Lösung Aufgabe A1

Detaillierter Lösungsweg:

Schritt 1: Prüfung, ob die gegebene Messreihe sortiert ist, In diesem Beispiel ist dies der Fall und wir haben insgesamt 22 Messungen.

Schritt 2: *Berechnen des Zentralwertes (Median).*
Die Stichprobe hat 22 Erhebungen. Der Zentralwert liegt somit bei $\frac{22}{2} = 11$. Da dies eine ganze Zahl ist, müssen die Werte von Platz 11 und Platz 12 addiert und die Summe durch 2 dividiert werden. Dies führt zu $\frac{12{,}50+13{,}00}{2} = 12{,}75$.
Der Zentralwert ist $z = 12{,}75$ €.

Schritt 3: *Berechnung des arithmetischen Mittels.*
Hierzu müssen alle einzelnen Zahlen addiert und die Summe durch die Anzahl 22 der Erhebungen dividiert werden. Das arithmetische Mittel liegt bei
$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\dots x_n}{n} = \frac{10{,}00+10{,}00+10{,}00+11{,}00+\cdots 20{,}00}{22} = \frac{305}{22} = 13{,}86$ €.

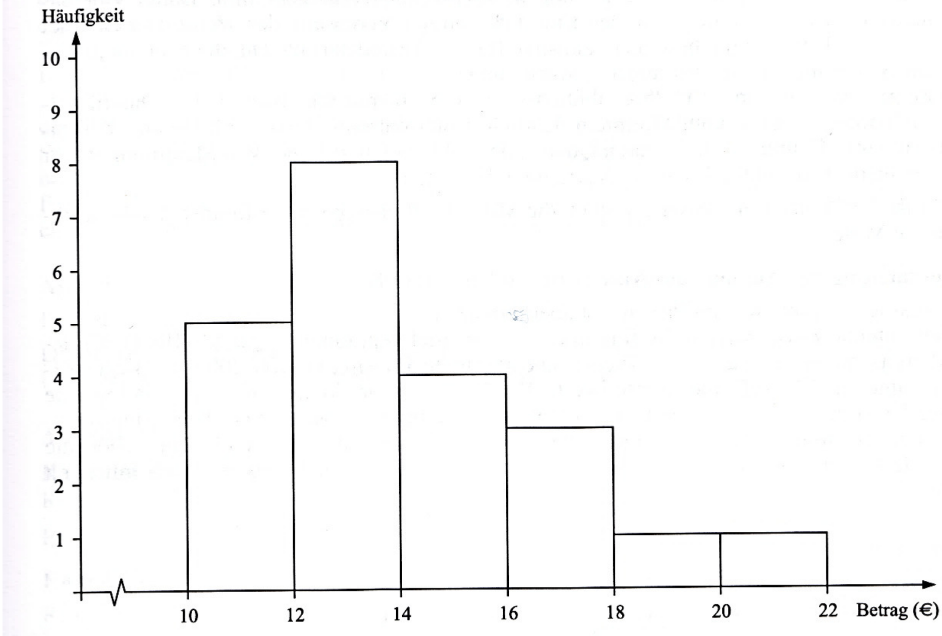
Schritt 4: *Berechnung des Quartilsabstandes.*
Unteres Quartil $q_u = \frac{1}{4} * n = \frac{22}{4} = 5{,}5$. Rangplatz von $q_u = 6 \triangleq 12{,}50$ €.
Oberes Quartil $q_0 = \frac{3}{4} * n = \frac{66}{4} = 16{,}5$. Rangplatz von $q_u = 17 \triangleq 15{,}00$ €.
(Hinweis: Errechnen sich q_u bzw. q_o zu nicht ganzen Zahlen, so wird die Zahl auf die nächste ganze Zahl aufgerundet. Der Wert auf diesem Rangplatz entspricht dann dem gesuchten Wert. Errechnen sich q_u bzw. q_0 zu ganzen Zahlen, so müssen der Wert auf diesem Rangplatz und der Wert auf dem darauffolgenden Rangplatz addiert werden und diese Summe durch zwei geteilt werden, was dann dem gesuchten Wert entspricht.)
Der Quartilabstand ist $q = q_0 - q_u = 15 - 12{,}50 = 2{,}50$ €.

Schritt 5: *Berechnung der Spannweite und des Modalwertes.*
Die Spannweite errechnet sich zu
$w = x_{max} - x_{min} = 20{,}00 - 10{,}00 = 10{,}00$ €.
(Für die Spannweite w wird in manchen Schulen auch d verwendet.)
Der Modalwert ist $m = 12{,}50$ €.

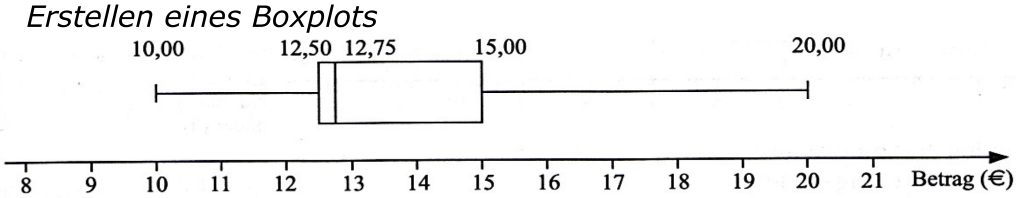
Schritt 6: *Erstellen eines Säulendiagramms*
Die waagrechte Achse ist die Betragsachse in €, die senkrechte Achse stellt die Häufigkeit dar.
Gemäß den Angaben in der Aufgabenstellung beginnt das Diagramm auf der waagrechten Achse beim Wert 10 €, die einzelnen Säulen haben dann eine Breite von 2 €. Die vertikale Häufigkeitsachse wird in 1er Schritten von 1 bis 10 aufgebaut. Aus der Rangliste lesen wir ab

Wert	$10 \leq k_1 < 12$	$12 \leq k_2 < 14$	$14 \leq k_3 < 16$	$16 \leq k_4 < 18$	$18 \leq k_5 < 20$	$20 \leq k_6 < 22$
Anzahl	5	8	4	3	1	1

was zu nachfolgendem Diagramm führt.



Schritt 7: *Erstellen eines Boxplots*



Die waagrechte Achse ist die Betragsachse in €. Oberhalb dieser Achse wird ein waagrechter Strich vom Minimum bis zum Maximum gezeichnet. Zwischen dem unteren und oberen Quartilwert wird ein Rechteck gezeichnet. Innerhalb dieses Rechteckes ist noch die Position des Zentralwertes zu markieren.

Lösung Aufgabe A2

Lösungslogik

Erstellung einer Rangliste für das Modell DX 92020.
Berechnung des unteren und oberen Quartils sowie des Zentralwertes.
Bildung des arithmetischen Mittels (Mittelwert).
Zeichnen des Boxplots
Vergleich des arithmetischen Mittels und des Zentralwertes von Modell DX 900 (verbal).
Untersuchung der Aussage des Autors zu Modell DX1100.

Klausuraufschrieb

Rangliste DX 900

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Preis (€)	94,80	99,90	109,90	128,90	129,80	129,90	134,80	134,90	138,90	139,80	139,80	139,90	139,95	144,90

q_u: $r_{q_u} = n \cdot 0{,}25 = 14 \cdot 0{,}25 = 3{,}5 \Longrightarrow \; r_{q_u} = 4$

$q_u = x_4 = 128{,}90$ €

q_o: $r_{q_o} = n \cdot 0{,}75 = 14 \cdot 0{,}75 = 10{,}5 \Longrightarrow \; r_{q_o} = 11$

$q_0 = x_{11} = 139{,}80$ €

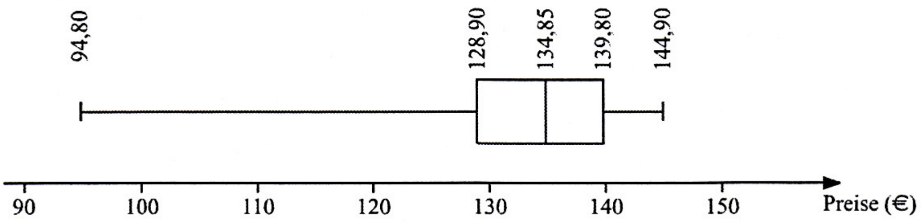
z: $\quad r_z = n \cdot 0{,}5 = 14 \cdot 0{,}5 = 7 \Longrightarrow \quad r_z = 7$

$$z = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{134{,}80 + 134{,}90}{2} = 134{,}85\,€$$

$\overline{x}$: $\quad \overline{x} = \frac{94{,}80 + 99{,}90 + \cdots + 144{,}90}{14} = \frac{1806{,}15}{14}$

$$\overline{x} = 129{,}01\,€$$

Boxplot:



Vergleich arithmetische Mittel und Zentralwert von DX 900:
Der Wert des arithmetischen Mittels liegt mit $129{,}01\,€$ zwischen unterem Quartil und Zentralwert sehr nahe beim unteren Quartil. Die Rangliste zeigt, dass nur vier Werte (Preise) niedriger als das arithmetische Mittel liegen, aber zehn Werte über ihm. Damit gibt das arithmetische Mitteleinen unkorrekten Eindruck von der Verteilung der Werte. Der Boxplot zeigt, dass der Effekt durch besonders günstige Preise (Ausreißer) entsteht, die deutlich außerhalb der Verteilungsspanne der anderen Werte liegen.

Der Zentralwert liegt mit $134{,}85\,€$ ähnlich weit vom oberen Quartil entfernt. Allerdings liegt er vom Minimum deutlich weiter entfernt als vom Maximum. Zusammen mit dem Minimum, dem unteren Quartil, dem oberen Quartil und dem Maximum gibt er einen realistischen Eindruck von der Verteilung der Daten.
Damit ist der Zentralwert besser geeignet, die Mitte der Preisreihe zu bestimmen als das arithmetische Mittel.

Untersuchung der Aussage des Autors zu Modell DX 1100
Die Aussage stimmt zwar im Prinzip, ist aber unpräzise.
In der Antenne zwischen dem Minimum ($179{,}90\,€$) und dem unteren Quartil ($194{,}80\,€$) liegen bereits mindestens $25\,\%$ der Preise. Die genannte Preismarke von $200{,}00\,€$ liegt zwischen unterem Quartil und Zentralwert. Da Preise gerne knapp unter psychologische Schwellenwerte wie $200{,}00\,€$ gelegt werden, liegen in diesem Abschnitt der Box wahrscheinlich noch mehrere Preise knapp unter $200{,}00\,€$. Damit erhöht sich der ohnehin schon die 25%-Marke erreichende Anteil von Preisen unter $200{,}00\,€$ mit hoher Wahrscheinlichkeit nochmals.

Lösung Aufgabe A3

Lösungslogik

Erstellung einer Rangliste. Zu beachten ist, dass für jeden Nutzungsdaueranteil die Anzahl der Häufigkeiten zu je einem, Rangplatz führt.
Berechnung des unteren und oberen Quartils sowie des Zentralwertes.
Bildung des arithmetischen Mittels (Mittelwert).
Zeichnen des Boxplots
Bestimmung des/der Modalwerte/s
Berechnung der relativen Häufigkeit
Analyse der Nutzungsdauer
Vergleich der Nutzung durch Mädchen/Jungen (verbal)

Klausuraufschrieb

Rangliste:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Nutzungs-dauer (h)	1	1	2	3	3	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	9	11

q_u: $r_{q_u} = n \cdot 0{,}25 = 28 \cdot 0{,}25 = 7$

$q_u = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{4+5}{2} = 4\,h\,30\,min$

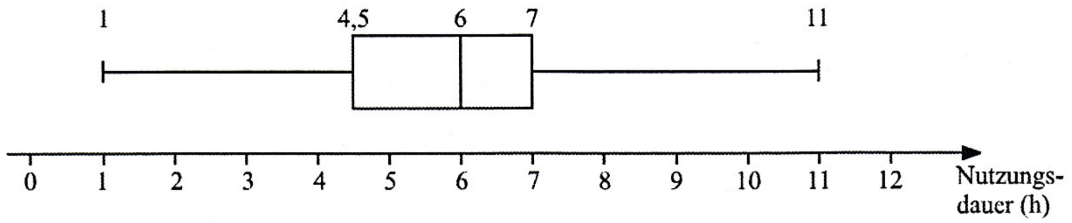
q_o: $r_{q_o} = n \cdot 0{,}75 = 28 \cdot 0{,}75 = 21$

$q_o = \frac{x_{21} + x_{22}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7\,h$

z: $r_z = n \cdot 0{,}5 = 28 \cdot 0{,}5 = 14$

$z = \frac{x_{14} + x_{15}}{2} = \frac{6+6}{2} = 12\,h$

Boxplot:



Modalwerte

Es gibt zwei Modalwerte, da sowohl die 5 als auch die 6 jeweils sechsmal vorkommt: $m_1 = 5\,h;\quad m_2 = 7\,h$

Relative Häufigkeit von mehr als einer Stunde/Tag:

Die gegebene Grafik zeigt die wöchentliche Nutzungsdauer. Die Nutzungsdauer größer einer Stunde/Tag bedeutet somit einer Nutzungsdauer größer sieben Stunde/Woche.
Aus der Grafik entnimmt man, dass die Nutzungsdauer/Woche größer 7 bei 8 Nutzern zweimal, bei 9 Nutzern einmal, bei 10 Nutzern null mall und bei 11 Nutzern einmal der Fall ist. Dies führt zu:

h_n: $h_n = \frac{absolute\ Häufigkeit}{n} = \frac{Anzahl8h + Anzahl\ 9h + Anzahl11h}{28} = \frac{2+1+1}{28} = \frac{4}{28}$

$h_n = \frac{1}{7} = 14{,}3\%$

Analyse der Nutzungsdauer:
Die Spannweite der wöchentlichen Nutzungsdauer beträgt 10 Stunden. Die Mindestnutzungsdauer beträgt (Minimum) 1 Stunde (2 Schüler/innen), die Höchstnutzungsdauer 11 Stunden (1 Schüler/in). Die zentrale Hälfte der Daten liegt zwischen $4{,}5$ Stunden und 7 Stunden. Ein Viertel der Schüler und Schülerinnen ist 4 Stunden oder weniger pro Woche im Netz. $14{,}3\,\%$ der Schülerinnen und Schüler sind im Durchschnitt täglich länger als eine Stunde im Netz.
Die Werte in den beiden Antennen streuen ähnlich weit, im Vergleich zu den Werten in der Box streuen Sie allerdings weiter. Die Datenreihe weist zwei Modalwerte auf (5 Stunden und 7 Stunden Nutzungsdauer).
Insgesamt zeigt sich eine verhältnismäßig symmetrische Verteilung der Werte.

Vergleich zwischen Jungen und Mädchen
Minimum und unteres Quartil sind bei Mädchen und Jungen gleich.
Zentralwert und oberes Quartil der Jungen liegen deutlich über den entsprechenden Werten der Mädchen. Besonders deutlich liegt das Maximum der Jungen über dem der Mädchen.
Spannweite und Quartilsabstand des Boxplots der Mädchen sind kleiner als die entsprechenden Werte des Boxplots der Jungen.
Die Analyse der Boxplots und der Kennwerte zeigt, dass die Spanne der Nutzungsdauer der „Wenignutzer" (Werte zwischen dem Minimum und dem unteren Quartil) bei den Jungen und den Mädchen identisch ist Dagegen liegt die Spanne der Nutzungsdauer der „Vielnutzer" (Werte zwischen dem oberen Quartil und Maximum) bei den Jungen fast ganz über der der Mädchen.

Die Verteilung der Werte zeigt, dass Jungen das Internet insgesamt länger nutzen als Mädchen. Die Nutzungsdauer der Mädchen streut weniger als die der Jungen.

Lösung Aufgabe A4

<u>Lösungslogik</u>
Erstellung einer Rangliste
Berechnung des arithmetischen Mittels für die bisherigen 11 Werte.
Berechnung des neuen arithmetischen Mittels (12 Werte)
Berechnung des neu recherchierten Angebotes.
Ermittlung des Differenzbetrages zwischen altem und neuem Zentralwert.
Berechnung des prozentualen Unterschiedes zwischen höchstem und niedrigstem Angebot.

<u>Klausuraufschrieb</u>
Rangliste:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Wert (€)	54,49	58,80	74,30	74,99	79,50	79,90	84,80	84,90	84,97	89,80	89,90

$\overline{x}_{11}$: $\quad \overline{x}_{11} = \frac{x_1+x_2 \ldots + x_{11}}{11} = \frac{54{,}49+58{,}80+\cdots+89{,}90}{11} = \frac{856{,}35}{11}$

$\overline{x}_{11} = 77{,}85\,€$

$\overline{x}_{12}$: $\quad \overline{x}_{12} = x_{11} - 2{,}33$

$\overline{x}_{12} = 75{,}52\,€$

Angebot neu:

x_{Neu}: $\overline{x}_{12} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{11}+x_{Neu}}{12}$ $\quad | \cdot 12$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} + x_{Neu} = 12 \cdot \overline{x}_{12} \quad | \quad -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{11})$

$x_{Neu} = 12 \cdot \overline{x}_{12} - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{11}) = 12 \cdot 75{,}52 - 856{,}35$

$x_{Neu} = 49{,}89$ €

Zentralwert alt/neu

Bisheriger Zentralwert:

z_{11}: $r_z = n \cdot 0{,}5 = 11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$

$z_{11} = x_6 = 79{,}90$ €

Rangliste mit dem neuen Wert x_{Neu}:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wert (€)	49,89	54,49	58,80	74,30	74,99	79,50	79,90	84,80	84,90	84,97	89,80	89,90

Neuer Zentralwert:

z_{12}: $r_z = n \cdot 0{,}5 = 12 \cdot 0{,}5 = 6$

$z_{12} = \frac{x_6+x_7}{2} = \frac{79{,}50+79{,}90}{2} = 79{,}70$ €

Differenz:

u: $u = 79{,}90 - 79{,}70 = 0{,}20$ €

Prozentuale Preisdifferenz:

$p\%$: $p\% = \frac{x_{max}}{x_{min}} \cdot 100 = \frac{89{,}90}{49{,}89} \cdot 100 = 180{,}2\ \%$

x_{max} ist erhöhter Grundwert von x_{min}.

$p\%_{Diff}$: $p\%_{Diff} = p\% - 100\% = 80{,}2\%$

Der Höchste Preis ist um $80{,}2\%$ *höher als der niedrigste Preis.*

Lösung Aufgabe A5

<u>Lösungslogik</u>

Erstellung der Ranglisten getrennt nach Jungen und Mädchen. Da es sich bei den Ranglisten um Sport handelt und keine Boxplots zu zeichnen oder weitergehende statistische Berechnungen anzufertigen sind, werden die Ranglisten absteigend angelegt.

Berechnung der Punktedifferenz zwischen Median (Zentralwert) und arithmetischem Mittel bei den Jungen.

Berechnung der relativen Häufigkeit h_n der Qualifizierten bei den Mädchen. Die absolute Häufigkeit (in dieser Aufgabe) ist die Anzahl der Ränge, deren erreichte Punktzahl gleich oder größer der geforderten Mindestpunktzahl von 625 Punkten ist.

Berechnung der relativen Häufigkeit h_n der Qualifizierten bei den Jungen

Berechnung des Rangplatzes von Elena.

Klausuraufschrieb

Rangliste Mädchen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte	921	897	725	685	672	646	641	635	586	533

Rangliste Jungen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Punkte	923	896	889	743	668	645	641	600	587	583	527

Differenz Jungen zwischen Mittel- und Zentralwert:

z_{Jungs}: $r_z = n \cdot 0{,}5 = 11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$

$z_{Jungs} = x_6 = 645$

$\overline{x}_{Jungs}$: $\overline{x}_{Jungs} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{11}}{11} = \frac{923+896+\cdots+527}{11} = \frac{7702}{11} = 700{,}18\ Punkte$

d_{Jungs}: $d_{Jungs} = \overline{x}_{Jungs} - z_{Jungs} = 700{,}18 - 645 = 55{,}18\ Punkte$

Relative Häufigkeit qualifizierte Mädchen:

h_{n_M}: $h_{n_M} = \frac{absolute\ Häufigkeit}{10} = \frac{6}{10} = 60\ \%$

Relative Häufigkeit qualifizierte Jungen:

h_{n_J}: $h_{n_J} = \frac{absolute\ Häufigkeit}{11} = \frac{6}{11} = 54{,}55\ \%$

Zentralwert Mädchen:

$z_{Mädchen}$: $z_{Mädchen} = n \cdot 0{,}5 = 10 \cdot 0{,}5 = 5$

$z_{Mädchen} = \frac{x_5+x_6}{2} = \frac{672+646}{2} = 659$

Punkte Elena:

P_{Elena}: $P_{Elena} = z_{Mädchen} \pm Abweichung = 659 \pm 26$

$P1_{Elena} = 685\ Punkte$

$P2_{Elena} = 633\ Punkte$

Rangplatz Elena:

$685\ Punkte \triangleq Rangplatz\ 4$

$685\ Punkte$ wurden von niemandem erreicht

Elena belegt Rangplatz 4.