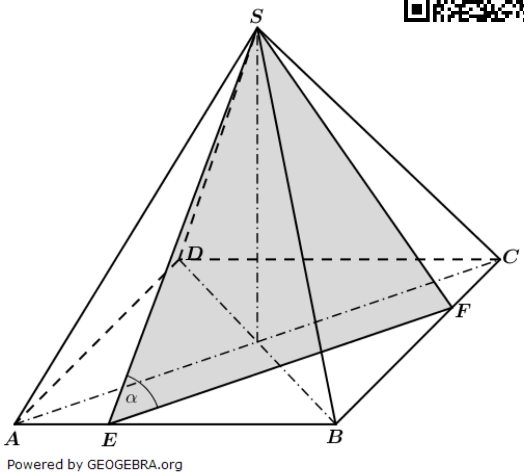
Aufgabe B2a/2021

In einer quadratischen Pyramide liegt das Dreieck EFS.
Es gilt:

$\overline{AB} = \overline{EF} = 12{,}6\ cm$
$\alpha = 72\,°$
$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EFS.
- Berechnen Sie das Volumen der quadratischen Pyramide.

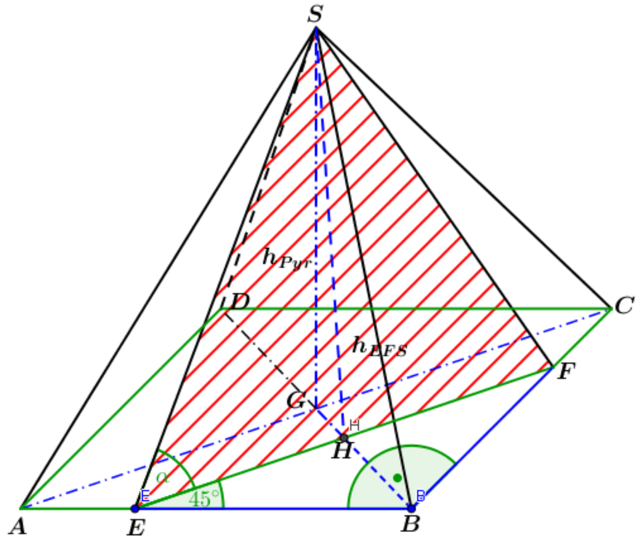
Lösung: $A_{EFS} = 122{,}2\ cm^2$
$V_{Pyr} = 1017\ cm^3$



Lösung B2a/2021

Lösungslogik

Fläche des Dreiecks EFS:
Die Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks ist gegeben. Wir benötigen lediglich noch die Höhe h_{EFS}. Diese kann über den $\tan(\alpha)$ errechnet werden.



Volumen der Pyramide:
Zur Berechnung des Volumens benötigen wir die Höhe der Pyramide h_{Pyr}. Nachdem wir ja h_{EFS} kennen, benötigen wir noch die Strecke $\overline{GH}$, um über den Satz des Pythagoras die Höhe h_{Pyr} berechnen zu können.
Für $\overline{GH}$ benötigen wir zunächst die halbe Diagonale $\overline{GH}$ des Quadrates. Subtrahieren wir von $\overline{GH}$ die Strecke $\overline{HB}$, erhalten wir $\overline{GH}$.
$\overline{HB}$ ist jedoch die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks EBF. Diese Höhe lässt sich über den $tan\ (45\ °)$ errechnen.

Klausuraufschrieb

Fläche des Dreiecks EFS:

$A_{EFS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_{EFS}$

h_{EFS}: $\quad tan\ (\alpha) = \frac{h_{EFS}}{\overline{EH}} \quad | \cdot \overline{EH}$

$\quad h_{EFS} = \overline{EH} \cdot tan(\alpha) = 6{,}3 \cdot tan(72°) = 19{,}4$

A_{EFS}: $\quad A_{EFS} = \frac{1}{2} \cdot 12{,}6 \cdot 19{,}4 = 122{,}22$

Das Dreieck EFS ist $122{,}2\ cm^2$ groß.

Volumen der Pyramide:

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{pyr}$

G: $\quad G = \overline{AB}^2 = 12{,}6^2 = 158{,}76$

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} = 12{,}6 \cdot \sqrt{2} = 17{,}82$

$\overline{GB}$: $\quad \overline{GB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} = 8{,}91$

$\overline{HB}$: $\quad ta\,n(45\ °) = \frac{\overline{HB}}{\overline{EH}} \quad | \cdot \overline{EH}$

$\quad \overline{HB} = \overline{EH} \cdot \tan(45°) = 6{,}3 \cdot 1 = 6{,}3$

$\overline{GH}$: $\quad \overline{GH} = \overline{GB} - \overline{HB} = 8{,}91 - 6{,}3 = 2{,}61$

h_{Pyr}: $\quad h_{Pyr} = \sqrt{h_{EFS}^2 - \overline{GH}^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\quad h_{Pyr} = \sqrt{19{,}4^2 - 2{,}61^2} = 19{,}22$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 158{,}76 \cdot 19{,}22 = 1017{,}1$

Das Volumen der Pyramide beträgt etwa $1017\ cm^3$.