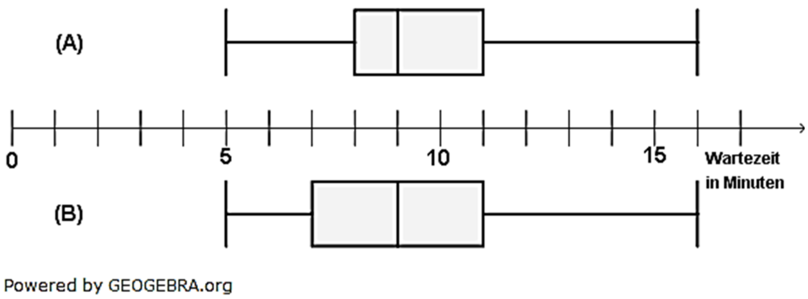
Lösungen: *Anstieg zwischen* 2004 *und* 2014*:* 29 %
Verbrauch Getränkeverpackungen insgesamt in 014*: ca.* 1,1 *Mio. Tonnen.*
Einweg-Getränkeverpackungen in 2024*:* 359.242 *Tonnen.*

Aufgabe P8/2020

Im Rahmen einer Unter-suchung wurden die Wartezeiten beim Anruf zweier Hotlines notiert. Das Diagramm zeigt die Wartezeiten von 41 Anrufern der Hotline QUICK-TEL.



- Welche der beiden nachfolgenden Boxplots stellt die Verteilung der Wartezeiten aus dem Diagramm dar? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe der Kennwerte.



- Der andere Boxplot zeigt die Verteilung der Wartezeiten der Hotline FAST-PHONE. Hier wurden eben falls 41 Wartezeiten erfasst.
In der nachfolgenden Strichliste fehlen die Werte für 8, 9 und 11 Minuten.
Ergänzen Sie diese drei Felder mit möglichen Werten.

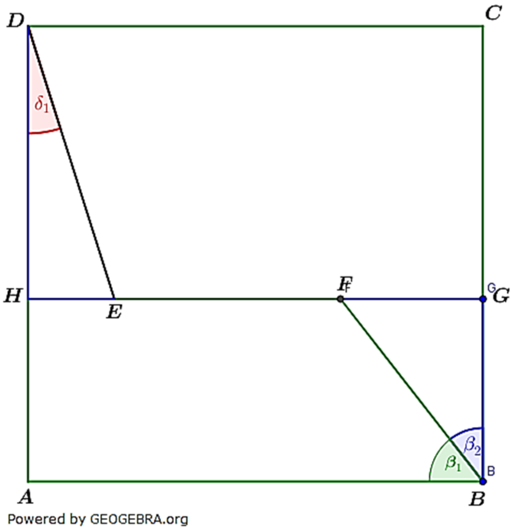
Minuten	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Anzahl der Anrufer	II	IIII	III			IIIII		IIII	I	I	II	I

Lösungen: *Der Boxplot (B) gehört zur Hotline QUICK-TEL.*
Mögliche Werte für 8 *Minuten Wartezeit:* $2 - 11$ *Anrufer;*
Mögliche Werte für 9 *Minuten Wartezeit:* $1 - 14$ *Anrufer;*
Mögliche Werte für 11 *Minuten Wartezeit:* $2 - 6$ *Anrufer.*

Lösung P1/2020

Lösungslogik

Identifizierung Winkel β_2 als Ergänzungswinkel zu $90\,°$ von β_1.
Berechnung von $\overline{FG}$ über den $sin(\beta_2)$.
Berechnung von $\overline{GB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{HE}$ aus der Differenz von $\overline{AB}$ und der Summe von $\overline{FG}$ und $\overline{FE}$.
Berechnung von $\overline{HD}$ aus der Differenz von $\overline{AD} = \overline{AB}$ und $\overline{BG}$.
Berechnung von δ_1 über den $\tan(\delta_1)$.



Klausuraufschrieb

$\beta_2 = 90\,° - \beta_1 = 90° - 52° = 38°$

$\overline{FG}$: $\quad sin(\beta_2) = \frac{\overline{FG}}{\overline{BF}}$

$\overline{FG} = \overline{BF} \cdot sin(38°) = 8{,}5 \cdot \sin(38°) = 5{,}23$

$\overline{BG}$: $\quad \overline{BG} = \sqrt{\overline{BF}^2 - \overline{FG}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BG} = \sqrt{8{,}5^2 - 5{,}23^2} = 6{,}7$

$\overline{HE}$: $\quad \overline{HE} = \overline{AB} - \overline{FG} - \overline{EF} = 16{,}7 - 5{,}23 - 8{,}3 = 3{,}17$

$\overline{HD}$: $\quad \overline{HD} = \overline{AB} - \overline{BG} = 16{,}7 - 6{,}7 = 10$

δ_1: $\quad tan(\delta_1) = \frac{\overline{HE}}{\overline{HD}} = \frac{3{,}17}{10} = 0{,}317$

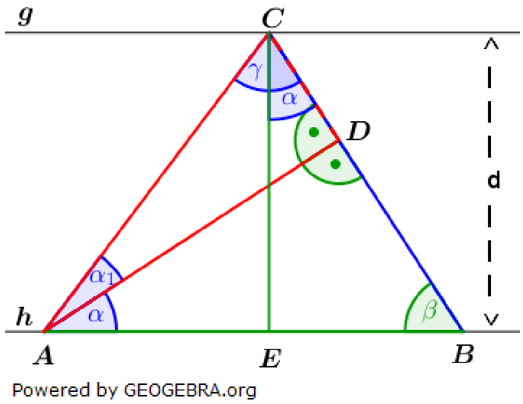
$\delta_1 = ta3(0{,}617) = 17{,}58\,°$

Der Winkel δ_1 ist $17{,}6\,°$ groß.

Lösung P2/2020

Lösungslogik

Berechnung α im Dreieck ABD als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den $sin(\beta)$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $sin(\beta)$.
Berechnung von $\overline{CD}$ aus der Differenz von $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den $\tan(\beta)$.
Berechnung von $\overline{AE}$ aus der Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von u_{ADC} aus der Summe von $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ und $\overline{DC}$.



Klausuraufschrieb

α: $\alpha = 180° - 90° - \beta = 90° - 57{,}0° = 33{,}0°$

$\overline{AD}$: $sin\ (\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ | $\cdot\ \overline{AB}$

$\overline{AD} = \overline{AB} \cdot sin(\beta) = 9{,}4 \cdot sin(57°) = 7{,}884$

$\overline{BD}$: $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BD} = \sqrt{9{,}4^2 - 7{,}884^2} = 5{,}119$

$\overline{BC}$: $sin\ (\beta) = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$ | $\cdot\ \overline{BC};\ :\sin\ (\beta)$

$\overline{BC} = \frac{\overline{EC}}{sion(\beta)} = \frac{6{,}7}{sin\ (57°)} = 7{,}99$

$\overline{CD}$: $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 7{,}99 - 5{,}119 = 2{,}871$

$\overline{EB}$: $tan\ (\alpha) = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$ | $\cdot\ \overline{EC};$

$\overline{EB} = \overline{EC} \cdot \tan(\alpha) = 6{,}7 \cdot \tan(33\ °) = 4{,}351$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 9{,}4 - 4{,}351 = 5{,}049$

$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{5{,}049^2 + 6{,}7^2} = 8{,}389$

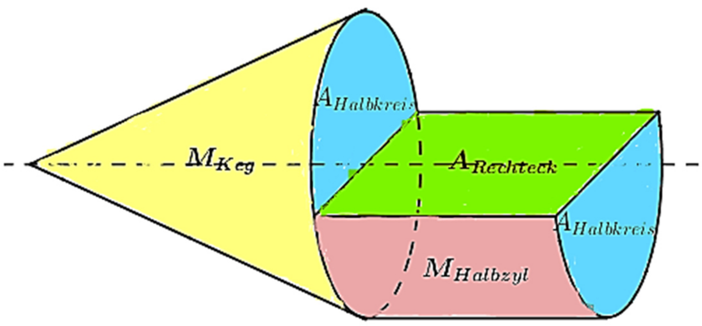
u_{ADC}: $u_{ADC} = \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{CD} = 8{,}389 + 7{,}884 + 2{,}871 = 19{,}144$

Der Umfang des Dreiecks ADC *beträgt etwa* $19{,}1\ cm.$

Lösung P3/2020

Lösungslogik

Die Oberfläche setzt sich aus 4 Einzelflächen zusammen und zwar:
Mantelfläche des Kegels M_{Keg} (in Grafik gelb),
Mantelfläche des Halbzylinders $M_{Halbzyl}$ (in Grafik rot),
Zwei Halbkreisflächen $A_{Halbkreis}$ (in Grafik blau),
Fläche eines Rechtecks $A_{Rechteck}$ (in Grafik grün).



Powered by GEOGEBRA.org

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$

Klausuraufschrieb

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$

$r_{Keg} = 14{,}0$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{30{,}6^2 + 14^2} = 33{,}65$

$M_{Keg} = \pi \cdot 14 \cdot 33{,}65 = 1480{,}0$

$M_{Halbzyl}$:

$$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{Keg} \cdot h_{Zyl}$$
$$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 967{,}61$$

$A_{Halbkreis}$:

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$
$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 14^2 = 307{,}88$$

$A_{Rechteck}$:

$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$$
$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 616$$

$O_{Werkstück} = 1480{,}0 + 967{,}61 + 2 \cdot 307{,}88 + 616 = 3679{,}37$

Die Oberfläche des Werkstücks beträgt $3679{,}4\ cm^2$.

Lösung P4/2020

$(2x+1)^2 - 3(x+4) = (x-1)(2x+1) + 2$	|	ausmultiplizieren
$4x^2 + 4x + 1 - 3x - 12 = 2x^2 + x - 2x - 1 + 2$	|	Zusammenfassen
$4x^2 + x - 11 = 2x^2 - x + 1$	|	$-2x^2;\ +x;\ -1$
$2x^2 + 2x - 12 = 0$	|	$:2$
$x^2 + x - 6 = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 2\}$

Lösung P5/2020

Lösungslogik

g_1 ist eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Nur Gleichung (5) weist diese Steigung auf.

p_1 ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $S(2|-1)$. Gleichung (4) erfüllt diesen Scheitelpunkt.

p_2 ist eine gestauchte, nach oben geöffnete Parabel. Gleichung (3) erfüllt diese Voraussetzung.

Klausuraufschrieb

Zuordnung g_1:

g_1 ist eine Gerade mit negativer Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Nur Gleichung (5) erfüllt diese Bedingung.

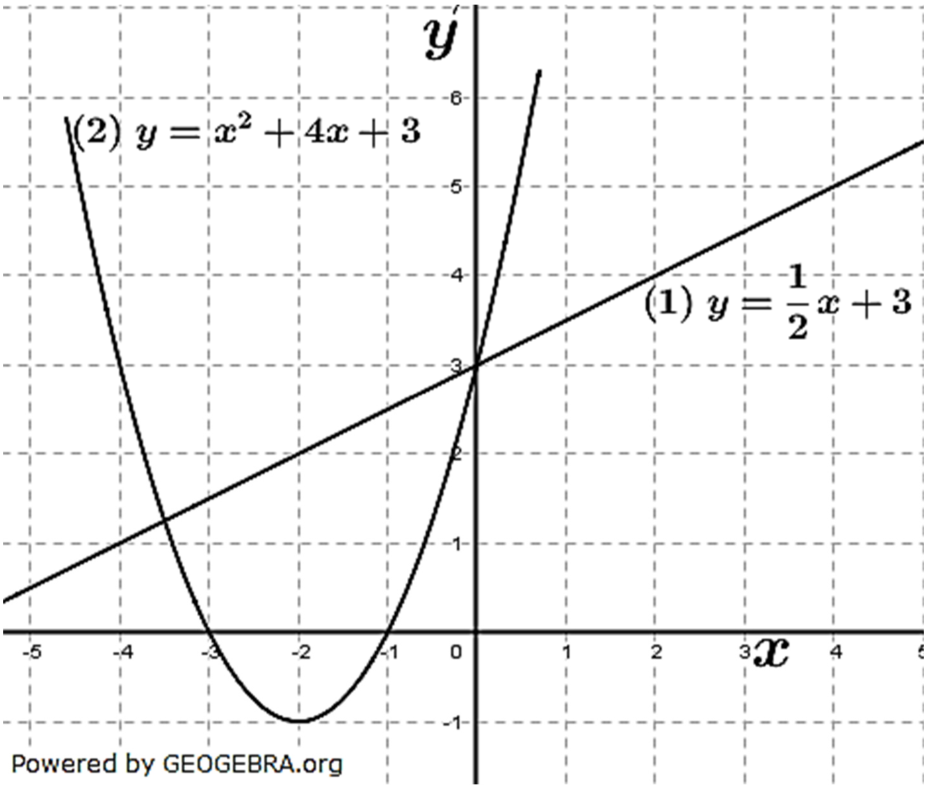
Zuordnung p_1:

p_1 ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(2|-1)$. Nur Gleichung (4) erfüllt diese Bedingung.

Zuordnung p_2:

p_2 ist eine nach oben geöffnete, gestauchte Parabel. Nur Gleichung (3) erfüllt diese Bedingung.

Graphen der Funktionsgleichungen (1) und (2):



Lösung P6/2020

<u>Lösungslogik</u>

Bei allen Ereignissen handelt es sich um Ziehen **OHNE** Zurücklegen.

Gewinn $10\,€$*:*
Ein Gewinn von $10\,€$ erfolgt, wenn entweder zuerst $0\,€$ und dann $10\,€$, oder aber zuerst $10\,€$ und dann $0\,€$ freigerubbelt wurden.

Hauptgewinn $20\,€$*:*
Der Hauptgewinn von $20\,€$ erfolgt, wenn zweimal $10\,€$ freigerubbelt wurden.

Gewinn größer $10\,€$*:*
Ein Gewinn größer $10\,€$ erfolgt, wenn entweder zuerst $1\,€$ und dann $10\,€$, oder aber zuerst $10\,€$ und dann $1\,€$ oder aber zweimal $10\,€$ freigerubbelt wurden.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Gewinn $10\,€$*:*

$P(Gewinn\ 10\,€) = P(\{0\,€; 10\,€\}, \{10\,€; 0\,\}) = \frac{8}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15} = 13{,}3\,\%.$

$P(Hauptgewinn\ 20\,€) = P(\{10\,€; 10\,€\}) = \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{120} = 0{,}83\,\%$

$P(Gewinn\ größer\ 10\,€) = P(\{1\,€; 10\,€\}, \{10\,€; 1\,\}, \{10\,€; 10\,€\}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{120}$
$= \frac{13}{120} = 10{,}83\,\%.$

Lösung P7/2020

- *Anstieg Verbrauch der Einweg-Getränkeverpackungen von 2004 bis 2014:*
  Der Grafik entnimmst du, dass $465\,000$ Verpackungen in 2004 und $600\,000$ Verpackungen in 2014 verbraucht wurden. Der Wert von 2004 ist der Grundwert, der von 2014 ist der Prozentwert. Gesucht ist der Prozentsatz.
  $p = \frac{P}{G} = \frac{600000}{465000} = 1{,}2903 = 129{,}0\,\%$
  In 2014 wurden $129\,\%$ der Verpackungen von 2004 verkauft. Dies ist ein Anstieg um $29\,\%$.
- *Tonnen Getränkeverpackungen (Einweg und Mehrweg) im Jahr 2014 insgesamt:*
  Der Grafik entnimmst du, dass $600\,000$ Einweg-Verpackungen in 2014 verbraucht wurden. Dem Kreisdiagramm entnimmst du, dass dies $54\,\%$ aller Verpackungen ist. Gesucht ist somit der Grundwert (alle Verpackungen).
  $G = \frac{P}{p} = \frac{600000}{0{,}54} = 1111111{,}11 \approx 1{,}1$ Mio.
  In 2014 wurden insgesamt etwa $1{,}1$ Mio. Verpackungen verbraucht.
- *Tonnen Einweg-Getränkeverpackungen im Jahr 2024 bei jährlicher Abnahme von $5\,\%$ des Vorjahresbestandes:*
  Der Grafik entnimmst du, dass $600\,000$ Einweg-Verpackungen in 2014 verbraucht wurden.
  <u>Lösung einfach:</u>
  Ähnlich der Zinseszinsrechnung – die ja eine Kapitalzunahme berechnet – handelt es sich hier um eine Bestandsabnahme. Bei $5\,\%$ Abnahme sind ja jährlich noch $95\,\%$ des Vorjahres. Wir verwenden die Formel der Zinseszinsrechnung mit
  $$K_n = K_0 \cdot q^n$$
  wobei $n = 10$ (Aufgabenstellung) und $q = \frac{100\,\% - p\,\%}{100} = \frac{95}{100} = 0{,}95$ ist. (Zur Erinnerung: In der Zinseszinsrechnung mussten wir wegen Zunahme rechnen $q = \frac{100\,\% + p\,\%}{100}$)
  $K_{10} = 600000 \cdot 0{,}95^{10} = 359242{,}16$

  <u>Lösung umständlich:</u>
  Aufstellung einer Tabelle wie folgt:

Jahr	Anfangsbestand	$5\,\%$ Abnahme	Endbestand
2014			600000
2015	600000	30000	570000
2016	570000	28500	541500
2017	541500	27075	514425
2018	514425	25721	488704
2019	488704	24435	464269
2020	464269	23213	441056
2021	441056	22053	419003
2022	419003	20951	398052
2023	398052	19903	378149
2024	378149	18907	359242

In 2024 würden nur noch 359242 Einweg-Getränkeverpackungen verbraucht, wenn der Verbrauch jährlich um $5\,\%$ gegenüber dem Vorjahr sinken würde.

Lösung P8/2020

<u>Lösungslogik</u>

Zuordnung Boxplot:
Da bei beiden Boxplots Zentralwert und oberes Quartil gleich groß sind, muss lediglich das untere Quartil geprüft werden.

Ergänzung der Rangliste:
Wir bestimmen den Rangplatz für den Zentralwert und das obere Quartil und berechnen daraus die Anzahl der erforderlichen Anrufer für 8, 9 bzw. 11 Minuten Wartezeit.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Zuordnung Boxplot:
Die Rangliste hat $n = 41$ Elemente.
Unteres Quartil:
$\frac{n}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25 \Rightarrow$ Das untere Quartil steht auf Platz 11 (Anrufe). Über das Balkendiagramm erhalten wir damit für $q_u = 7$.
Boxplot (B) stellt die Verteilung der Wartezeiten aus dem Diagramm dar.

Ergänzung der Rangliste:
Zentralwert:
$\frac{n}{2} = \frac{41}{2} = 20{,}25 \Rightarrow$ Der Zentralwert steht auf Platz 21, $z = 9$.
Unteres Quartil:
$\frac{n}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25 \Rightarrow$ Das untere Quartil steht auf Platz 11, $q_u = 8$.
Oberes Quartil:
$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 41 = 30{,}75 \Rightarrow$ Das obere Quartil steht auf Platz 31 $q_O = 11$.

Wir detaillieren die Rangliste in Einzelelemente (jeder 10. Rangplatz ist grau hinterlegt):

5	5	6	6	6	6	7	7	7		q_u										z									
																			q_o		12	12	12	12	13	14	15	15	16

Wir tragen den Zentralwert und die Quartile in die Tabelle ein:

5	5	6	6	6	6	7	7	7		8										9									
																			11		12	12	12	12	13	14	15	15	16

Wir ergänzen die freien Felder mit Zahlen, z. B.

5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11
																			11	11	12	12	12	12	13	14	15	15	16

Eine weitere Möglichkeit wäre, z. B.

5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10
																			11	11	12	12	12	12	13	14	15	15	16

Weitere Lösungen möglich.