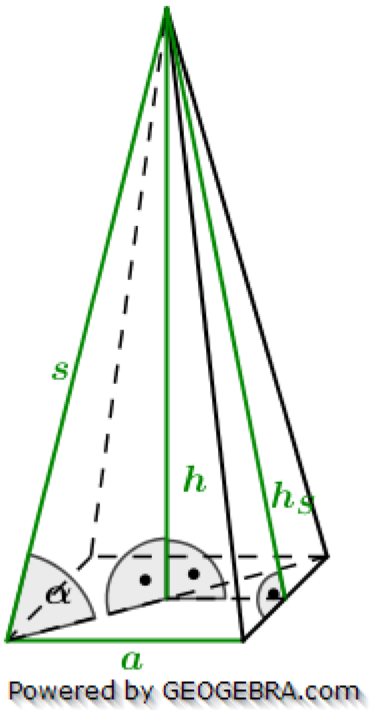
Hinweis zu den Lösungen
In den Graphiken stellen **grüne** Linien, Werte und Flächen vorgegebene Werte, **rote** Linien, Werte und Flächen gesuchte Werte und **blaue** Linien, Werte und Flächen zu ermittelnde Zwischenwerte zur Erreichung der Endergebnisse dar.

Lösung A1

Detaillierte Lösung:

Lösungsschritte:

1. Die Volumenformel der Pyramide lautet:
   $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h.$
   Du kennst hiervon weder die Grundkante a noch die Höhe h der Pyramide. Die erforderlichen Werte müssen zunächst noch aus den gegebenen Werten hergeleitet werden.
2. Berechnung von a:
   Wie du aus der Zeichnung erkennst, bildet die Seitenhöhe h_S mit der Grundkante a einen rechten Winkel. Die Seitenkante s ist also Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h_S und $\frac{a}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du also den Wert von a ermitteln. Es gilt:
   $s^2 = h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad -h_S^2$
   $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_S^2 \quad | \quad \sqrt{}$
   $\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - h_S^2} \quad | \quad \cdot 2$
   $a = 2 \cdot \sqrt{s^2 - h_S^2} \quad | \quad$ Werte einsetzen
   $a = 2 \cdot \sqrt{14{,}8^2 - 13{,}8^2} = 10{,}7$



3. Berechnung von h:
   Wie du aus obiger Zeichnung erkennst, bildet die Pyramidenhöhe h mit der quadratischen Grundfläche einen rechten Winkel. Die Seitenhöhe h_S ist also Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h und $\frac{a}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du also den Wert von h ermitteln. Es gilt:
   $h_S^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad -\left(\frac{a}{2}\right)^2$
   $h^2 = h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
   $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad | \quad$ Werte einsetzen
   $h = \sqrt{13{,}8^2 - 5{,}35^2} = 12{,}7$
4. Nachdem du nun sowohl a als auch h kennst, kannst du das Volumen ausrechnen.
   $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10{,}7^2 \cdot 12{,}7 = 494{,}7.$

Die Pyramide hat ein Volumen vom etwa $495\ cm^3$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

5. Berechnung des Neigungswinkels α:
Wie du aus obiger Zeichnung erkennst, bildet die Pyramidenhöhe h mit der quadratischen Grundfläche einen rechten Winkel. Die Seitenlänge s ist nun Hypothenuse zum rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h und der halben Diagonale der Grundfläche. Über den sin kannst du nun eine trigonometrische Funktion aufstellen:
$sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{12{,}7}{14{,}8} = 0{,}8581$
$\alpha = sin^{-1}(0{,}8581) = 59{,}1°$

Der Neigungswinkel der Pyramide beträgt also $59{,}1°$*.*

6. Berechnung der Oberfläche des Würfels mit doppeltem Volumen.
Der Würfel soll doppeltes Volumen haben. Also ist
$V_W = 2 \cdot V_P = 2 \cdot 495 = 990\ cm^3$.
Die Volumenformel des Würfels lautet $V_W = a^3$. Du erhältst also:
$a^3 = 990 \qquad | \quad \sqrt[3]{}$
$a = 9{,}97\ cm$
Die Oberfläche eines Würfels besteht aus 6 Quadraten mit der Kantenlänge a. Also ist die Oberfläche eines Würfels $O_W = 6 \cdot a^2$.
$O_W = 6 \cdot 9{,}97^2 = 596{,}4$

Die Oberfläche eines Würfels mit dem doppelten Volumen der Pyramide beträgt etwa $596\ cm^2$*.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2

Lösungslogik

Um das Schrägbild der Pyramide zeichnen zu können, benötigen wir zunächst die Kantenlänge a der Grundfläche, die nicht gegeben ist.
Nach Berechnung von a muss noch die Höhe h der Pyramide mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden.

Klausuraufschrieb

a: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_S$ | $:2;\ :h_S$

$a = \frac{M_{Pyr}}{2 \cdot h_S} = \frac{82{,}7}{2 \cdot 7{,}8} = 5{,}3\ cm$

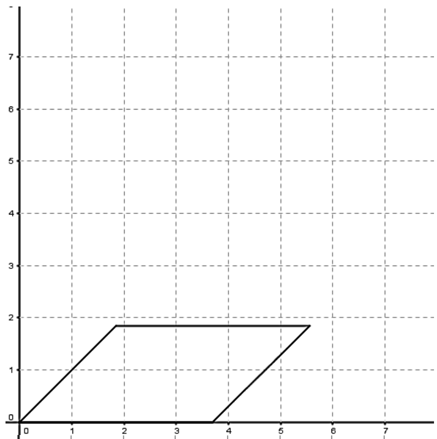
h: $h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7{,}8^2 - 2.65^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{53{,}82} = 7{,}3\ cm$

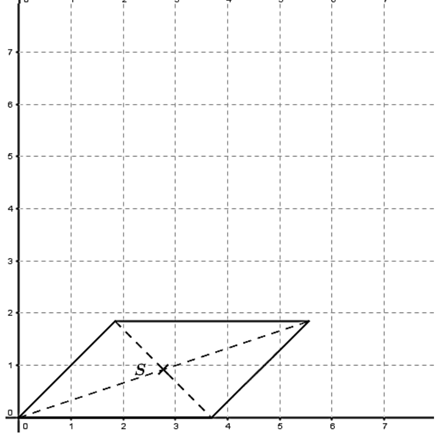
Konstruktionsbeschreibung

Zunächst zur Begriffserklärung. Ein Schrägbild ist die räumliche Darstellung eines Körpers auf einem 2-dimensionalen Zeichenblatt. In den 2 Dimensionen des Zeichenblattes „Breite“ und „Höhe“ werden die entsprechenden Dimensionen des Körpers im Maßstab $1:1$ gezeichnet. Es fehlt nun die „Tiefe“ des Körpers. Diese Tiefe fügen wir unter einem Winkel von $45°$, dem „Zerrwinkel“ mit nur den jeweils halben Längen = „Streckfaktor“ der Zeichnung „Breite-Höhe“ zu.

Schritt 1: Zeichne die Grundfläche der Pyramide, das Quadrat mit der Seitenlänge $a = 5{,}3\ cm$ als Schrägbild.

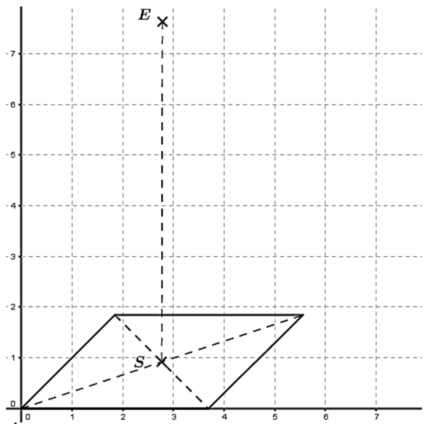


Schritt 2: Zeichne jetzt die Diagonalen der Grundfläche als Hilfslinien, der Schnittpunkt dieser Hilfslinien S ist der Mittelpunkt der Pyramide.

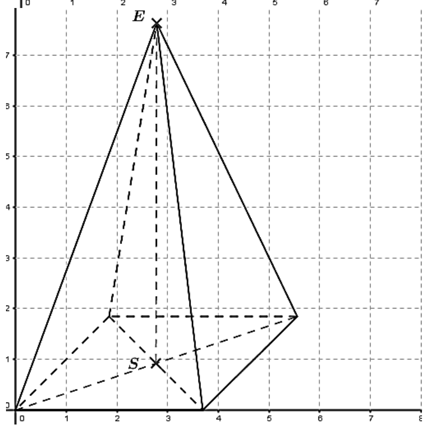


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schritt 3: Trage vom gefundenen Schnittpunkt S aus die errechnete Höhe $7{,}7\ cm$ senkrecht nach oben an zum Punkt E.



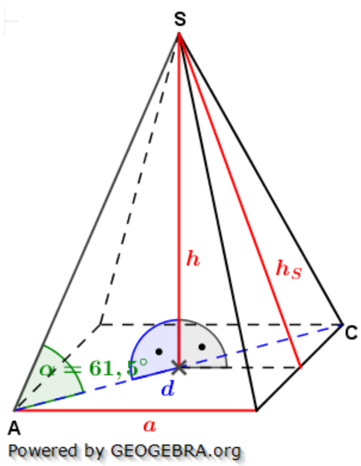
Schritt 4: Verbinde abschließend die Punkte A, B, C und D mit E.



Lösung A3

Lösungslogik

Berechnung der Kantenlänge a über die gegebene Grundfläche (Quadrat).
Berechnung der Diagonalen d der Grundfläche.
Berechnung von h über den $tan\alpha$.
Berechnung von h_S über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Oberfläche O der Pyramide.
Diagonalschnitt:
Die Oberfläche des Diagonalschnitts entspricht der Hälfte der Oberfläche der Pyramide zuzüglich der Fläche des durch den Schnitt entstehenden Mitteldreiecks ACS.



Klausuraufschrieb

a: $\quad A_{Quadrat} = a^2 \quad | \ \sqrt{\ }$

$\quad a = \sqrt{A_{Quadrat}} = \sqrt{86{,}4} = 9{,}3\ cm$

d: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} = 9{,}3 \cdot \sqrt{2} = 13{,}2\ cm$

h: $\quad tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} \quad | \ \cdot \frac{d}{2}$

$\quad h = \frac{d}{2} \cdot tan\alpha = 6{,}6 \cdot tan61{,}5° = 12{,}2\ cm$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

h_S: $\quad h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,2^2 + 4,65^2}$ | Satz des Pythagoras

$\quad h_S = \sqrt{170,5} = 13,1\ cm$

O_{Pyr}: $\quad O_{Pyr} = G + M = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s = 9,3^2 + 2 \cdot 9,3 \cdot 13,1 = 330,2\ cm^2$

Die Oberfläche der Pyramide beträgt $330,2\ cm^2$*.*

Diagonalschnitt:

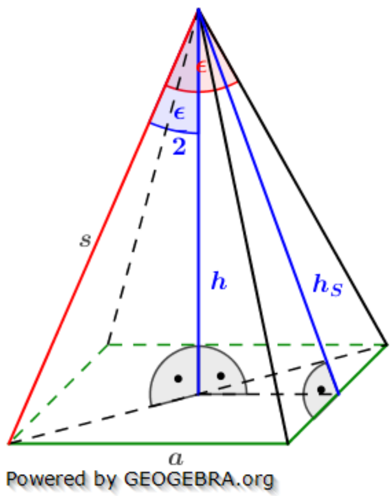
O_{Diag}: $\quad O_{Diag} = \frac{O_{Pyr}}{2} + A_{ACS} = \frac{O_{Pyr}}{2} + \frac{1}{2} \cdot d \cdot h = \frac{330,2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 13,2 \cdot 12,2 = 245,8$

Die Oberfläche des neuen Körpers beträgt $245,8\ cm^2$*.*

Lösung A4

Lösungslogik

Berechnung des Mantels M der Pyramide aus der Differenz von Oberfläche und Grundfläche.
Berechnung von h_S über die Mantelformel der Pyramide.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\frac{\epsilon}{2}$ über den cos.



Klausuraufschrieb

M: $\quad O_{Pyr} = G + M = a^2 + M$ | $-a^2$

$\quad M = O_{Pyr} - a^2 = 754,1 - 14,7^2 = 538,0$

h_S: $\quad M = 2 \cdot a \cdot h_S$ | $:(2a)$

$\quad h_S = \frac{M}{2a} = \frac{538}{2 \cdot 14,7} = 18,3$

s: $\quad s = \sqrt{h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{18,3^2 + 7,35^2}$ | Satz des Pythagoras

$\quad s = \sqrt{388,91} = 19,7$

Die Länge der Seitenkante beträgt $19,7\ cm$*.*

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{18,3^2 - 7,35^2}$ | Satz des Pythagoras

$\quad h = \sqrt{280,87} = 16,76$

$\frac{\epsilon}{2}$: $\quad cos\frac{\epsilon}{2} = \frac{h}{s} = \frac{16,76}{19,7} = 0,8507$

$\quad \frac{\epsilon}{2} = cos^{-1}(0,8507) = 31,7°$

ϵ: $\quad \epsilon = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = 2 \cdot 31,7° = 63,4°$

Der Winkel ϵ *ist* $63,4°$ *groß.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A5

Lösungslogik

Um das Netz der Pyramide zeichnen zu können, benötigen wir zunächst die Kantenlänge a der Grundfläche, die nicht gegeben ist.
Nach Berechnung von a muss noch die Höhe h_S einer Seitenfläche der Pyramide ermittelt werden.

Klausuraufschrieb

a: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \qquad | \quad \cdot 3;\ : h$

$a^2 = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{h} = \frac{3 \cdot 39{,}2}{5{,}1} = 23{,}06 \qquad | \quad \sqrt{}$

$a = 4{,}8$

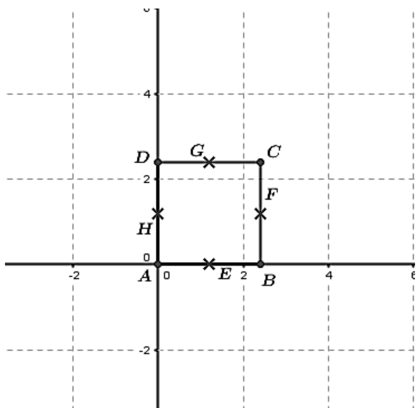
h_S: $h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5,1^2 + 2,4^2} = \sqrt{31{,}77} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$h_S = 5{,}6\ cm$

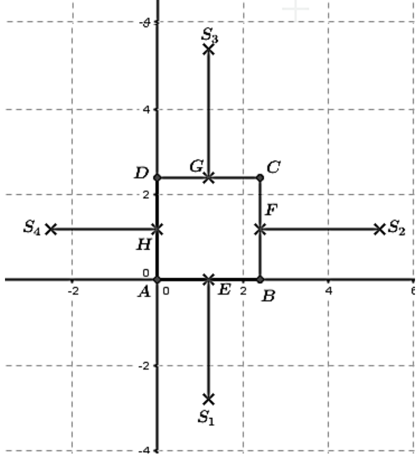
Konstruktionsbeschreibung

Zunächst zur Begriffserklärung. Ein Netz ist die Ebenen-Darstellung aller Flächen eines Körpers auf einem 2-dimensionalen Zeichenblatt. Hierzu werden die einzelnen Flächen eines Körpers an den Seitenkanten „aufgeschnitten" und lagegerecht in einem Koordinatensystem dargestellt.

Schritt 1: Zeichne als erstes die Grundfläche, das Quadrat mit der Kantenlänge $2{,}4\ cm$ mit den Punkten A, B, C und D, halbiere die Kanten und trage dort die Hilfspunkte E, F, G und H ein.

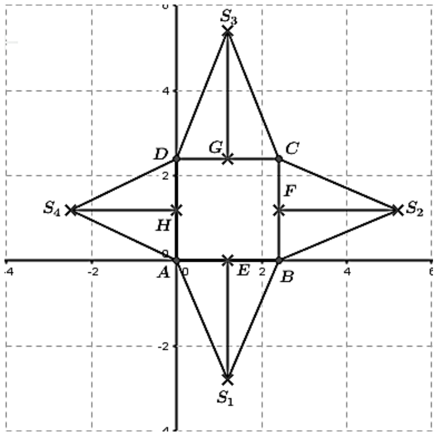


Schritt 2: Zeichne jeweils eine Senkrechte auf die Seiten a, b, c und d beginnend bei den Punkten E, F, G und H in der Länge $2{,}8\ cm$. Bezeichne den Endpunkt der Senkrechten mit S_1, S_2, S_3 und S_4.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

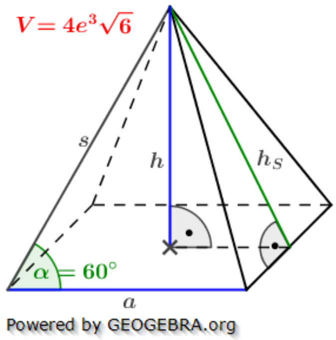
Schritt 3: Verbinde die Punkte A und B mit S_1, B und C mit S_2, C und D mit S_3 sowie D und A mit S_4. Der Netzplan ist fertig.



Lösung A6

Lösungslogik

Wegen des gegebenen Winkels $\alpha = 60°$ ist die Seitenfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck.
Berechnung von $s = a$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von V über die Volumenformel der Pyramide.



Klausuraufschrieb

a: $\quad sin\alpha = \frac{h_S}{s}$ $\quad | \quad \cdot s;\ : sin\alpha$

$\quad s = \frac{h_S}{sin\alpha} = \frac{3e}{sin60°} = \frac{3e}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}}$ $\quad | \quad \cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\quad s = \frac{6e\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e\cdot\sqrt{3}}{3} = 2e\sqrt{3} = a$

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(3e)^2 - \left(\frac{2e\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ $\quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$\quad h = \sqrt{9e^2 - 3e^2} = \sqrt{6e^2} = e\sqrt{6}$

V: $\quad V = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(2e\sqrt{3}\right)^2 \cdot e\sqrt{6} = \frac{12}{3}e^3\cdot\sqrt{6}$

$\quad = 4e^3\sqrt{6}$ **q.e.d.**