Themenerläuterung

In diesem Kapitel bekommst du Teile von Abmessungen quadratischer Pyramiden genannt, wie z. B. Höhe, Seitenhöhe, Seitenkante, Grundkante, Mantel, Oberfläche und Volumen. Aus den Teilangaben dieser Strecken und Flächen sollst du dann die anderen, nicht angegebenen Strecken bzw. Flächen errechnen.
In wenigen Fällen wird auch das Zeichnen eines Schrägbildes oder der Abwicklung einer Pyramide gefordert.

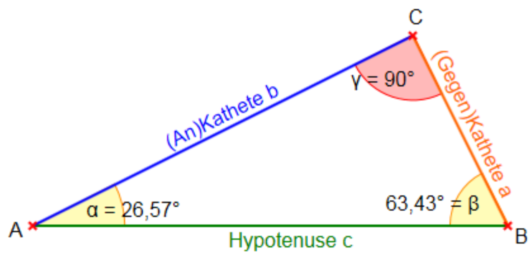
Die wichtigsten benötigten Formeln

1. *Satz des Pythagoras*
Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ bzw. } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ bzw. } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ bzw. } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

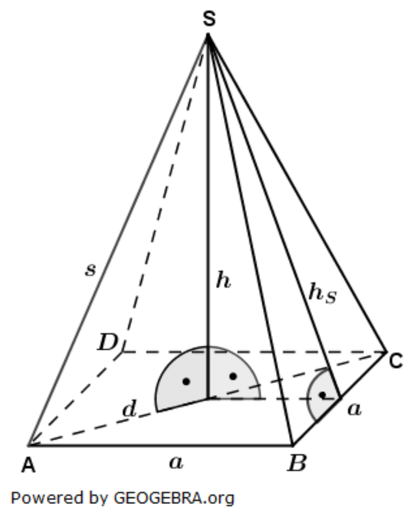
2. *Die trigonometrischen Formeln*

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$
$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$
$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$



Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.
Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.
Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. *Die Formeln der quadratischen Pyramide*
3.1 Volumen, Oberfläche, Mantel
Das Volumen der Pyramide errechnet sich aus $A = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit $G = a^2$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h die Höhe der Pyramide.
Der Mantel der Pyramide errechnet sich aus $M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_S = 2a \cdot h_S$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h_S die Höhe eines Seitendreicks.
Die Oberfläche der Pyramide errechnet sich aus $O = G + M$ mit $G = a^2$ und $M = 2a \cdot h_S$, a ist Seitenkante der Grundfläche, h_S die Höhe eines Seitendreicks.



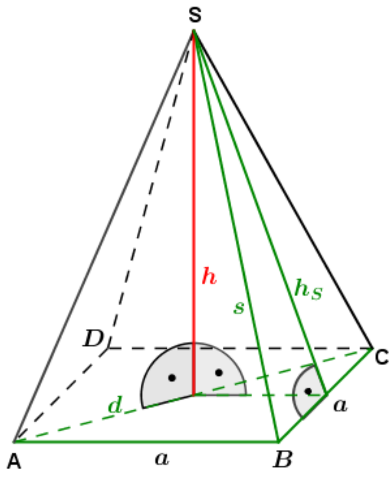
3.2 Höhe der Pyramide

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Höhe h ermitteln:

a) aus dem Volumen über $h = \frac{3 \cdot V}{a^2}$, a ist Seitenkante der Grundfläche.

b) über die Seitenkante s und der Diagonalen d der Grundfläche mit $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

c) über die Höhe h_S eines Seitendreicks und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



Powered by GEOGEBRA.org

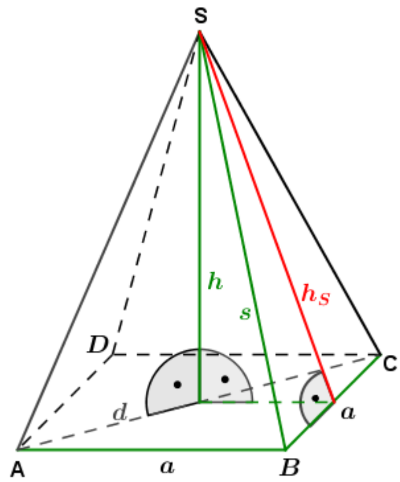
3.3 Höhe der Seitendreiecke der Pyramide

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Höhe h_S der Seitendreiecke ermitteln:

a) aus dem Mantel über $h_S = \frac{M}{2 \cdot a}$, a ist Seitenkante der Grundfläche.

b) über die Seitenkante s der Pyramide und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h_S = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

c) über die Höhe h der Pyramide und der Seitenkante a der Grundfläche mit $h_S = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



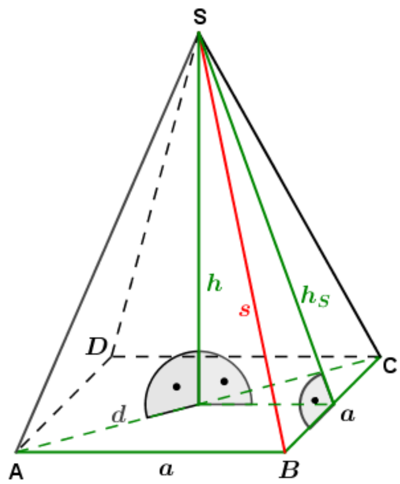
Powered by GEOGEBRA.org

3.4 Länge der Seitenkante der Seitendreiecke

Je nachdem, welche Werte vorgegeben sind, lässt sich die Länge s der Seitenkante der Seitendreiecke ermitteln:

a) über die Höhe h der Pyramide und der Diagonalen d der Grundfläche mit $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

b) über die Höhe h_S der Seitendreiecke und der Seitenkante a der Grundfläche mit $s = \sqrt{h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



Powered by GEOGEBRA.org

4. *Besondere Werte für* $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ und $\boldsymbol{tan}$

Einige Aufgaben sind in Abhängigkeit einer sogenannten „Formvariablen“ gestellt. Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.
In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe $30°$, $45°$, $60°$ bzw. $90°$. Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in deiner Formelsammlung.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$sin\alpha$	0	$0{,}5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0{,}5$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$--$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Eine quadratische Pyramide hat die Maße:

$s = 14{,}8\ cm$

$h_S = 13{,}8\ cm$

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Seitenkante mit der Grundfläche.
Das Volumen eines Würfels ist doppelt so groß wie das der Pyramide. Berechnen Sie die Oberfläche des Würfels.

Aufgabe A2

Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit

Mantelfläche $M = 82{,}7\ cm^2$

Höhe auf der Seite $h_s = 7{,}8\ cm$.

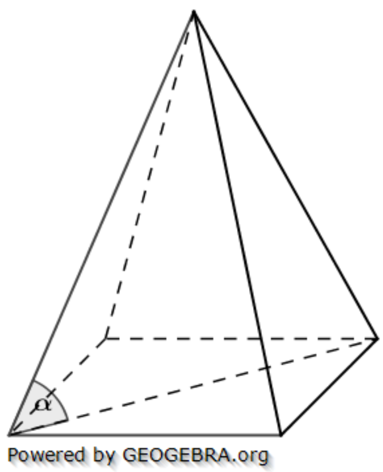
Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide maßgerecht mit Zerrwinkel $\alpha = 45°$ und Streckfaktor $k = 0{,}5$.

Aufgabe A3

Die Grundfläche einer quadratischen Pyramide ist $86{,}4\ cm^2$ groß. Der Winkel α beträgt $61{,}5°$.
Berechnen Sie die Oberfläche O.
Die Pyramide wird diagonal in zwei kongruente Pyramiden aufgeteilt. Ermitteln Sie die Oberfläche der neuen Körper.

Lösung: $O_{Pyr} = 330{,}2\ cm^2$

$O_{Diag} = 245{,}8\ cm^2$



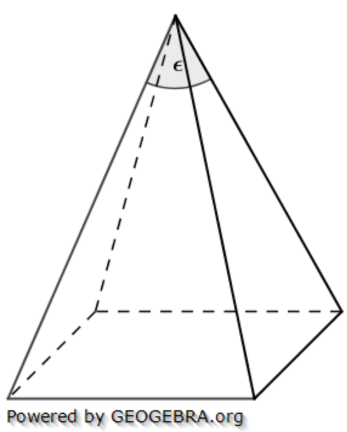
Aufgabe A4

Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit

Oberfläche $O = 754{,}1\ cm^2$

Grundkante $a = 14{,}7\ cm$

Berechnen Sie die Seitenkante s der Pyramide und den Winkel ε.



Aufgabe A5

Von einer quadratischen Pyramide kennen wir:

Volumen $V = 39{,}2\ cm^3$

Höhe $h = 5{,}1\ cm$

Zeichnen Sie das Netz der Pyramide im Maßstab 1:2.

Aufgabe A6

Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit

$h_S = 3e$

$\alpha = 60\,°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für die Pyramide gilt: $V = 4e^3\sqrt{6}$.