

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

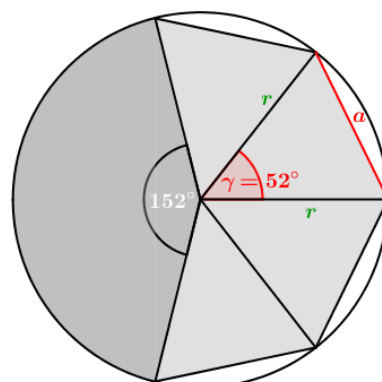
Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

Lösung W2b/2014

Lösungslogik

Die quadratische Pyramide hat die Seitenkante $s = r$. Der Spitzenwinkel eines Seitendreiecks berechnet sich aus $\gamma = \frac{360^\circ - 152^\circ}{4}$.

Über den Kosinussatz können wir nun die Länge der Seitenkante a ermitteln. Die Höhe der Pyramide errechnet sich dann mithilfe des Satz des Pythagoras über die Seitenkante s und der halben Diagonale der quadratischen Grundfläche. Der Kegelmantel hat einen Öffnungswinkel von 152° . Der Kreisbogen dieses Öffnungswinkels errechnet sich aus $b = \frac{360^\circ}{152^\circ} \cdot r$, diese Bogenlänge wird zum Kreisumfang des Grundkreises des Kegels. Hieraus lässt sich r_{Keg} errechnen. Die Höhe des Kegels bestimmt sich dann über den Satz des Pythagoras aus $s = r$ und r_{Keg} .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{360^\circ - 152^\circ}{4} = 52^\circ$$

$$a: \quad \begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos \gamma \\ a^2 &= 400 + 400 - 800 \cdot \cos 52^\circ = 307,47 \\ a &= 17,53 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} | \text{ Kosinussatz} \\ | \sqrt{} \end{array}$$

$$d_{pyr}: \quad d_{pyr} = a \cdot \sqrt{2} = 17,53 \cdot \sqrt{2} = 24,798$$

$$h_{pyr}: \quad \begin{aligned} h_{pyr}^2 &= s^2 - \left(\frac{d_{pyr}}{2}\right)^2 \\ h_{pyr} &= \sqrt{400 - 153,7354} = 15,6928 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} | \text{ Satz des Pythagoras} \end{array}$$

Die Höhe der Pyramide ist etwa 15,7 cm lang.

$$b: \quad b = \frac{152^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = 53,06$$

$$r_{Keg}: \quad \begin{aligned} 2\pi \cdot r_{Keg} &= b \\ r_{Keg} &= \frac{b}{2\pi} = \frac{53,06}{2\pi} = 8,44 \end{aligned}$$

$$h_{Keg}: \quad \begin{aligned} h_{Keg}^2 &= s^2 - r_{Keg}^2 \\ h_{Keg} &= \sqrt{20^2 - 8,44^2} = 18,13 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} | \text{ Satz des Pythagoras} \end{array}$$

Die Höhe des Kegels ist etwa 18,1 cm lang.

$$\Delta h: \quad \Delta h = h_{Keg} - h_{pyr} = 18,1 - 15,7 = 2,4$$

Die Differenz der Körperhöhen beträgt 2,4 cm.

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

Lösung W2b/2016

Lösungslogik

Linke Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

Wir berechnen h_s über den Satz des Pythagoras. Danach kann die Fläche angegeben werden.

Rechte Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

Wir ermitteln $\overline{CD}$ über den Satz des Pythagoras und den beiden bekannten Strecken $\overline{CA} = \overline{AD} = \frac{e}{2}$.

h_{CD} lässt sich ebenfalls über den Satz des Pythagoras ermitteln, hierzu benötigen wir aber zuerst die Länge der Diagonalen der Grundfläche, den die Strecke vom Fußpunkt der Höhe e zum Punkt E (siehe Grafik) entspricht einem Viertel der Diagonalen d .

Klausuraufschrieb

Dreieck ABS :

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

$$h_s: \quad h_s = \sqrt{e^2 + \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{5e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{e^2}{4} \cdot \sqrt{5}$$

Formel (3) gehört zum Dreieck ABS .

Dreieck CDS :

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

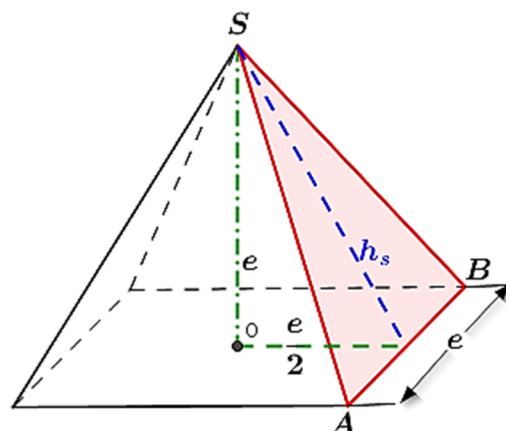
$$\overline{CD}: \quad \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d: \quad d = \sqrt{e^2 + e^2} = e\sqrt{2}$$

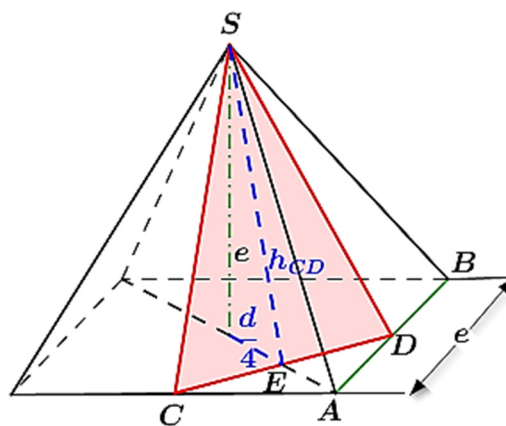
$$h_{CD}: \quad h_{CD} = \sqrt{e^2 + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{e^2 + \frac{2e^2}{16}} = \sqrt{\frac{18e^2}{16}} = \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9} = \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2} = \frac{6e^2}{16} = \frac{3e^2}{8}$$

Formel (1) gehört zum Dreieck CDS .



Powered by GEOGEBRA.org



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung W2b/2017

Lösungslogik

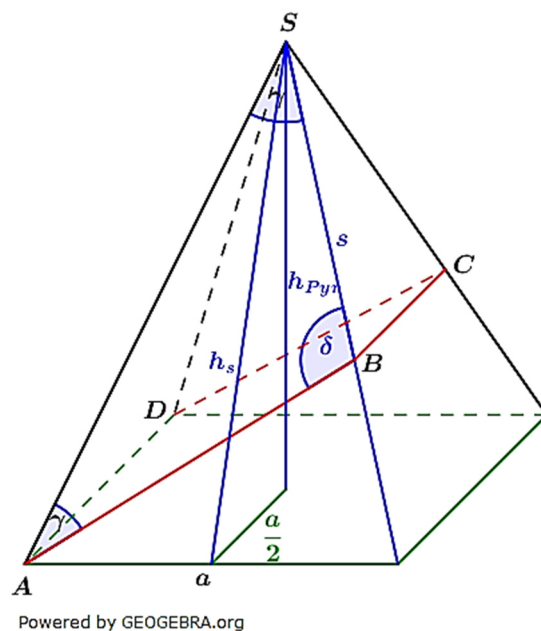
Der Umfang des Trapezes $ABCD$ ist:

$$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$$

Um $\overline{AB}$ berechnen zu können, benötigen wir die Winkel γ und δ .

Der Winkel γ ist der Spitzenwinkel einer Seitenfläche. Er kann ermittelt werden über $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, hierzu benötigen wir aber die Höhe h_s der Seitenfläche. Diese können wir allerdings über $\frac{1}{4}$ des Mantels der Pyramide berechnen. Die Oberfläche ist gegeben, wir subtrahieren davon die Grundfläche (Quadrat mit $a = 10 \text{ cm}$) und dividieren das Ergebnis durch 4.

Über die Flächenformel eines Dreiecks kann nun h_s berechnet werden und daraus dann der Winkel γ . Wegen $\overline{AB} = \overline{BS}$ ist das Dreieck ABS gleichschenkelig und somit der Winkel $\delta = 180^\circ - 2 \cdot \gamma$.



Mit Hilfe des Sinussatzes können wir nun die Strecke $\overline{AB}$ berechnen, sofern uns noch die Länge einer Seitenkante s bekannt ist. Diese ist über den Satz des Pythagoras aus den bekannten Strecken $\frac{a}{2}$ und h_s ermittelbar.

Es fehlt uns jetzt lediglich noch die Länge der Strecke $\overline{BC}$. Diese kann am einfachsten über dem zweiten Strahlensatz berechnet werden, denn die Strecke $\overline{BC}$ verläuft parallel zur Grundkante a . Somit gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s}$$

Klausuraufschrieb

Gesucht: $u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{s}{\sin(\delta)}$ | Sinussatz
 $\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)}$

γ : $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a}{2 \cdot h_s}$

h_s : $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4} \cdot M_{pyr}$
 $h_s = \frac{M_{pyr}}{2a}$

M_{pyr} : $M_{pyr} = O_{pyr} - G_{pyr} = 357 - 100 = 257$

$h_s = \frac{257}{2 \cdot 10} = 12,85$

$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{10}{2 \cdot 12,85} = 0,3891$

$\frac{\gamma}{2} = \tan^{-1}(0,3891) = 21,26^\circ$

$\gamma = 42,52^\circ$

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

$$\delta: \quad \delta = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 42,52 = 94,96^\circ$$

$$s: \quad s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,85^2 + 5^2} = 13,79$$

$$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{13,79 \cdot \sin(42,52^\circ)}{\sin(94,96^\circ)} = 9,35$$

$$\overline{BC}: \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s} \quad | \quad 2. \text{ Strahlensatz}$$

$$\overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s} = 9,35 \cdot \frac{10}{13,79} = 6,78$$

$$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$u = 10 + 2 \cdot 9,35 + 6,78 = 35,48$$

Das Trapez ABCD hat einen Umfang von 35,5 cm.

Lösung W2b/2018

Lösungslogik

Die Höhe einer quadratischen Pyramide errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras über:

$$h_{pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

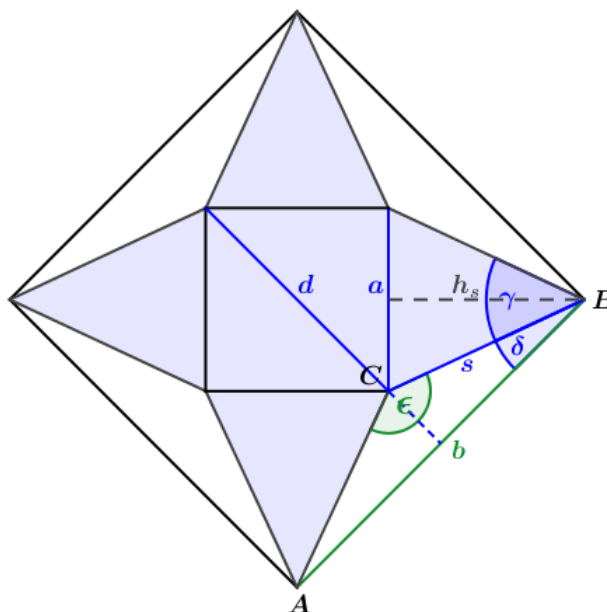
bzw.

$$h_{pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Wir müssen also h_s , d und a bestimmen.

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, der Spitzenwinkel ϵ gegeben. Hieraus berechnen wir δ und den Spitzenwinkel des Seitendreiecks der Pyramide γ .

Über den $\cos(\delta)$ können wir die Seitenkante s eines Seitendreiecks der Pyramide ermitteln. Über $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ berechnen wir a und daraus wiederum d .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$\text{Gesucht: } h_{pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ alternativ } h_{pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\delta: \quad \delta = \frac{180^\circ - \epsilon}{2} \quad | \quad \text{Dreieck } ABC \text{ ist gleichschenkelig}$$

$$\gamma: \quad 2 \cdot \delta + \gamma = 90^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - 2 \cdot \delta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$s: \quad \cos(\delta) = \frac{\frac{b}{2}}{s}$$

$$s = \frac{\frac{b}{2}}{\cos(\delta)} = \frac{10}{\cos(20^\circ)} = 10,64$$

$$a: \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s}$$

$$a = 2 \cdot s \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 10,64 \cdot \sin(25^\circ) = 8,99$$

$d:$ $d = a \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale im Quadrat (Formelsammlung)
 $d = 8,99 \cdot \sqrt{2} = 12,72$

alternativ

$h_s:$ $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10,64^2 - 4,495^2} = 9,64$

$h_{pyr}:$ $h_{pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10,64^2 - 6,36^2} = 8,53$

alternativ

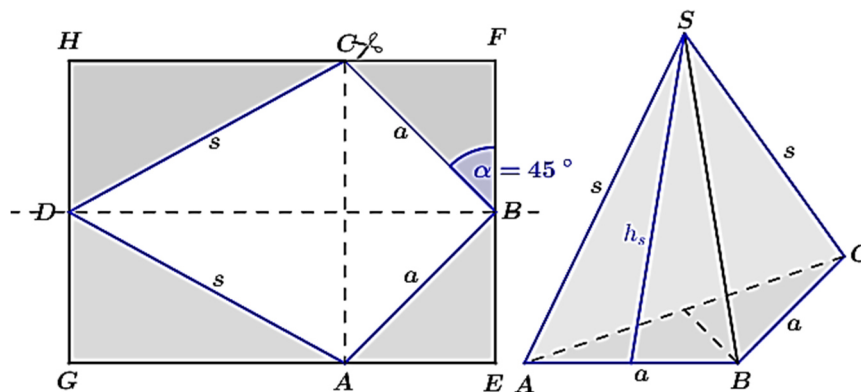
$$h_{pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9,64^2 - 4,495^2} = 8,53$$

Die Höhe der Pyramide beträgt 8,5 cm.

Lösung W2b/2020

Lösungslogik

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation.



Powered by GEOGEBRA.org

Um die Fläche der beiden Seitendreiecke ABS und BCS berechnen zu können, benötigen wir die Länge von Grundkante a sowie die Höhe der Seitenfläche h_s der quadratischen Pyramide.

Für h_s benötigen wir zusätzlich noch die Länge der Seitenkante s .

Sowohl a als auch s lassen sich aus dem Schnitt des DIN-A4-Blatts ermitteln. So bilden ja die beiden Dreiecke AEB und BFC die halbe Grundfläche der quadratischen Pyramide. Damit ist bei den Punkten B und D jeweils ein Winkel von 45° . Die Strecke $\overline{BF}$ z. B. halbiert ja die Breite des DIN-A4-Blatts, ist also $10,5 \text{ cm}$ lang. Damit ist auch die Strecke $\overline{CF}$ $10,5 \text{ cm}$ lang. a lässt sich somit über den Satz des Pythagoras berechnen.

Wegen der Höhe des DIN-A4-Blatts von $29,7 \text{ cm}$ ist die Strecke $\overline{HC}$ $19,2 \text{ cm}$ lang.

Die Strecke $\overline{DH}$ ist wiederum $10,5 \text{ cm}$ lang. Somit lässt sich s über den Satz des Pythagoras berechnen.

Nachdem s und a bekannt sind, können wir die Restfläche des DIN-A4-Blatts berechnen, indem wir von der Gesamtfläche $29,7 \cdot 21$ die Flächen des Dreiecks AEB sowie DCH jeweils zwei Mal abziehen.

Verbleibt noch die Berechnung von h_s der Seitendreiecke der Pyramide. Über s und $\frac{a}{2}$ können wir diese mit dem Satz des Pythagoras berechnen und erhalten damit die Fläche der Seitendreiecke.

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu quadratischen Pyramiden

Lösungen

Realschulabschluss quadratische Pyramiden (Wahlteil) 2014-2020

Klausuraufschrieb

$$\overline{BF}: \overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10,5$$

$$\overline{CF}: \overline{CF} = \overline{BF} = 10,5$$

$$a: a = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$a = \sqrt{10,5^2 + 10,5^2} = 14,85$$

$$\overline{HC}: \overline{HC} = 29,7 - \overline{BF} = 29,7 - 10,5 = 19,2$$

$$\overline{DH}: \overline{DH} = \overline{BF} = 10,5$$

$$s: s = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{DH}^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{19,2^2 + 10,5^2} = 21,89$$

Fläche Dreieck BFC :

$$A_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 10,5 \cdot 10,5 = 55,125$$

Fläche Dreieck DHC :

$$A_{DHC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \cdot 19,2 \cdot 10,5 = 100,8$$

Fläche DIN-A4-Blatt

$$A_{A4} = 29,7 \cdot 21 = 623,7$$

Restfläche:

$$A_{Rest} = A_{A4} - 2 \cdot (A_{BFC} + A_{DHC}) = 623,7 - 2 \cdot (55,125 + 100,8) = 311,85$$

Seitenflächen Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

$$h_s: h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{21,89^2 - 7,425^2} = 20,59$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 14,85 \cdot 20,59 = 152,88$$

Summe A_{ABS} und A_{BCS} :

$$A_{ABS} + A_{BCS} = 2 \cdot A_{ABS} = 2 \cdot 152,88 = 305,76$$

Wegen $A_{Rest} \neq 2 \cdot A_{ABS}$ hat Lena nicht recht.