

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013  
5 Aufgaben im Dokument



## Aufgabe W1a/2005

Für die quadratische Pyramide gilt:

$$\overline{AB} = 5,6 \text{ cm}$$

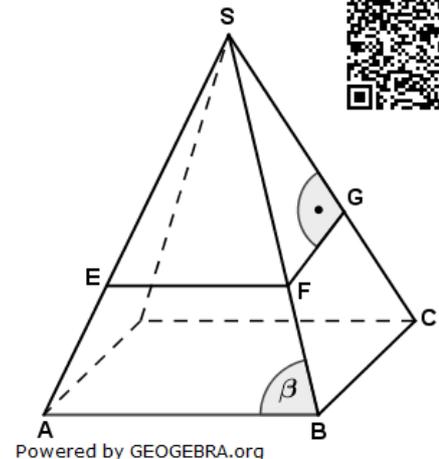
$$\beta = 65,0^\circ.$$

$$\overline{AE} = \overline{BF} = 3,0 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Länge  $\overline{GF}$  sowie den  
Flächeninhalt des Vierecks  $BCGF$ .

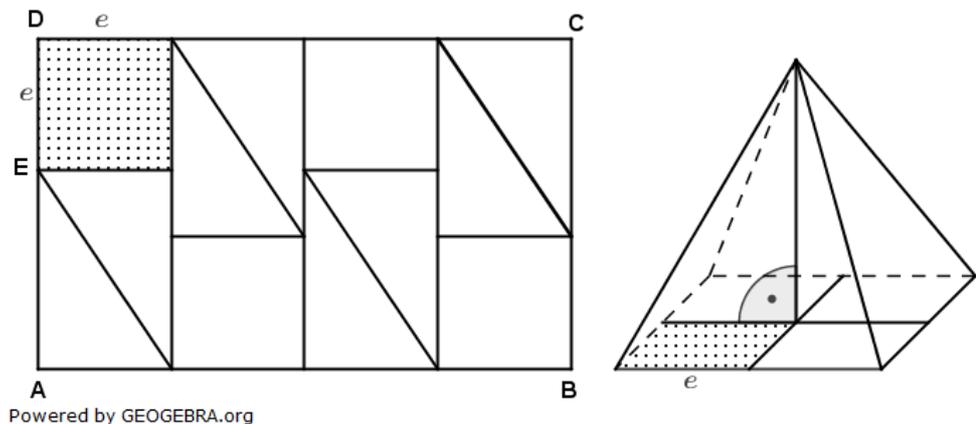
Lösung:  $\overline{FG} = 2,8 \text{ cm}$

$$A_{BCGF} = 13,6 \text{ cm}^2$$



## Aufgabe W4a/2006

Mit den Einzelteilen des Rechtecks  $ABCD$  wird die Oberfläche der quadratischen Pyramide vollständig beklebt.



Es gilt:

$$A_{ABCD} = 96 \text{ cm}^2 \quad (\text{Flächeninhalt des Vierecks } ABCD)$$

$$\overline{DE} = e = 3,0 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Länge  $\overline{AE}$ , das Volumen der quadratischen Pyramide und den  
Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche.

Lösung:  $\overline{AE} = 5 \text{ cm}$  ;  $V = 48 \text{ cm}^3$   $\alpha = 43,3^\circ$

## Aufgabe W2a/2008

Von einer quadratischen Pyramide sind  
bekannt:

$$a = 7,6 \text{ cm}$$

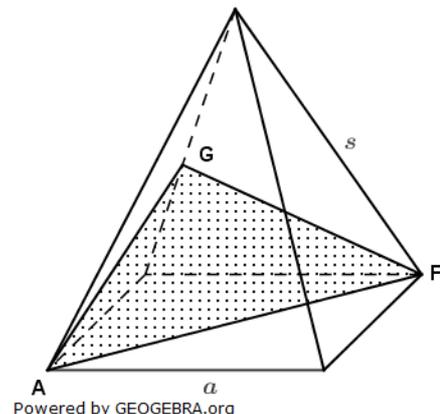
$$s = 10,2 \text{ cm}.$$

Der Punkt  $G$  halbiert die Seitenkante  $s$ .

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks  $AFG$ .

Lösung:  $u_{AFG} = 25,6 \text{ cm}$

**Tipp:** Kosinussatz für die Strecke  $\overline{AG} = \overline{FG}$ .



# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013

## Aufgabe W4b/2008

Das regelmäßige Sechseck hat die Seitenlänge  $\frac{3}{2}e$ .

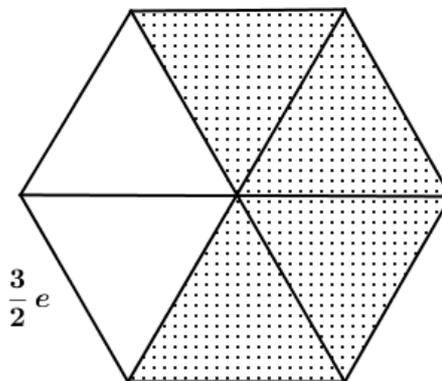
Die vier grau eingefärbten Dreiecke bilden die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide.

Berechnen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von  $e$ .

Der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Pyramide wird mit  $\varphi$  bezeichnet.

Zeigen Sie, dass gilt:  $\tan \varphi = \sqrt{2}$ .

$$\text{Lösung: } V = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$$



Powered by GEOGEBRA.org

## Aufgabe W2b/2012

Gegeben ist eine quadratische Pyramide.

Es gilt:

$$V = 400 \text{ cm}^3 \text{ (Volumen der Pyramide)}$$

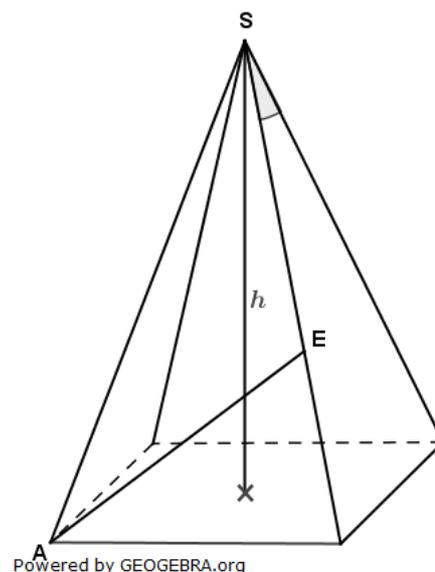
$$h = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AE} = \overline{ES}$$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $E$  von der Grundfläche.

$$\text{Lösung: } d = 3,9 \text{ cm}$$

**Tipp:** Sinussatz für die Strecke  $\overline{ES}$ .



Powered by GEOGEBRA.org

### Lösung W1a/2005

#### Lösungslogik

Für die Strecke  $\overline{FG}$  :

Berechnung des Spitzenwinkels  $\epsilon$  über die Ergänzungswinkel.

Berechnung von  $s$  über den  $\cos\beta$  .

Berechnung von  $\overline{FS}$  aus der Differenz von  $s$  und  $\overline{BF}$ .

Berechnung von  $\alpha$  über die Ergänzungswinkel.

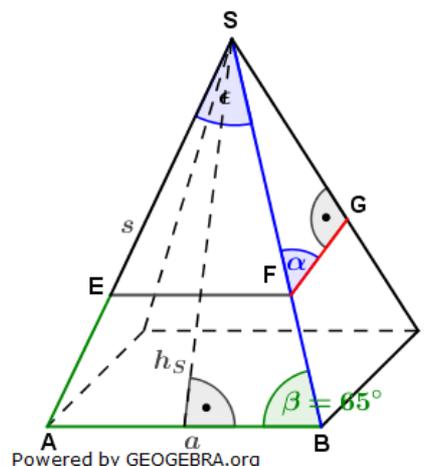
Berechnung von  $\overline{FG}$  über den  $\cos\alpha$ .

Für die Fläche  $BCGF$ :

Berechnung der Seitenfläche der Pyramide über die trigonometrische Flächenformel.

Berechnung der Fläche des Dreiecks  $FGS$  über die trigonometrische Flächenformel.

Berechnung der Fläche  $BCGF$  über die Differenz aus Seitenfläche Pyramide und Fläche des Dreiecks  $FGS$ .



#### Klausuraufschrieb

$$\epsilon: \quad \epsilon = 180^\circ - 2 \cdot \beta = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$$

$$s: \quad \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{s} \quad | \quad \cdot s; : \cos\beta$$

$$s = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\beta} = \frac{2,8}{\cos 65^\circ} = 6,63$$

$$\overline{FS}: \quad \overline{FS} = s - \overline{BF} = 6,63 - 3,0 = 3,63$$

$$\alpha: \quad \alpha = 180^\circ - \epsilon - 90^\circ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\overline{FG} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{FS}} \quad | \quad \cdot \overline{FS}$$

$$\overline{FG} = \overline{FS} \cdot \cos\alpha = 3,63 \cdot \cos 40^\circ = 2,78$$

Die Strecke  $\overline{FG}$  ist 2,8 cm lang.

$$A_{ABS}: \quad A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 6,63^2 \cdot \sin 50^\circ \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$= 16,84$$

$$A_{FGS}: \quad A_{FGS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FG} \cdot \sin 40^\circ \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3,63 \cdot 2,8 \cdot \sin 40^\circ = 3,27$$

$$A_{BCGF}: \quad A_{BCGF} = A_{ABS} - A_{FGS} = 16,84 - 3,27 = 13,57$$

Die Fläche des Vierecks  $BCGF$  beträgt  $13,6 \text{ cm}^2$ .

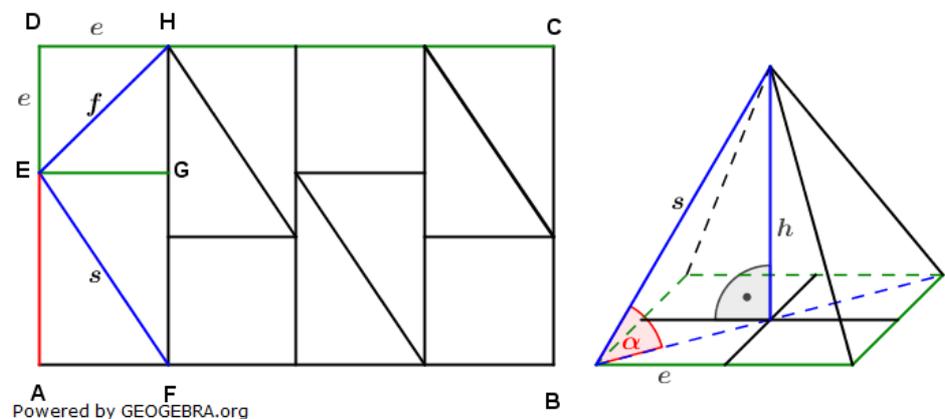
# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013

Lösung W4a/2006

Lösungslogik



Für die Strecke  $\overline{AE}$ :

Berechnung der Strecke  $\overline{AE}$  über die Flächenformel für das Rechteck  $ABCD$ .

Für das Volumen der Pyramide:

Berechnung von  $s = \overline{EF}$  über den Satz des Pythagoras.

Berechnung der Diagonalen  $f$  des Quadrats  $EGHD$ .

Berechnung von  $h$  der Pyramide über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Volumens der Pyramide über die Volumenformel.

Für den Neigungswinkel  $\alpha$ :

Berechnung von  $\alpha$  über den  $\sin$ .

## Klausuraufschrieb

$$\overline{AE}: \quad \begin{array}{l} A_{ABCD} = 4e \cdot (\overline{AE} + e) \\ \overline{AE} = \frac{A_{ABCD}}{4e} - e = \frac{96}{4 \cdot 3} - 3 = 5 \end{array} \quad | \quad :4e; -e$$

Die Strecke  $\overline{AE}$  ist 5 cm lang.

$$s: \quad \begin{array}{l} s^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \\ s = 5,83 \end{array} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$f: \quad \begin{array}{l} f^2 = 2e^2 = 18 \\ f = 4,24 \end{array} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h: \quad \begin{array}{l} h^2 = s^2 - f^2 = 34 - 18 = 16 \\ h = 4 \end{array} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$V: \quad V = \frac{1}{3} \cdot (2e)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$$

Das Volumen der Pyramide beträgt  $48 \text{ cm}^3$ .

$$\alpha: \quad \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{h}{s} = \frac{4}{5,83} = 0,6861 \\ \alpha = \sin^{-1}(0,6861) = 43,32^\circ \end{array}$$

Der Neigungswinkel  $\alpha$  hat  $43,3^\circ$ .

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013

## Lösung W2a/2008

### Lösungslogik

Wegen „G halbiert die Seitenkante s“, ist  $\overline{AG} = \overline{FG}$  und  $\overline{GS} = 0,5 \cdot s$ .

Berechnung von  $\gamma_1$  über den  $\sin$ .

Berechnung von  $\gamma$ .

Berechnung des Neigungswinkels  $\overline{AF}$  über die Flächendiagonale der Grundfläche.

Berechnung von  $\overline{AG} = \overline{FG}$  über den Kosinussatz.

Berechnung des Umfangs des Dreiecks AFG.

### Klausuraufschrieb

$$u_{AFG} = \overline{AF} + \overline{AG} + \overline{GF} = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{AG}$$

$$\gamma_1 \quad \sin \gamma_1 = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{s} = \frac{3,8}{10,2} = 0,3725$$

$$\gamma_1 = \sin^{-1}(0,3725) = 21,87^\circ$$

$$\gamma: \quad \gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 43,74^\circ$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = a \cdot \sqrt{2} = 7,6 \cdot \sqrt{2} = 10,75$$

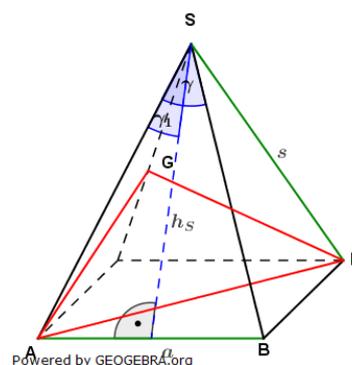
$$\overline{AG}: \quad \overline{AG}^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot \cos \gamma$$

$$= 10,2^2 + 5,1^2 - 2 \cdot 10,2 \cdot 5,1 \cdot \cos 43,74^\circ$$

$$\overline{AG} = \sqrt{54,88} = 7,41$$

$$u_{AFG}: \quad u_{AFG} = 10,75 + 2 \cdot 7,41 = 25,57$$

Der Umfang des Dreiecks AFG beträgt 25,6 cm.



Kosinussatz

$\sqrt{\quad}$

## Lösung W4b/2008

### Lösungslogik

Wegen des regelmäßigen Sechsecks sind die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge  $s = a = \frac{3}{2}e$ . Für das Volumen der Pyramide benötigen wir die Pyramidenhöhe  $h$ .

Berechnung von  $\frac{d}{2}$  über die Diagonale der quadratischen Grundfläche.

Berechnung von  $h$  über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Volumens und Aufstellung von  $\tan \alpha$ .

### Klausuraufschrieb

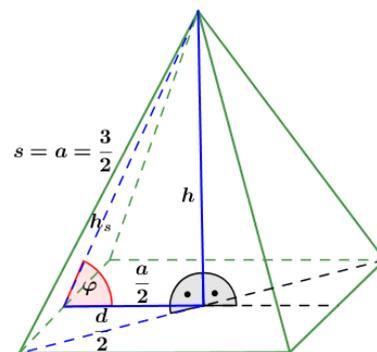
$$\frac{d}{2}: \quad d = a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}e \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$

$$h: \quad h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}e\right)^2 - \left(\frac{3}{4}e\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{16}e^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{18}{8}e^2 - \frac{9}{8}e^2} = \sqrt{\frac{9}{8}e^2}$$

$$h = \frac{3e}{\sqrt{8}} = \frac{3e}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \frac{3e}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3e \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$



Diagonale im Quadrat

Satz des Pythagoras

$\sqrt{\quad}$

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013

$$V_{Pyr}: \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}e\right)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2} = \frac{27}{48}e^3\sqrt{2} = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

$$\tan\varphi: \quad \tan\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{2}e} = \sqrt{2} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

## Lösung W2b/2012

### Lösungslogik

Berechnung von  $a$  über das gegebene Volumen.

Berechnung der Diagonalen  $e$  der Grundfläche.

Berechnung von  $s$  über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von  $\frac{\gamma}{2}$  über den  $\sin$ .

Berechnung von  $\gamma$ .

Berechnung von  $\alpha$  als Ergänzungswinkel im Dreieck  $AES$ .

Berechnung von  $\overline{ES}$  über den Sinussatz.

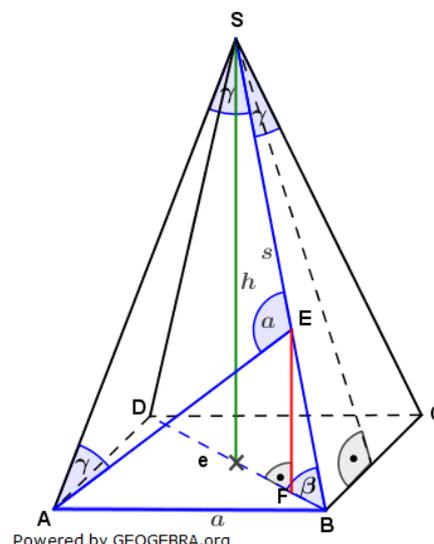
Berechnung von  $\overline{BE}$  als Differenz von  $s$  und  $\overline{ES}$ .

Berechnung von  $\overline{EF}$  über den 2. Strahlensatz.

Alternativ:

Berechnung von  $\beta$  über den  $\tan$ .

Berechnung von  $\overline{EF}$  über den  $\sin$ .



### Klausuraufschrieb

$$a: \quad V_{Pyramide} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h \quad | \quad \cdot 3; : h; \sqrt{\quad}$$

$$a = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 400}{12}} = 10$$

$$e: \quad e = a\sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14$$

$$s: \quad s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 7,07^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = 13,93$$

$$\frac{\gamma}{2}: \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{5}{13,93} = 0,3589$$

$$\frac{\gamma}{2} = \sin^{-1}(0,3589) = 21,03^\circ$$

$$\gamma: \quad \gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 2 \cdot 21,03^\circ = 42,06^\circ$$

$$\alpha: \quad \alpha = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 42,06^\circ = 95,88^\circ$$

$$\overline{ES}: \quad \frac{\overline{ES}}{\sin\gamma} = \frac{s}{\sin\alpha} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$\overline{ES} = \frac{s}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{13,93}{\sin 96^\circ} \cdot \sin 42^\circ = 9,37$$

$$\overline{BE}: \quad \overline{BE} = s - \overline{ES} = 13,93 - 9,37 = 4,56$$

$$\overline{EF}: \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} = \frac{h}{s} \quad | \quad \text{2. Strahlensatz}$$

$$\overline{EF} = \frac{h}{s} \cdot \overline{BE} = \frac{12}{13,93} \cdot 4,56 = 3,93$$

Der Abstand des Punktes E von der Grundfläche beträgt 3,9 cm.

# RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

## zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2005-2013

Alternativ:

$$\beta: \quad \tan\beta = \frac{h}{\frac{e}{2}} = \frac{12}{7,07} = 1,6973$$

$$\beta = \tan^{-1}(1,6973) = 59,5^\circ$$

$$\overline{EF}: \quad \sin\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} \quad | \quad \cdot \overline{BE}$$

$$\overline{EF} = \overline{BE} \cdot \sin\beta = 4,56 \cdot \sin 59,5^\circ = 3,92$$