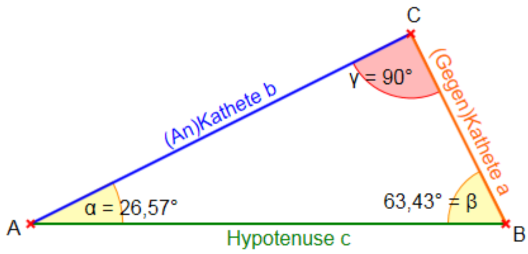
Themenerläuterung

In diesem Kapitel bekommst du Teile von Abmessungen quadratischer Pyramiden genannt, wie z. B. Höhe, Seitenhöhe, Seitenkante, Grundkante, Mantel, Oberfläche und Volumen. Aus den Teilangaben dieser Strecken und Flächen sollst du dann die anderen, nicht angegebenen Strecken bzw. Flächen errechnen.
In wenigen Fällen wird auch das Zeichnen eines Schrägbildes oder der Abwicklung einer Pyramide gefordert.

Die wichtigsten benötigten Formeln

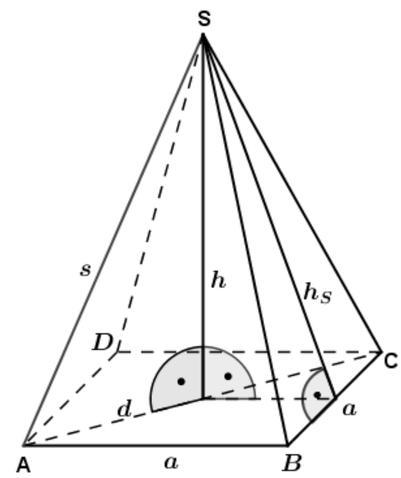
1. *Satz des Pythagoras*
   Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:
   $c^2 = a^2 + b^2$ bzw. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
   $a^2 = c^2 - b^2$ bzw. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
   $b^2 = c^2 - a^2$ bzw. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

2. *Die trigonometrischen Formeln*
   $sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$
   $cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$
   $tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
   Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.



   Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.
   Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. *Die Formeln der quadratischen Pyramide*
   3.1 Volumen, Oberfläche, Mantel
   Das Volumen der Pyramide errechnet sich aus $A = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit $G = a^2$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h die Höhe der Pyramide.
   Der Mantel der Pyramide errechnet sich aus $M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_S = 2a \cdot h_S$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h_S die Höhe eines Seitendreicks.
   Die Oberfläche der Pyramide errechnet sich aus $O = G + M$ mit $G = a^2$ und $M = 2a \cdot h_S$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h_S die Höhe eines Seitendreicks.



Powered by GEOGEBRA.org

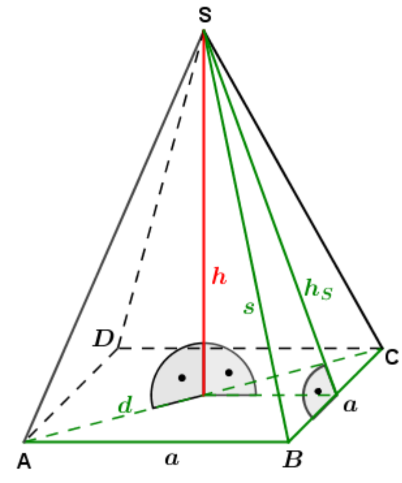
3.2 *Höhe der Pyramide*

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Höhe h ermitteln:

a) aus dem Volumen über $h = \frac{3 \cdot V}{a^2}$, a ist Seitenkante der Grundfläche.

b) über die Seitenkante s und der Diagonalen d der Grundfläche mit $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

c) über die Höhe h_S eines Seitendreicks und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



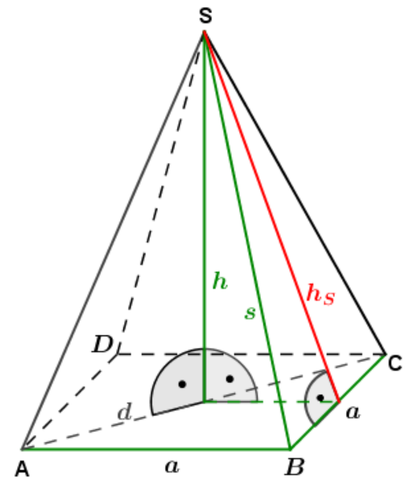
3.3 *Höhe der Seitendreiecke der Pyramide*

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Höhe h_S der Seitendreiecke ermitteln:

a) aus dem Mantel über $h_S = \frac{M}{2 \cdot a}$, a ist Seitenkante der Grundfläche.

b) über die Seitenkante s der Pyramide und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h_S = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

c) über die Höhe h der Pyramide und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h_S = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

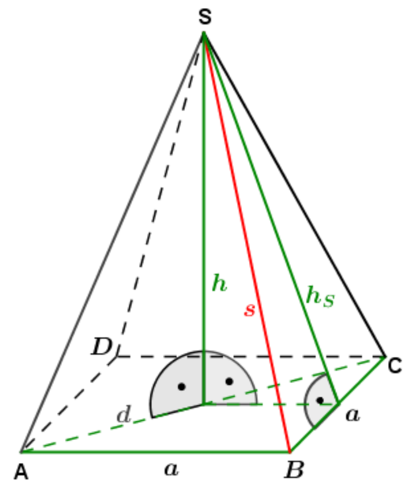


3.4 *Länge der Seitenkante der Seitendreiecke*

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Länge s der Seitenkante der Seitendreiecke ermitteln:

a) über die Höhe h der Pyramide und der Diagonalen d der Grundfläche mit $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

b) über die Höhe h_S der Seitendreiecke und der Seitenkante a der Grundfläche mit $s = \sqrt{h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



4. *Besondere Werte für* $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ und $\boldsymbol{tan}$
Einige Aufgaben sind in Abhängigkeit einer sogenannten „Formvariablen“ gestellt. Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.
In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe $30°$, $45°$, $60°$ bzw. $90°$. Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in deiner Formelsammlung.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$sin\alpha$	0	$0,5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0,5$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0,5$	0	$-0,5$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$--$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Eine quadratische Pyramide hat die Maße:

$s = 14{,}8\ cm$

$h_S = 13{,}8\ cm$

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Seitenkante mit der Grundfläche.
Das Volumen eines Würfels ist doppelt so groß wie das der Pyramide. Berechnen Sie die Oberfläche des Würfels.

Aufgabe A2

Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit

Mantelfläche $M = 82{,}7\ cm^2$

Höhe auf der Seite $h_s = 7{,}8\ cm$.

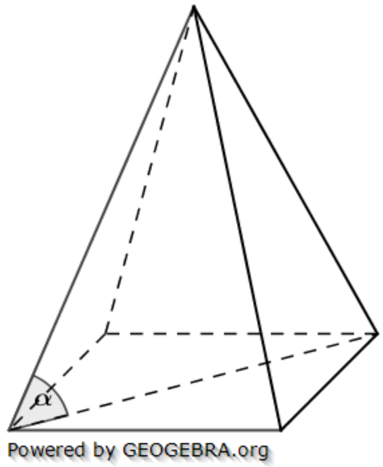
Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide maßgerecht mit Zerrwinkel $\alpha = 45°$ und Streckfaktor $k = 0{,}5$.

Aufgabe A3

Die Grundfläche einer quadratischen Pyramide ist $86{,}4\ cm^2$ groß. Der Winkel α beträgt $61{,}5°$.
Berechnen Sie die Oberfläche O.
Die Pyramide wird diagonal in zwei kongruente Pyramiden aufgeteilt. Ermitteln Sie die Oberfläche der neuen Körper.

Lösung: $O_{Pyr} = 330{,}2\ cm^2$

$O_{Diag} = 245{,}8\ cm^2$



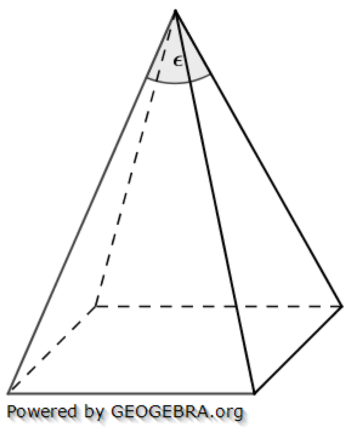
Aufgabe A4

Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit

Oberfläche $O = 754{,}1\ cm^2$

Grundkante $a = 14{,}7\ cm$

Berechnen Sie die Seitenkante s der Pyramide und den Winkel ε.



Aufgabe A5

Von einer quadratischen Pyramide kennen wir:

Volumen $V = 39{,}2\ cm^3$

Höhe $h = 5{,}1\ cm$

Zeichnen Sie das Netz der Pyramide im Maßstab 1:2.

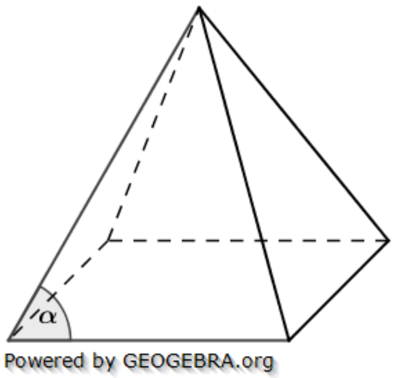
Aufgabe A6

Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit

$h_S = 3e$

$\alpha = 60\,°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für die Pyramide gilt: $V = 4e^3\sqrt{6}$.



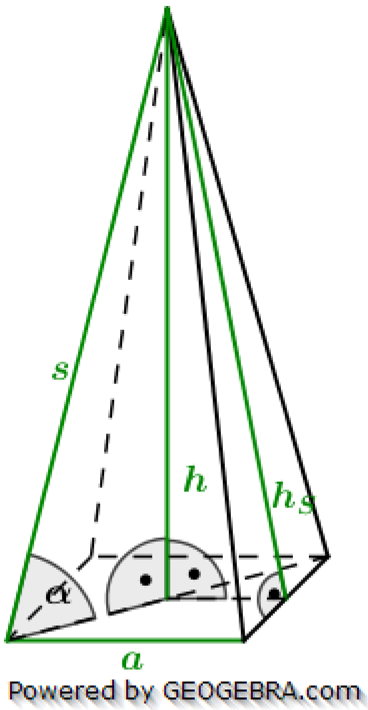
Hinweis zu den Lösungen
In den Graphiken stellen **grüne** Linien, Werte und Flächen vorgegebene Werte, **rote** Linien, Werte und Flächen gesuchte Werte und **blaue** Linien, Werte und Flächen zu ermittelnde Zwischenwerte zur Erreichung der Endergebnisse dar.

Lösung A1

Detaillierte Lösung:

Lösungsschritte:

1. Die Volumenformel der Pyramide lautet:
   $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h.$
   Du kennst hiervon weder die Grundkante a noch die Höhe h der Pyramide. Die erforderlichen Werte müssen zunächst noch aus den gegebenen Werten hergeleitet werden.
2. Berechnung von a:
   Wie du aus der Zeichnung erkennst, bildet die Seitenhöhe h_S mit der Grundkante a einen rechten Winkel. Die Seitenkante s ist also Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h_S und $\frac{a}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du also den Wert von a ermitteln. Es gilt:



$s^2 = h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad -h_S^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_S^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - h_S^2} \quad | \quad \cdot 2$

$a = 2 \cdot \sqrt{s^2 - h_S^2} \quad | \quad$ Werte einsetzen

$a = 2 \cdot \sqrt{14{,}8^2 - 13{,}8^2} = 10{,}7$

3. Berechnung von h:
   Wie du aus obiger Zeichnung erkennst, bildet die Pyramidenhöhe h mit der quadratischen Grundfläche einen rechten Winkel. Die Seitenhöhe h_S ist also Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h und $\frac{a}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du also den Wert von h ermitteln. Es gilt:

$h_S^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad -\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad | \quad$ Werte einsetzen

$h = \sqrt{13{,}8^2 - 5{,}35^2} = 12{,}7$

4. Nachdem du nun sowohl a als auch h kennst, kannst du das Volumen ausrechnen.
   $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10{,}7^2 \cdot 12{,}7 = 494{,}7.$

Die Pyramide hat ein Volumen vom etwa $495\ cm^3$.

5. Berechnung des Neigungswinkels α:
Wie du aus obiger Zeichnung erkennst, bildet die Pyramidenhöhe h mit der quadratischen Grundfläche einen rechten Winkel. Die Seitenlänge s ist nun Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h und der halben Diagonale der Grundfläche. Über den sin kannst du nun eine trigonometrische Funktion aufstellen:
$sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{12,7}{14,8} = 0,8581$
$\alpha = sin^{-1}(0,8581) = 59,1°$

Der Neigungswinkel der Pyramide beträgt also $59,1°$*.*

6. Berechnung der Oberfläche des Würfels mit doppeltem Volumen.
Der Würfel soll doppeltes Volumen haben. Also ist
$V_W = 2 \cdot V_P = 2 \cdot 495 = 990\ cm^3$.
Die Volumenformel des Würfels lautet $V_W = a^3$. Du erhältst also:
$a^3 = 990 \qquad | \quad \sqrt[3]{\ }$
$a = 9,97\ cm$
Die Oberfläche eines Würfels besteht aus 6 Quadraten mit der Kantenlänge a. Also ist die Oberfläche eines Würfels $O_W = 6 \cdot a^2$.
$O_W = 6 \cdot 9,97^2 = 596,4$

Die Oberfläche eines Würfels mit dem doppelten Volumen der Pyramide beträgt etwa $596\ cm^2$*.*

Lösung A2

Lösungslogik

Um das Schrägbild der Pyramide zeichnen zu können, benötigen wir zunächst die Kantenlänge a der Grundfläche, die nicht gegeben ist.
Nach Berechnung von a muss noch die Höhe h der Pyramide mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden.

Klausuraufschrieb

a: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_S$ | $:2;\ :h_S$

$a = \frac{M_{Pyr}}{2 \cdot h_S} = \frac{82,7}{2 \cdot 7,8} = 5,3\ cm$

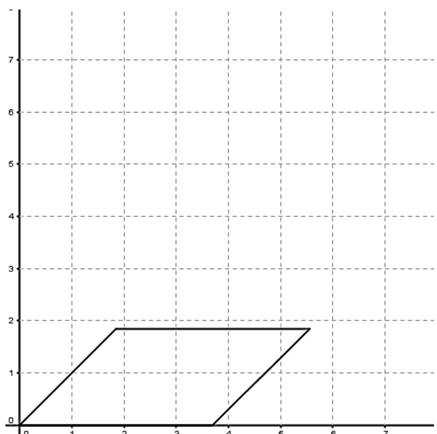
h: $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7,8^2 - 2.65^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{53,82} = 7,3\ cm$

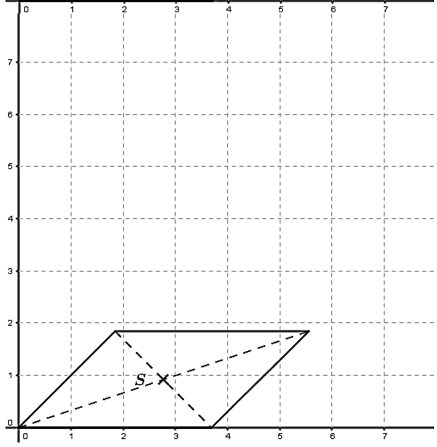
Konstruktionsbeschreibung

Zunächst zur Begriffserklärung. Ein Schrägbild ist die räumliche Darstellung eines Körpers auf einem 2-dimensionalen Zeichenblatt. In den 2 Dimensionen des Zeichenblattes „Breite" und „Höhe" werden die entsprechenden Dimensionen des Körpers im Maßstab $1:1$ gezeichnet. Es fehlt nun die „Tiefe" des Körpers. Diese Tiefe fügen wir unter einem Winkel von $45°$, dem „Zerrwinkel" mit nur den jeweils halben Längen = „Streckfaktor" der Zeichnung „Breite-Höhe" zu.

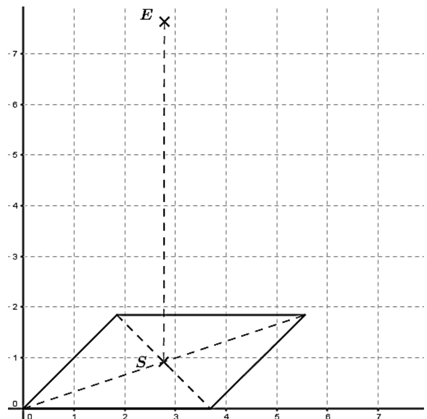
Schritt 1: Zeichne die Grundfläche der Pyramide, das Quadrat mit der Seitenlänge $a = 5,3\ cm$ als Schrägbild.



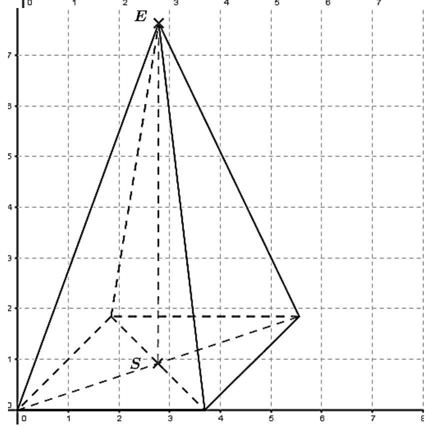
Schritt 2: Zeichne jetzt die Diagonalen der Grundfläche als Hilfslinien, der Schnittpunkt dieser Hilfslinien S ist der Mittelpunkt der Pyramide.



Schritt 3: Trage vom gefundenen Schnittpunkt S aus die errechnete Höhe $7{,}7\ cm$ senkrecht nach oben an zum Punkt E.



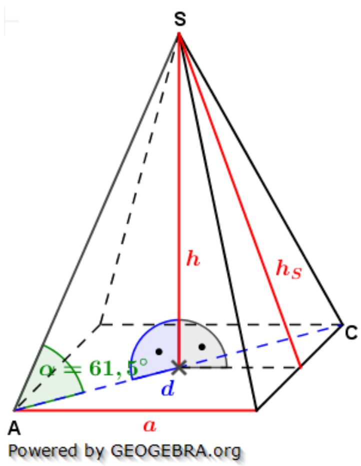
Schritt 4: Verbinde abschließend die Punkte A, B, C und D mit E.



Lösung A3

Lösungslogik

Berechnung der Kantenlänge a über die gegebene Grundfläche (Quadrat).
Berechnung der Diagonalen d der Grundfläche.
Berechnung von h über den $tan\alpha$.
Berechnung von h_S über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Oberfläche O der Pyramide.
Diagonalschnitt:
Die Oberfläche des Diagonalschnitts entspricht der Hälfte der Oberfläche der Pyramide zuzüglich der Fläche des durch den Schnitt entstehenden Mitteldreiecks ACS.



Klausuraufschrieb

a: $A_{Quadrat} = a^2 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{A_{Quadrat}} = \sqrt{86{,}4} = 9{,}3\ cm$

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 9{,}3 \cdot \sqrt{2} = 13{,}2\ cm$

h: $tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} \quad | \quad \cdot \frac{d}{2}$

$h = \frac{d}{2} \cdot tan\alpha = 6{,}6 \cdot tan61{,}5° = 12{,}2\ cm$

h_S: $h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,2^2 + 4,65^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{170,5} = 13,1\ cm$

O_{Pyr}: $O_{Pyr} = G + M = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s = 9,3^2 + 2 \cdot 9,3 \cdot 13,1 = 330,2\ cm^2$

Die Oberfläche der Pyramide beträgt $330,2\ cm^2$.

Diagonalschnitt:

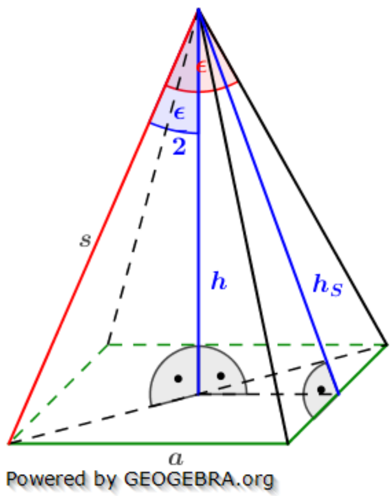
O_{Diag}: $O_{Diag} = \frac{O_{Pyr}}{2} + A_{ACS} = \frac{O_{Pyr}}{2} + \frac{1}{2} \cdot d \cdot h = \frac{330,2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 13,2 \cdot 12,2 = 245,8$

Die Oberfläche des neuen Körpers beträgt $245,8\ cm^2$.

Lösung A4

Lösungslogik

Berechnung des Mantels M der Pyramide aus der Differenz von Oberfläche und Grundfläche.
Berechnung von h_S über die Mantelformel der Pyramide.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\frac{\epsilon}{2}$ über den cos.



Klausuraufschrieb

M: $O_{Pyr} = G + M = a^2 + M$ | $-a^2$

$M = O_{Pyr} - a^2 = 754,1 - 14,7^2 = 538,0$

h_S: $M = 2 \cdot a \cdot h_S$ | $:(2a)$

$h_S = \frac{M}{2a} = \frac{538}{2 \cdot 14,7} = 18,3$

s: $s = \sqrt{h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{18,3^2 + 7,35^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{388,91} = 19,7$

Die Länge der Seitenkante beträgt $19,7\ cm$.

h: $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{18,3^2 - 7,35^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{280,87} = 16,76$

$\frac{\epsilon}{2}$: $cos\frac{\epsilon}{2} = \frac{h}{s} = \frac{16,76}{19,7} = 0,8507$

$\frac{\epsilon}{2} = cos^{-1}(0,8507) = 31,7°$

ϵ: $\epsilon = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = 2 \cdot 31,7° = 63,4°$

Der Winkel ϵ ist $63,4°$ groß.

Lösung A5

Lösungslogik

Um das Netz der Pyramide zeichnen zu können, benötigen wir zunächst die Kantenlänge a der Grundfläche, die nicht gegeben ist.
Nach Berechnung von a muss noch die Höhe h_S einer Seitenfläche der Pyramide ermittelt werden.

Klausuraufschrieb

a: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ | $\cdot 3;\ : h$

$a^2 = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{h} = \frac{3 \cdot 39{,}2}{5{,}1} = 23{,}06$ | $\sqrt{\ }$

$a = 4{,}8$

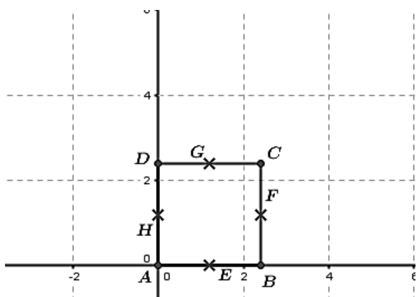
h_S: $h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5,1^2 + 2,4^2} = \sqrt{31{,}77}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = 5{,}6\ cm$

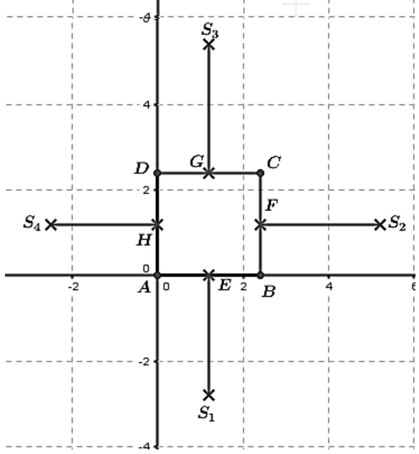
Konstruktionsbeschreibung

Zunächst zur Begriffserklärung. Ein Netz ist die Ebenen-Darstellung aller Flächen eines Körpers auf einem 2-dimensionalen Zeichenblatt. Hierzu werden die einzelnen Flächen eines Körpers an den Seitenkanten „aufgeschnitten“ und lagegerecht in einem Koordinatensystem dargestellt.

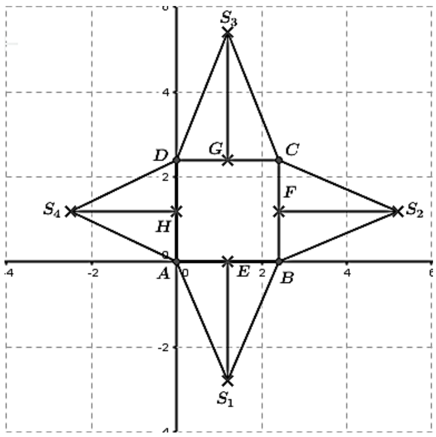
Schritt 1: Zeichne als erstes die Grundfläche, das Quadrat mit der Kantenlänge $2{,}4\ cm$ mit den Punkten A, B, C und D, halbiere die Kanten und trage dort die Hilfspunkte E, F, G und H ein.



Schritt 2: Zeichne jeweils eine Senkrechte auf die Seiten a, b, c und d beginnend bei den Punkten E, F, G und H in der Länge $2{,}8\ cm$. Bezeichne den Endpunkt der Senkrechten mit S_1, S_2, S_3 und S_4.



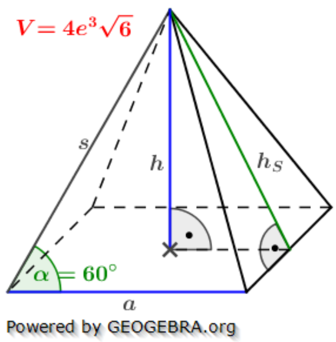
Schritt 3: Verbinde die Punkte A und B mit S_1, B und C mit S_2, C und D mit S_3 sowie D und A mit S_4. Der Netzplan ist fertig.



Lösung A6

<u>Lösungslogik</u>

Wegen des gegebenen Winkels $\alpha = 60°$ ist die Seitenfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck.
Berechnung von $s = a$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von V über die Volumenformel der Pyramide.



<u>Klausuraufschrieb</u>

a: $\quad sin\alpha = \frac{h_S}{s}$ $\quad | \quad \cdot s; \ : sin$

$\quad s = \frac{h_S}{sin\alpha} = \frac{3e}{sin60°} = \frac{3e}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}}$ $\quad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\quad s = \frac{6e\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e\cdot\sqrt{3}}{3} = 2e\sqrt{3} = a$

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(3e)^2 - \left(\frac{2e\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ $\quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$\quad h = \sqrt{9e^2 - 3e^2} = \sqrt{6e^2} = e\sqrt{6}$

V: $\quad V = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(2e\sqrt{3}\right)^2 \cdot e\sqrt{6} = \frac{12}{3}e^3 \cdot \sqrt{6}$

$\quad = 4e^3\sqrt{6}$ **q.e.d.**