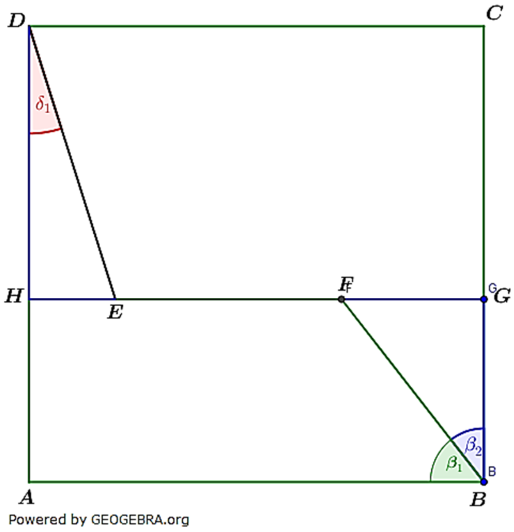
Lösung P1/2020

Lösungslogik



Identifizierung Winkel β_2 als Ergänzungswinkel zu $90\,°$ von β_1.
Berechnung von $\overline{FG}$ über den $sin(\beta_2)$.
Berechnung von $\overline{GB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{HE}$ aus der Differenz von $\overline{AB}$ und der Summe von $\overline{FG}$ und $\overline{FE}$.
Berechnung von $\overline{HD}$ aus der Differenz von $\overline{AD} = \overline{AB}$ und $\overline{BG}$.
Berechnung von δ_1 über den $\tan(\delta_1)$.

Klausuraufschrieb

$\beta_2 = 90\,° - \beta_1 = 90° - 52° = 38°$

$\overline{FG}$: $\quad sin(\beta_2) = \frac{\overline{FG}}{\overline{BF}}$

$\overline{FG} = \overline{BF} \cdot sin(38°) = 8{,}5 \cdot \sin(38°) = 5{,}23$

$\overline{BG}$: $\quad \overline{BG} = \sqrt{\overline{BF}^2 - \overline{FG}^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{BG} = \sqrt{8{,}5^2 - 5{,}23^2} = 6{,}7$

$\overline{HE}$: $\quad \overline{HE} = \overline{AB} - \overline{FG} - \overline{EF} = 16{,}7 - 5{,}23 - 8{,}3 = 3{,}17$

$\overline{HD}$: $\quad \overline{HD} = \overline{AB} - \overline{BG} = 16{,}7 - 6{,}7 = 10$

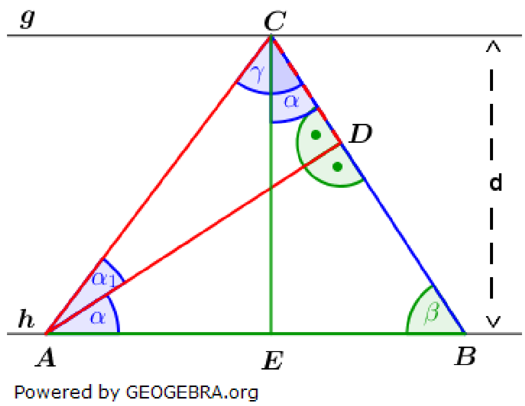
δ_1: $\quad tan(\delta_1) = \frac{\overline{HE}}{\overline{HD}} = \frac{3{,}17}{10} = 0{,}317$

$\delta_1 = ta3(0{,}617) = 17{,}58\,°$

Der Winkel δ_1 ist $17{,}6\,°$ groß.

Lösung P2/2020

Lösungslogik



Berechnung α im Dreieck ABD als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den $sin(\beta)$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $sin(\beta)$.
Berechnung von $\overline{CD}$ aus der Differenz von $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den $\tan(\beta)$.
Berechnung von $\overline{AE}$ aus der Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von u_{ADC} aus der Summe von $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ und $\overline{DC}$.

Klausuraufschrieb

α: $\alpha = 180° - 90° - \beta = 90° - 57{,}0° = 33{,}0°$

$\overline{AD}$: $sin\ (\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ | $\cdot\ \overline{AB}$

$\overline{AD} = \overline{AB} \cdot sin(\beta) = 9{,}4 \cdot sin(57°) = 7{,}884$

$\overline{BD}$: $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BD} = \sqrt{9{,}4^2 - 7{,}884^2} = 5{,}119$

$\overline{BC}$: $sin\ (\beta) = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$ | $\cdot\ \overline{BC};\ :\sin\ (\beta)$

$\overline{BC} = \frac{\overline{EC}}{sion(\beta)} = \frac{6{,}7}{sin\ (57°)} = 7{,}99$

$\overline{CD}$: $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 7{,}99 - 5{,}119 = 2{,}871$

$\overline{EB}$: $tan\ (\alpha) = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$ | $\cdot\ \overline{EC};$

$\overline{EB} = \overline{EC} \cdot \tan(\alpha) = 6{,}7 \cdot \tan(33\ °) = 4{,}351$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 9{,}4 - 4{,}351 = 5{,}049$

$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{5{,}049^2 + 6{,}7^2} = 8{,}389$

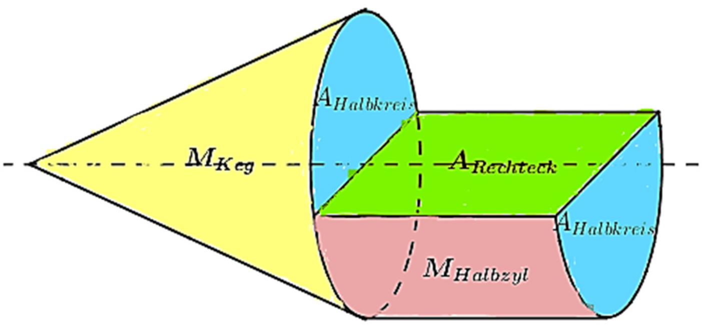
u_{ADC}: $u_{ADC} = \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{CD} = 8{,}389 + 7{,}884 + 2{,}871 = 19{,}144$

Der Umfang des Dreiecks ADC *beträgt etwa* $19{,}1\ cm.$

Lösung P3/2020

Lösungslogik

Die Oberfläche setzt sich aus 4 Einzelflächen zusammen und zwar:
Mantelfläche des Kegels M_{Keg} (in Grafik gelb),
Mantelfläche des Halbzylinders $M_{Halbzyl}$ (in Grafik rot),
Zwei Halbkreisflächen $A_{Halbkreis}$ (in Grafik blau),
Fläche eines Rechtecks $A_{Rechteck}$ (in Grafik grün).



Powered by GEOGEBRA.org

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$

Klausuraufschrieb

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$

$r_{Keg} = 14{,}0$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{30{,}6^2 + 14^2} = 33{,}65$

$M_{Keg} = \pi \cdot 14 \cdot 33{,}65 = 1480{,}0$

$M_{Halbzyl}$:

$$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{Keg} \cdot h_{Zyl}$$
$$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 967{,}61$$

$A_{Halbkreis}$:

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$
$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 14^2 = 307{,}88$$

$A_{Rechteck}$:

$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$$
$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 616$$

$O_{Werkstück} = 1480{,}0 + 967{,}61 + 2 \cdot 307{,}88 + 616 = 3679{,}37$

Die Oberfläche des Werkstücks beträgt $3679{,}4\ cm^2$.

Lösung P4/2020

$(2x+1)^2 - 3(x+4) = (x-1)(2x+1) + 2$	|	ausmultiplizieren
$4x^2 + 4x + 1 - 3x - 12 = 2x^2 + x - 2x - 1 + 2$	|	Zusammenfassen
$4x^2 + x - 11 = 2x^2 - x + 1$	|	$-2x^2;\ +x;\ -1$
$2x^2 + 2x - 12 = 0$	|	$:2$
$x^2 + x - 6 = 0$	|	p/q-Formel

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 2\}$

Lösung P5/2020

<u>Lösungslogik</u>

g_1 ist eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Nur Gleichung (5) weist diese Steigung auf.

p_1 ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $S(2|-1)$. Gleichung (4) erfüllt diesen Scheitelpunkt.

p_2 ist eine gestauchte, nach oben geöffnete Parabel. Gleichung (3) erfüllt diese Voraussetzung.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Zuordnung g_1:

g_1 ist eine Gerade mit negativer Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Nur Gleichung (5) erfüllt diese Bedingung.

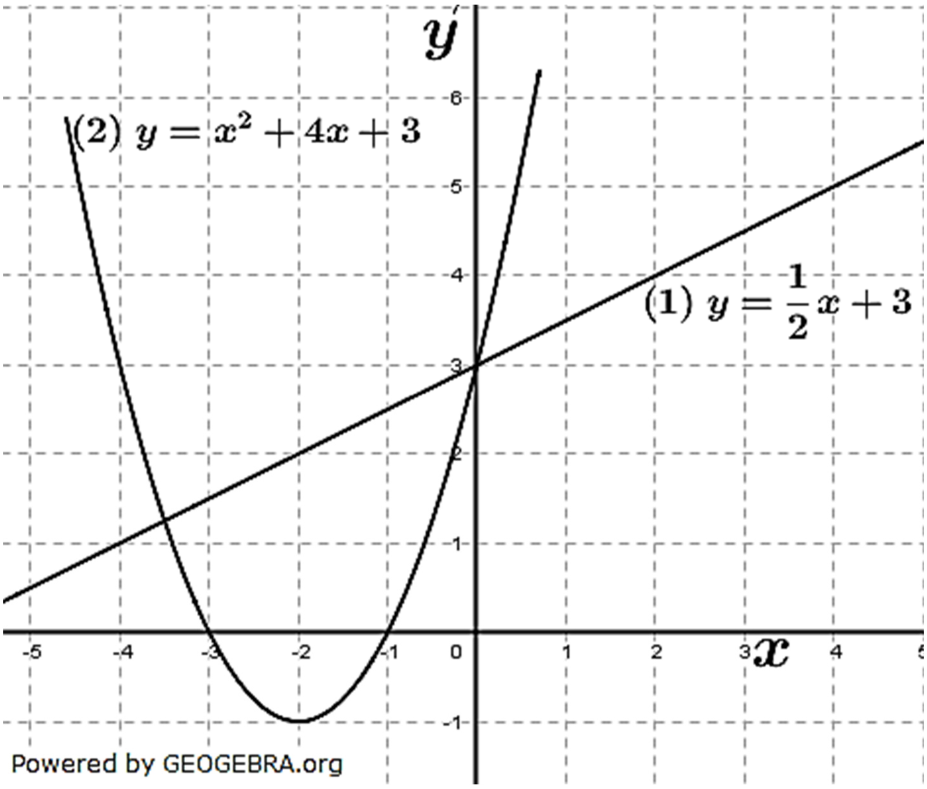
Zuordnung p_1:

p_1 ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(2|-1)$. Nur Gleichung (4) erfüllt diese Bedingung.

Zuordnung p_2:

p_2 ist eine nach oben geöffnete, gestauchte Parabel. Nur Gleichung (3) erfüllt diese Bedingung.

Graphen der Funktionsgleichungen (1) und (2):



Lösung P6/2020

Lösungslogik

Bei allen Ereignissen handelt es sich um Ziehen **OHNE** Zurücklegen.

Gewinn 10 *€:*
Ein Gewinn von 10 € erfolgt, wenn entweder zuerst 0 € und dann 10 €, oder aber zuerst 10 € und dann 0 € freigerubbelt wurden.

Hauptgewinn 20 *€:*
Der Hauptgewinn von 20 € erfolgt, wenn zweimal 10 € freigerubbelt wurden.

Gewinn größer 10 *€:*
Ein Gewinn größer 10 € erfolgt, wenn entweder zuerst 1 € und dann 10 €, oder aber zuerst 10 € und dann 1 € oder aber zweimal 10 € freigerubbelt wurden.

Klausuraufschrieb

Gewinn 10 *€:*

$P(Gewinn\ 10\ €) = P(\{0\ €; 10\ €\}, \{10\ €; 0\ \}) = \frac{8}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15} = 13{,}3\ \%.$

$P(Hauptgewinn\ 20\ €) = P(\{10\ €; 10\ €\}) = \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{120} = 0{,}83\ \%$

$P(Gewinn\ größer\ 10\ €) = P(\{1\ €; 10\ €\}, \{10\ €; 1\ \}, \{10\ €; 10\ €\}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{120}$

$= \frac{13}{120} = 10{,}83\ \%.$

Lösung P7/2020

- *Anstieg Verbrauch der Einweg-Getränkeverpackungen von 2004 bis 2014:*
  Der Grafik entnimmst du, dass 465 000 Verpackungen in 2004 und 600 000 Verpackungen in 2014 verbraucht wurden. Der Wert von 2004 ist der Grundwert, der von 2014 ist der Prozentwert. Gesucht ist der Prozentsatz.
  $p = \frac{P}{G} = \frac{600000}{465000} = 1{,}2903 = 129{,}0\ \%$
  In 2014 wurden 129 % der Verpackungen von 2004 verkauft. Dies ist ein Anstieg um 29 %.
- *Tonnen Getränkeverpackungen (Einweg und Mehrweg) im Jahr 2014 insgesamt:*
  Der Grafik entnimmst du, dass 600 000 Einweg-Verpackungen in 2014 verbraucht wurden. Dem Kreisdiagramm entnimmst du, dass dies 54 % aller Verpackungen ist. Gesucht ist somit der Grundwert (alle Verpackungen).
  $G = \frac{P}{p} = \frac{600000}{0{,}54} = 1111111{,}11 \approx 1{,}1$ Mio.
  In 2014 wurden insgesamt etwa 1,1 Mio. Verpackungen verbraucht.
- *Tonnen Einweg-Getränkeverpackungen im Jahr 2024 bei jährlicher Abnahme von 5 % des Vorjahresbestandes:*
  Der Grafik entnimmst du, dass 600 000 Einweg-Verpackungen in 2014 verbraucht wurden.
  Lösung einfach:
  Ähnlich der Zinseszinsrechnung – die ja eine Kapitalzunahme berechnet – handelt es sich hier um eine Bestandsabnahme. Bei 5 % Abnahme sind ja jährlich noch 95 % des Vorjahres. Wir verwenden die Formel der Zinseszinsrechnung mit
  $$K_n = K_0 \cdot q^n$$
  wobei $n = 10$ (Aufgabenstellung) und $q = \frac{100\,\% - p\,\%}{100} = \frac{95}{100} = 0{,}95$ ist. (Zur Erinnerung: In der Zinseszinsrechnung mussten wir wegen Zunahme rechnen $q = \frac{100\,\% + p\,\%}{100}$)
  $K_{10} = 600000 \cdot 0{,}95^{10} = 359242{,}16$

  Lösung umständlich:
  Aufstellung einer Tabelle wie folgt:

Jahr	Anfangsbestand	5 % Abnahme	Endbestand
2014			600000
2015	600000	30000	570000
2016	570000	28500	541500
2017	541500	27075	514425
2018	514425	25721	488704
2019	488704	24435	464269
2020	464269	23213	441056
2021	441056	22053	419003
2022	419003	20951	398052
2023	398052	19903	378149
2024	378149	18907	359242

In 2024 würden nur noch 359242 Einweg-Getränkeverpackungen verbraucht, wenn der Verbrauch jährlich um 5 % gegenüber dem Vorjahr sinken würde.

Lösung P8/2020

Lösungslogik

Zuordnung Boxplot:
Da bei beiden Boxplots Zentralwert und oberes Quartil gleich groß sind, muss lediglich das untere Quartil geprüft werden.

Ergänzung der Rangliste:
Wir bestimmen den Rangplatz für den Zentralwert und das obere Quartil und berechnen daraus die Anzahl der erforderlichen Anrufer für 8, 9 bzw. 11 Minuten Wartezeit.

Klausuraufschrieb

Zuordnung Boxplot:
Die Rangliste hat $n = 41$ Elemente.
Unteres Quartil:
$\frac{n}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25 \implies$ Das untere Quartil steht auf Platz 11 (Anrufe). Über das Balkendiagramm erhalten wir damit für $q_u = 7$.
Boxplot (B) stellt die Verteilung der Wartezeiten aus dem Diagramm dar.

Ergänzung der Rangliste:
Zentralwert:
$\frac{n}{2} = \frac{41}{2} = 20{,}25 \implies$ Der Zentralwert steht auf Platz 21, $z = 9$.
Unteres Quartil:
$\frac{n}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25 \implies$ Das untere Quartil steht auf Platz 11, $q_u = 8$.
Oberes Quartil:
$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 41 = 30{,}75 \implies$ Das obere Quartil steht auf Platz 31 $q_O = 11$.

Wir detaillieren die Rangliste in Einzelelemente (jeder 10. Rangplatz ist grau hinterlegt):

5	5	6	6	6	6	7	7	7		q_u										z									
																			q_o		12	12	12	12	13	14	15	15	16

Wir tragen den Zentralwert und die Quartile in die Tabelle ein:

5	5	6	6	6	6	7	7	7		8										9									
																			11		12	12	12	12	13	14	15	15	16

Wir ergänzen die freien Felder mit Zahlen, z. B.

5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11
																			11	11	12	12	12	12	13	14	15	15	16

Eine weitere Möglichkeit wäre, z. B.

5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10
																			11	11	12	12	12	12	13	14	15	15	16

Weitere Lösungen möglich.