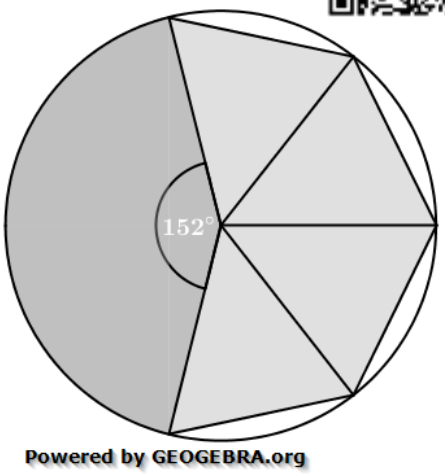
Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020
5 Aufgaben im Dokument

Aufgabe W2b/2014

Aus einer Kreisfläche werden die Mantelflächen einer quadratischen Pyramide und eines Kegels ausgeschnitten. Der Kreis hat den Radius $r = 20\ cm$.
Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.

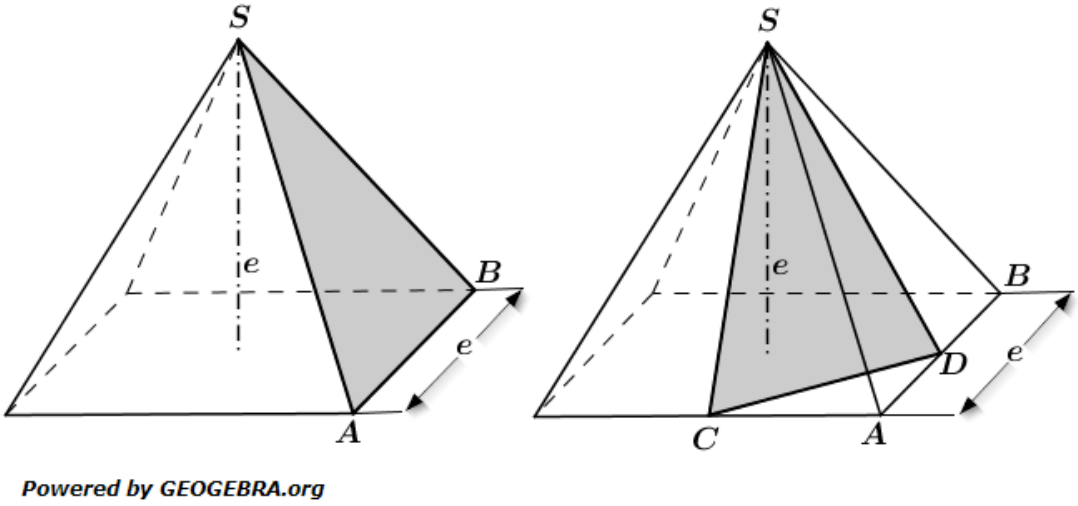


Lösung: $h_{Pyr} = 15{,}7\ cm$
$h_{Keg} = 18{,}1\ cm$
$\Delta h = 2{,}4 cm$

Tipp: Kosinussatz für Pyramidenkante a.

Aufgabe W2b/2016

Eine quadratische Pyramide ist zweimal abgebildet. In der linken Abbildung ist das Dreieck ABS markiert und in der rechten das Dreieck CDS.
Die Punkte C und D halbieren jeweils die Grundkante.



Welche der folgenden Formeln gehört zur Dreiecksfläche ABS und welche zur Dreiecksfläche CDS? Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Verwendung gerundeter Werte.

(1) $A = \frac{3e^2}{8}$ (2) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{6}$ (3) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{5}$

Lösung: Formel (3) für Dreieck ABS
Formel (1) für Dreieck CDS

Aufgabe W2b/2017

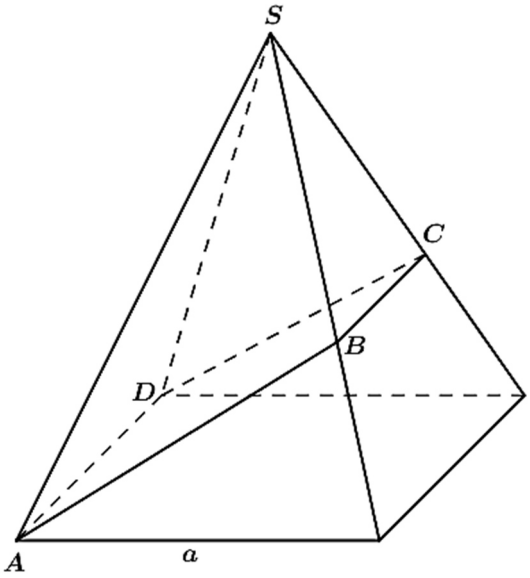
Die Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes ABCD liegen auf den Kanten bzw. Eckpunkten einer quadratischen Pyramide.

Es gilt:

$O_{Pyr} = 357\ cm^2$
$a = 10{,}0\ cm$
$\overline{AB} = \overline{BS}$

Berechnen Sie den Umfang des Trapezes $ABCD$.

Tipp: Sinussatz für Strecke $\overline{AB}$,
2. Strahlensatz für Strecke $\overline{BC}$.



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2018

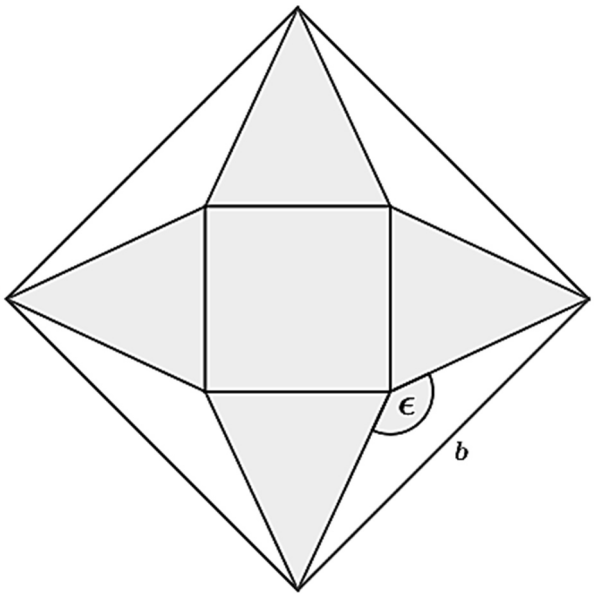
Aus einem quadratischen Blatt Papier wird das Netz einer quadratischen Pyramide hergestellt.

Es gilt:

$b = 20\ cm$
$\epsilon = 140\ °$

Berechnen Sie die Höhe der quadratischen Pyramide.

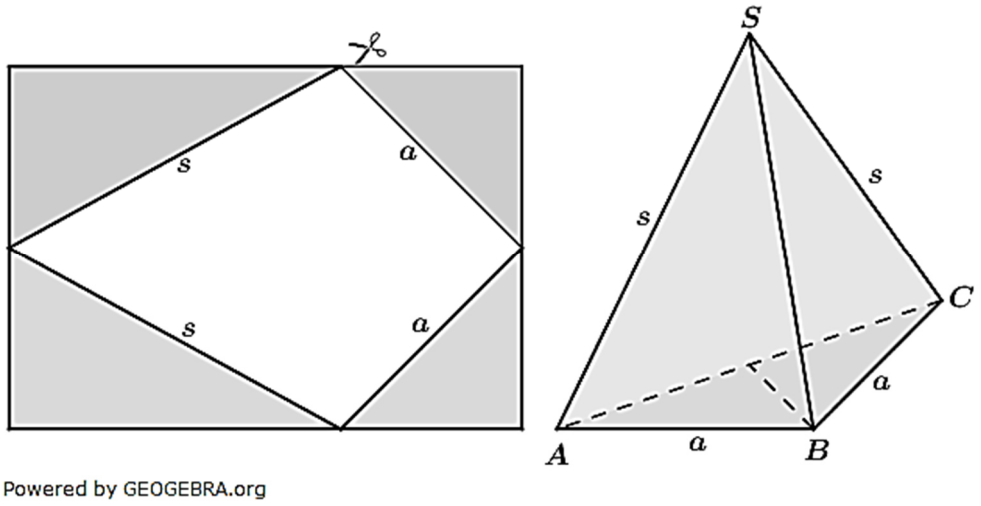
Lösung: $h_{Pyr} = 8{,}5\ cm$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2020

Von einem DIN-A4-Blatt ($21{,}0\ cm\ x\ 29{,}7\ cm$) werden die vier eingefärbten Dreiecke abgeschnitten.
Mit diesen vier Dreiecken werden die Diagonalschnittfläche und die Grundfläche einer halben massiven Pyramide vollständig beklebt.



Lena behauptet: „Die beiden Manteldreiecke ABS und BCS haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die Restfläche des DIN-A4-Blatts."
Hat Lena recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Lösung: Lena hat nicht recht.

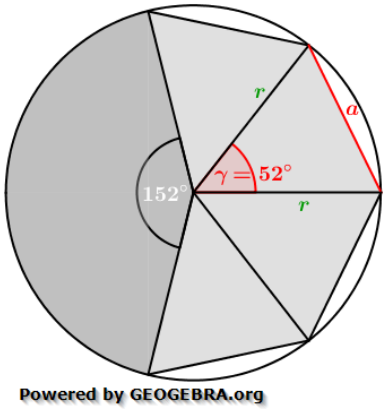
$$A_{ABS} = A_{BCS} = 152{,}88\ cm^2$$
$$A_{ABS} + A_{BCS} = 305{,}76\ cm^2$$
$$A_{Rest} = 311{,}85\ cm^2$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W2b/2014

Lösungslogik

Die quadratische Pyramide hat die Seitenkante $s = r$. Der Spitzenwinkel eines Seitendreiecks berechnet sich aus $\gamma = \frac{360°-152°}{4}$.
Über den Kosinussatz können wir nun die Länge der Seitenkante a ermitteln. Die Höhe der Pyramide errechnet sich dann mithilfe des Satz des Pythagoras über die Seitenkante s und der halben Diagonale der quadratischen Grundfläche.
Der Kegelmantel hat einen Öffnungswinkel von $152\,°$. Der Kreisbogen dieses Öffnungswinkels errechnet sich aus $b = \frac{360°}{152°} \cdot r$, diese Bogenlänge wird zum Kreisumfang des Grundkreises des Kegels. Hieraus lässt sich r_{Keg} errechnen. Die Höhe des Kegels bestimmt sich dann über den Satz des Pythagoras aus $s = r$ und r_{Keg}.



Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = \frac{360°-152°}{4} = 52°$

a: $a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$a^2 = 400 + 400 - 800 \cdot cos52° = 307{,}47$ | $\sqrt{}$

$a = 17{,}53$

d_{Pyr}: $d_{Pyr} = a \cdot \sqrt{2} = 17{,}53 \cdot \sqrt{2} = 24{,}798$

h_{Pyr}: $h_{Pyr}^2 = s^2 - \left(\frac{d_{Pyr}}{2}\right)^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{400 - 153{,}7354} = 15{,}6928$

Die Höhe der Pyramide ist etwa $15{,}7\ cm$ *lang.*

b: $b = \frac{152°}{360°} \cdot 2\pi r = 53{,}06$

r_{Keg}: $2\pi \cdot r_{Keg} = b$

$r_{Keg} = \frac{b}{2\pi} = \frac{53{,}06}{2\pi} = 8{,}44$

h_{Keg}: $h_{Keg}^2 = s^2 - r_{Keg}^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{20^2 - 8{,}44^2} = 18{,}13$

Die Höhe des Kegels ist etwa $18{,}1\ cm$ *lang.*

Δh: $\Delta h = h_{Keg} - h_{Pyr} = 18{,}1 - 15{,}7 = 2{,}4$

Die Differenz der Körperhöhen beträgt $2{,}4\ cm$.

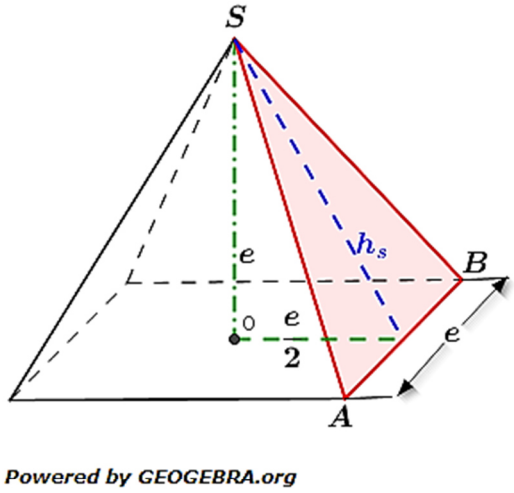
Lösung W2b/2016

Lösungslogik

Linke Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

Wir berechnen h_s über den Satz des Pythagoras. Danach kann die Fläche angegeben werden.

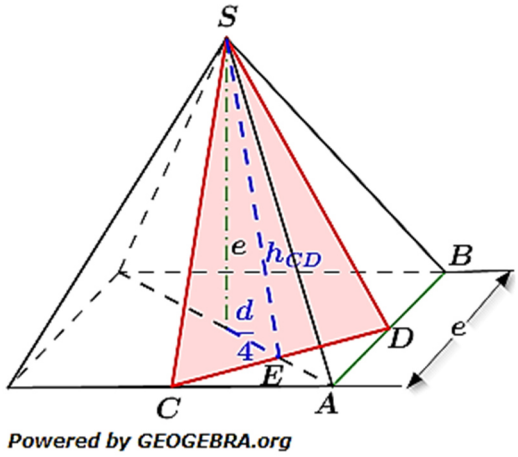


Rechte Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

Wir ermitteln $\overline{CD}$ über den Satz des Pythagoras und den beiden bekannten Strecken $\overline{CA} = \overline{AD} = \frac{e}{2}$.

h_{CD} lässt sich ebenfalls über den Satz des Pythagoras ermitteln, hierzu benötigen wir aber zuerst die Länge der Diagonalen der Grundfläche, den die Strecke vom Fußpunkt der Höhe e zum Punkt E (siehe Grafik) entspricht einem Viertel der Diagonalen d.



Klausuraufschrieb

Dreieck ABS:

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$

h_S: $\quad h_S = \sqrt{e^2 + \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{5e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5}$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{e^2}{4} \cdot \sqrt{5}$

Formel (3) gehört zum Dreieck ABS.

Dreieck CDS:

$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$

$\overline{CD}$: $\quad \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2}$ | Satz des Pythagoras

d: $\quad d = \sqrt{e^2 + e^2} = e\sqrt{2}$ | Satz des Pythagoras

h_{CD}: $\quad h_{CD} = \sqrt{e^2 + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{e^2 + \frac{2e^2}{16}} = \sqrt{\frac{18e^2}{16}}$ | Satz des Pythagoras

$= \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9} = \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2}$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2} = \frac{6e^2}{16} = \frac{3e^2}{8}$

Formel (1) gehört zum Dreieck CDS.

Lösung W2b/2017

Lösungslogik

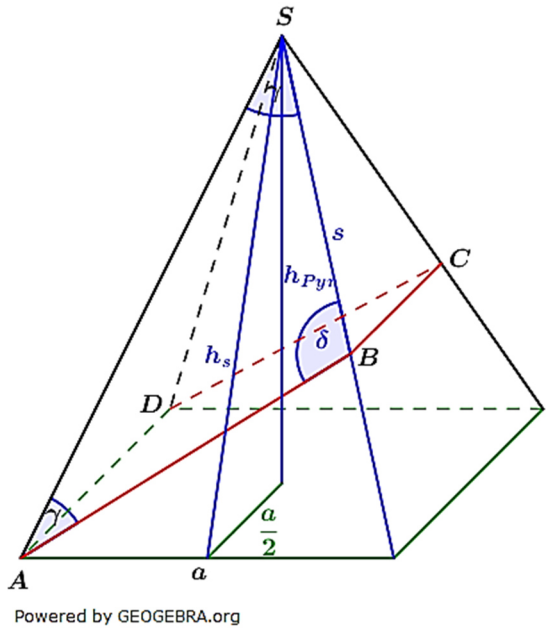
Der Umfang des Trapezes $ABCD$ ist:

$$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$$

Um $\overline{AB}$ berechnen zu können, benötigen wir die Winkel γ und δ.

Der Winkel γ ist der Spitzenwinkel einer Seitenfläche. Er kann ermittelt werden über $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, hierzu benötigen wir aber die Höhe h_s der Seitenfläche. Diese können wir allerdings über $\frac{1}{4}$ des Mantels der Pyramide berechnen. Die Oberfläche ist gegeben, wir subtrahieren davon die Grundfläche (Quadrat mit $a = 10\,cm$) und dividieren das Ergebnis durch 4.

Über die Flächenformel eines Dreiecks kann nun h_s berechnet werden und daraus dann der Winkel γ. Wegen $\overline{AB} = \overline{BS}$ ist das Dreieck ABS gleichschenklig und somit der Winkel $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma$.



Mit Hilfe des Sinussatzes können wir nun die Strecke $\overline{AB}$ berechnen, sofern uns noch die Länge einer Seitenkante s bekannt ist. Diese ist über den Satz des Pythagoras aus den bekannten Strecken $\frac{a}{2}$ und h_s ermittelbar.

Es fehlt uns jetzt lediglich noch die Länge der Strecke $\overline{BC}$. Diese kann am einfachsten über dem zweiten Strahlensatzberechnet werden, denn die Strecke $\overline{BC}$ verläuft parallel zur Grundkante a. Somit gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s} \;=>\; \overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s}$$

Klausuraufschrieb

Gesucht: $u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a = 10\,cm$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{s}{\sin(\delta)}$ | Sinussatz

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)}$

γ: $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a}{2 \cdot h_s}$

h_s: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4} \cdot M_{Pyr}$

$h_s = \frac{M_{Pyr}}{2a}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = O_{Pyr} - G_{Pyr} = 357 - 100 = 257$

$h_s = \frac{257}{2 \cdot 10} = 12{,}85$

$tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{10}{2 \cdot 12{,}85} = 0{,}3891$

$\frac{\gamma}{2} = tan^{-1}(0{,}3891) = 21{,}26\,°$

$\gamma = 42{,}52\,°$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 180° - 2 \cdot 42{,}52 = 94{,}96\,°$

s: $s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}85^2 + 5^2} = 13{,}79$

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{13{,}79 \cdot \sin(42{,}52\,°)}{\sin(94{,}96\,°)} = 9{,}35$

$\overline{BC}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s}$ | 2. Strahlensatz

$\overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s} = 9{,}35 \cdot \frac{10}{13{,}79} = 6{,}78$

$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$u = 10 + 2 \cdot 9{,}35 + 6{,}78 = 35{,}48$

Das Trapez $ABCD$ hat einen Umfang von 35,5 cm.

Lösung W2b/2018

Lösungslogik

Die Höhe einer quadratischen Pyramide errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras über:

$$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

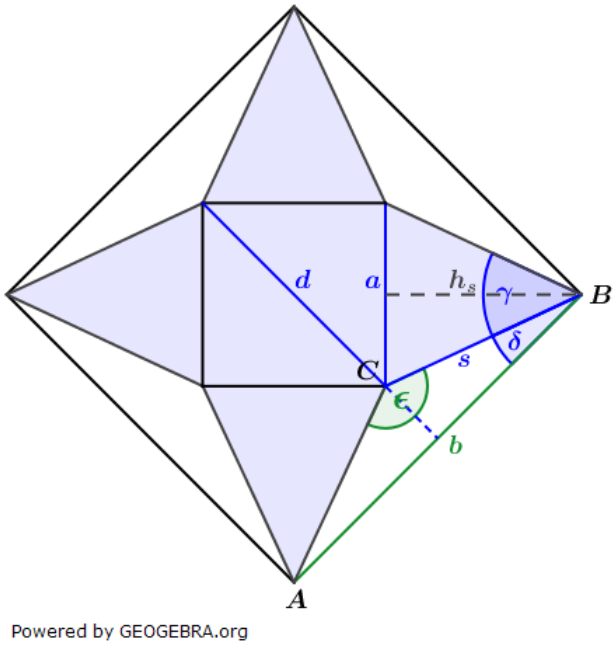
bzw.

$$h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Wir müssen also h_s, d und a bestimmen.

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, der Spitzenwinkel ϵ gegeben. Hieraus berechnen wir δ und den Spitzenwinkel des Seitendreiecks der Pyramide γ.

Über den $cos\,(\delta)$ können wir die Seitenkante s eines Seitendreiecks der Pyramide ermitteln. Über $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ berechnen wir a und daraus wiederum d.



Klausuraufschrieb

Gesucht: $h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ alternativ $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

δ: $\delta = \frac{180\,° - \epsilon}{2}$ | Dreieck ABC ist gleichschenklig

γ: $2 \cdot \delta + \gamma = 90\,°$

$\gamma = 90\,° - 2 \cdot \delta = 90\,° - 40\,° = 50\,°$

s: $\cos(\delta) = \frac{\frac{b}{2}}{s}$

$s = \frac{\frac{b}{2}}{\cos(\delta)} = \frac{10}{\cos(20\,°)} = 10{,}64$

a: $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s}$

$a = 2 \cdot s \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 10{,}64 \cdot \sin(25°) = 8{,}99$

d: $d = a \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale im Quadrat (Formelsammlung)

$d = 8{,}99 \cdot \sqrt{2} = 12{,}72$

alternativ

h_s: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 4{,}495^2} = 9{,}64$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 6{,}36^2} = 8{,}53$

alternativ

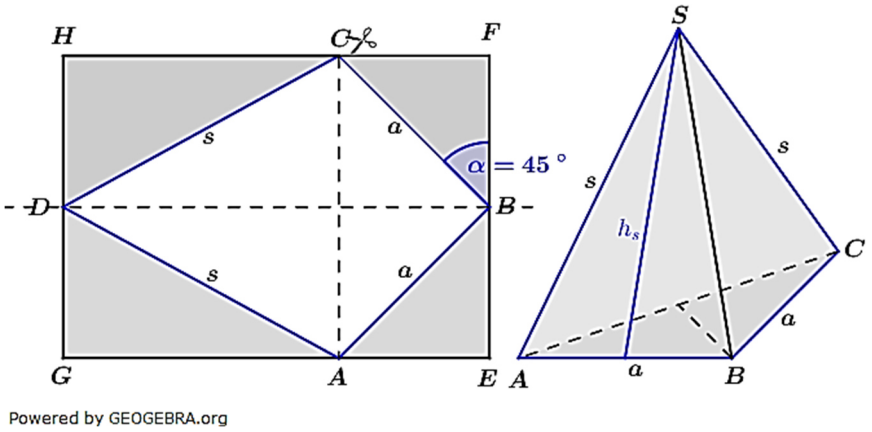
$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}64^2 - 4{,}495^2} = 8{,}53$

Die Höhe der Pyramide beträgt $8{,}5\ cm$.

Lösung W2b/2020

Lösungslogik

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation.



Um die Fläche der beiden Seitendreiecke ABS und BCS berechnen zu können, benötigen wir die Länge von Grundkante a sowie die Höhe der Seitenfläche h_s der quadratischen Pyramide.

Für h_s benötigen wir zusätzlich noch die Länge der Seitenkante s.

Sowohl a als auch s lassen sich aus dem Schnitt des DIN-A4-Blattes ermitteln. So bilden ja die beiden Dreiecke AEB und BFC die halbe Grundfläche der quadratischen Pyramide. Damit ist bei den Punkten B und D jeweils ein Winkel von $45\,°$. Die Strecke $\overline{BF}$ z. B. halbiert ja die Breite des DIIN-A4-Blatts, ist also $10{,}5\ cm$ lang. Damit ist auch die Strecke $\overline{CF}$ $10{,}5\ cm$ lang. a lässt sich somit über den Satz des Pythagoras berechnen.

Wegen der Höhe des DINA-A4-Blatts von $29{,}7\ cm$ ist die Strecke $\overline{HC}$ $19{,}2\ cm$ lang. Die Strecke $\overline{DH}$ ist wiederum $10{,}5\ cm$ lang. Somit lässt sich s über den Satz des Pythagoras berechnen.

Nachdem s und bekannt sind, können wir die Restfläche des DIN-A4-Blatts berechnen, indem wir von der Gesamtfläche $29{,}7 \cdot 21$ die Flächen des Dreiecks AEB sowie DCH jeweils zwei Mal abziehen.

Verbleibt noch die Berechnung von h_s der Seitendreiecke der Pyramide. Über s und $\frac{a}{2}$ können wir diese mit dem Satz des Pythagoras berechnen und erhalten damit die Fläche der Seitendreiecke.

<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{BF}$: $\overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5$

$\overline{CF}$: $\overline{CF} = \overline{BF} = 10{,}5$

a: $a = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2}$ | Satz des Pythagoras

$a = \sqrt{10{,}5^2 + 10{,}5^2} = 14{,}85$

$\overline{HC}$: $\overline{HC} = 29{,}7 - \overline{BF} = 29{,}7 - 10{,}5 = 19{,}2$

$\overline{DH}$: $\overline{DH} = \overline{BF} = 10{,}5$

s: $s = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{DH}^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{19{,}2^2 + 10{,}5^2} = 21{,}89$

Fläche Dreieck BFC:

$A_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 10{,}5 \cdot 10{,}5 = 55{,}125$

Fläche Dreieck DHC:

$A_{DHC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \cdot 19{,}2 \cdot 10{,}5 = 100{,}8$

Fläche DIN-A4-Blatt

$A_{A4} = 29{,}7 \cdot 21 = 623{,}7$

Restfläche:

$A_{Rest} = A_{A4} - 2 \cdot (A_{BFC} + A_{DHC}) = 623{,}7 - 2 \cdot (55{,}125 + 100{,}8) = 311{,}85$

Seitenflächen Pyramide:

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

h_s: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{21{,}89^2 - 7{,}425^2} = 20{,}59$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 14{,}85 \cdot 20{,}59 = 152{,}88$

Summe A_{ABS} und A_{BCS}:

$A_{ABS} + A_{BCS} = 2 \cdot A_{ABS} = 2 \cdot 152{,}88 = 305{,}76$

Wegen $A_{Rest} \neq 2 \cdot A_{ABS}$ hat Lena nicht recht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de