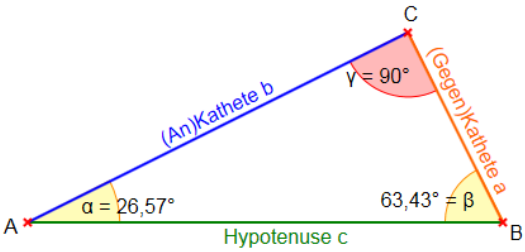
Themenerläuterung

Bei diesem Thema werden die unterschiedlichsten Körper vorgegeben wie Würfel, Prisma, Zylinder, Kegel und Pyramide. Auf den Außenflächen bzw. in den Körpern befinden sich Strecken, deren Länge teilweise vorgegeben ist und du sollst die restlichen Längen bestimmen. Auch sind Flächen in den Körpern gegeben wie etwa Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme und Trapeze, deren Flächeninhalt du berechnen sollst.

Die wichtigsten benötigten Formeln

1. *Satz des Pythagoras*
   Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:
   $$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
   $$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
   $$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2. *Die trigonometrischen Formeln*
   $$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$
   $$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$
   $$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$
   Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.



   Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.
   Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. *Die Volumenformeln*
   Alle Volumen- Oberflächen- und Mantelformeln der einzelnen Körper müssen bekannt sein. Die erforderlichen Formeln findest du alle in deiner Formelsammlung bzw. in vielen Erläuterungen anderer Themen in diesem Portal.

4. *Die Flächenformeln*
   Alle Flächenformeln für das Dreieck, das Quadrat, das Rechteck, das Parallelogramm, das Trapez und der Kreis müssen bekannt sein. Die erforderlichen Formeln findest du alle in deiner Formelsammlung bzw. in vielen Erläuterungen anderer Themen in diesem Portal.

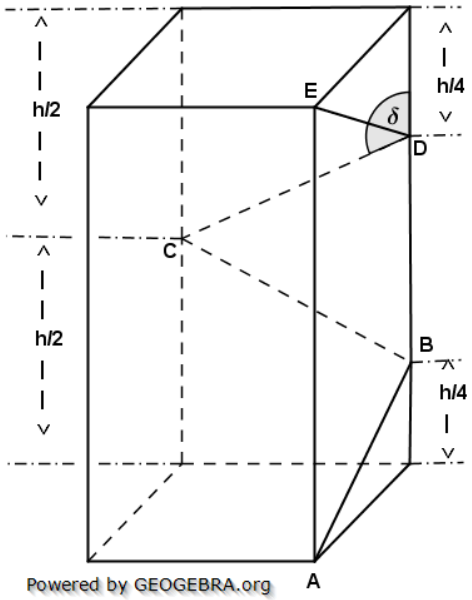
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

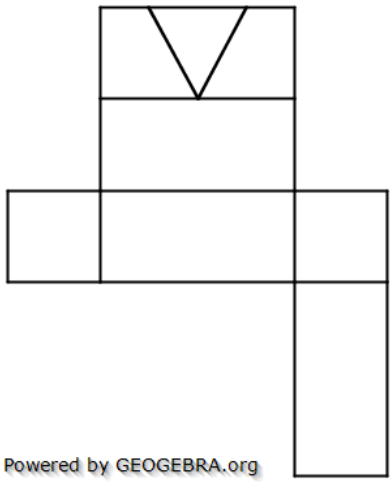
Auf der Oberfläche eines quadratischen Quaders verläuft der geschlossene Streckenzug $ABCDEA$.
Seine Länge beträgt $79{,}2\ cm$.
Für die Körperhöhe h gilt:

$$h = 23{,}4\ cm$$

Berechnen Sie die Größe von Winkel δ.



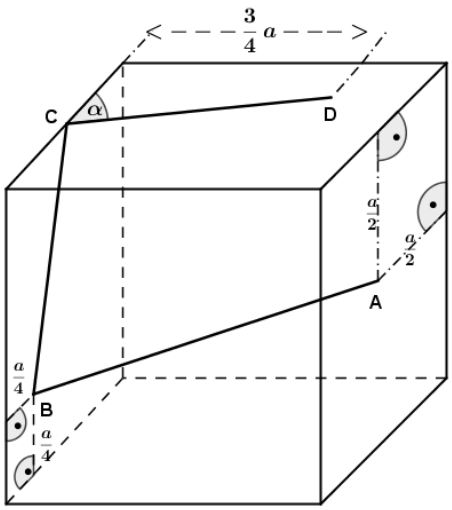
Die Zeichnung zeigt die Netzabwicklung des Körpers mit einem Teil des Streckenzuges $ABCDEA$.
Vervollständigen Sie den Streckenzug.



Aufgabe A2

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge $a = 7{,}2\ cm$. Durch seinen Körper und auf seiner Oberfläche verläuft der $19{,}5\ cm$ lange Streckenzug $ABCD$. Alle vier Punkte liegen auf der Oberfläche des Würfels. Der Winkel α ist $68{,}3°$ groß.
Berechnen Sie die Länge des mittleren Streckenabschnittes BC.

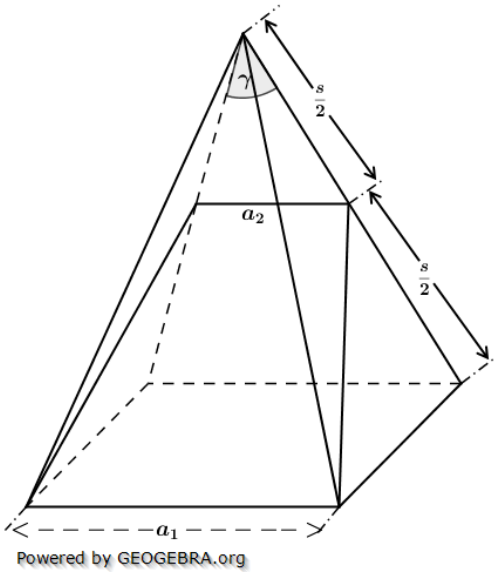
Lösung: $\overline{BC} = 6{,}1\ cm$



Aufgabe A3

Die Zeichnung rechts zeigt die Lage eines Trapezes in einer quadratischen Pyramide. Der Flächeninhalt des Trapezes ist $59{,}2\ cm^2$. Der Abstand von a_1 zu a_2 beträgt $8{,}4\ cm$. Winkel γ ist $48{,}9°$ groß.
Die Seite a_2 des Trapezes halbiert die Seitenkante s der Pyramide.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung: $V_{Pyr} = 271{,}3\ cm^3$



Aufgabe A4

Über den Mantel eines Zylinders verläuft eine Linie spiralförmig mit einer Volldrehung von der Grundkante zur Deckkante.
Es gelten die Maße:

$h = 3a.$ (Körperhöhe)

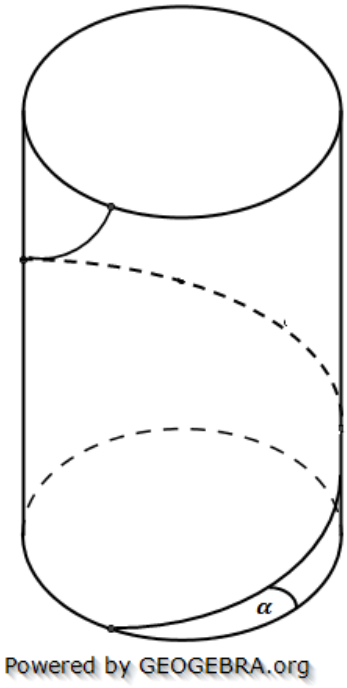
$r = \frac{a}{2}$ (Radius)

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Wert, dass für die Länge der Linie gilt:

$x = a\sqrt{9 + \pi^2}.$

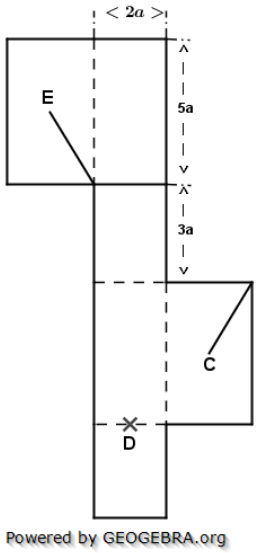
Berechnen Sie den Winkel α.

Lösung: $\alpha = 43{,}7°$



Aufgabe A5

Die Zeichnung zeigt die Netzabwicklung eines Quaders mit Teilen eines geschlossenen Streckenzuges. Im Körper selber läuft der Streckenzug von C zu D und von dort weiter zu E. Die Punkte C und E sind Mittelpunkte ihrer jeweiligen Seite; Punkt D halbiert die Kante, auf der er liegt.



Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Inhalt der vom Streckenzug eingeschlossenen Fläche gilt:

$$A = \frac{3}{2}a^2\sqrt{34}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

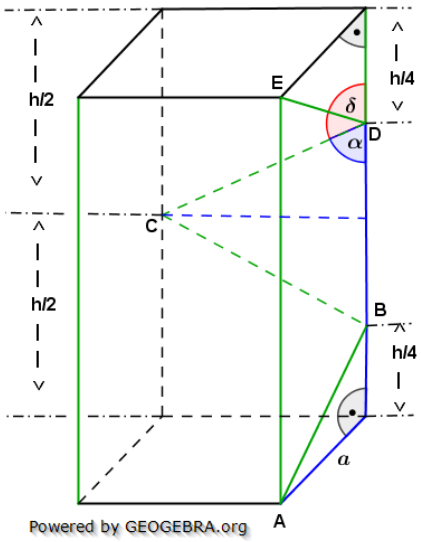
Hinweis zu den Lösungen
In den Graphiken stellen **grüne** Linien, Werte und Flächen vorgegebene Werte, **rote** Linien, Werte und Flächen gesuchte Werte und **blaue** Linien, Werte und Flächen zu ermittelnde Zwischenwerte zur Erreichung der Endergebnisse dar.

Lösung A1

Detaillierte Lösung

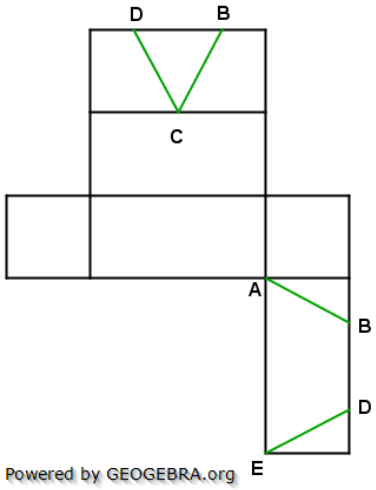
Lösungsschritte:

1. Wir ermitteln die Länge von
   $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{4}(79{,}2 - 23{,}4) = 13{,}95.$
2. Nun lässt sich der Spitzenwinkel des Dreiecks BCD über den cos leicht ermitteln. Es gilt:
   $cos\alpha = \frac{\frac{\overline{BD}}{2}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{h}{4}}{\overline{CD}} = \frac{5{,}85}{13{,}95} = 0{,}4193548$
   $a = cos^{-1}(0{,}4193548) = 65{,}2°$
3. Der gesuchte Winkel δ ist dann der Ergänzungswinkel zu 180°.
   $\delta = 180° - \alpha = 180° - 65{,}2° = 114{,}8°$



Der fortgeführte Streckenzug ist in nebenstehender Grafik dargestellt.

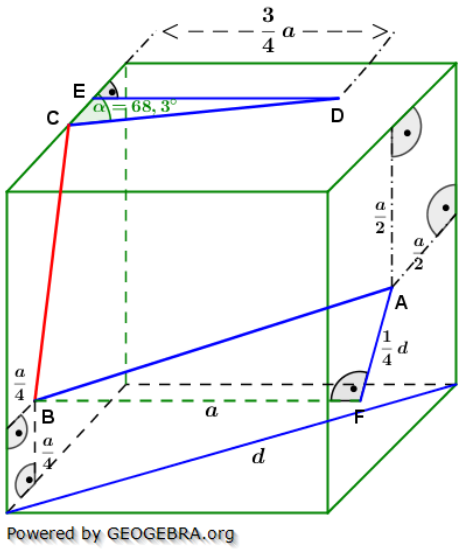
4. Für die Berechnung der Oberfläche fehlt uns noch die Länge der Seitenkante der quadratischen Grundfläche. Diese kann jedoch über den Satz des Pythagoras ermittelt werden.
   $a = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2} = \sqrt{13{,}95^2 - 5{,}85^2}$
   $a = \sqrt{160{,}38} = 12{,}67$
5. Berechnung der Oberfläche des Quaders:
   $O = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h$
   $= 2 \cdot 12{,}67^2 + 4 \cdot 12{,}67 \cdot 23{,}4 = 1506{,}97$
   Die Oberfläche des Quaders beträgt $1507\ cm^2$.



Lösung A2

Lösungslogik

Die gesuchte Strecke $\overline{BC}$ erhalten wir, wenn wir von der Gesamtlänge des Streckenzuges $ABCD$ die beiden Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ abziehen.
Strecke $\overline{CD}$ errechnet sich aus dem $sin\alpha$ und der Strecke $\overline{ED} = \frac{3}{4}a$.
Strecke $\overline{AB}$ errechnet sich über den Satz des Pythagoras mit den Strecken $\overline{BF} = a$ und $\overline{AF} = \frac{1}{4}d$ mit d als Diagonalen der quadratischen Grundfläche des Würfels.



Klausuraufschrieb

$\overline{CD}$: $\quad sin\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{3}{4}a}{\overline{CD}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{CD};\ : sin\alpha$

$\overline{CD} = \frac{\frac{3}{4}a}{sin\alpha} = \frac{0{,}75 \cdot 7{,}2}{sin68{,}3°} = 5{,}81$

d: $\quad d = a \cdot \sqrt{2}$ $\quad |$ Diagonale

$d = 7{,}2 \cdot \sqrt{2} = 10{,}18$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \left(\frac{1}{4}d\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{4}d\right)^2}$ $\quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{AB} = \sqrt{7{,}2^2 + 2{,}55^2} = 7{,}64$

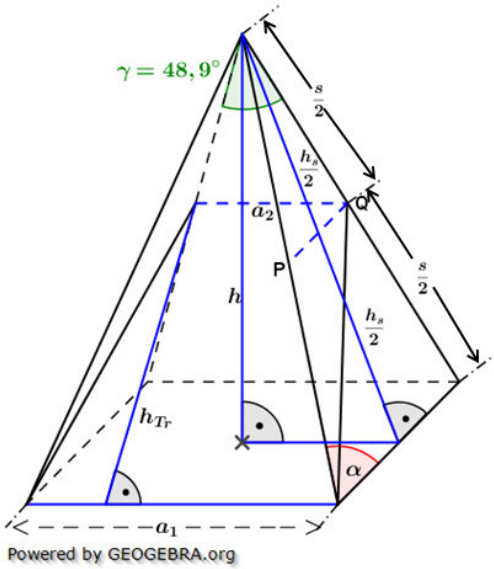
$\overline{BC}$: $\quad \overline{BC} = l_{ABCD} - \overline{CD} - \overline{AB} = 19{,}5 - 5{,}81 - 7{,}64 = 6{,}05$

Die Länge des Streckenabschnittes $\overline{BC}$ beträgt $6{,}1\ cm$.

Lösung A3

Lösungslogik

Der gegebene Abstand von a_1 zu a_2 entspricht der Höhe h_{Tr}. Des Trapezes. Über die Flächenformel des Trapezes ermitteln wir $a_1 + a_2$.
Über den zweiten Strahlensatz berechnen wir die Längen von a_1 und a_2.
Berechnung von α als Basiswinkel des gleichschenkligen Seitendreiecks.
Berechnung von h_s über den $tan\alpha$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens der Pyramide über die Volumenformel.



Klausuraufschrieb

$a_1 + a_2$: $A_{Tr} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot h_{Tr}$ | $\cdot 2$

$2 \cdot A_{Tr} = (a_1 + a_2) \cdot h_{Tr}$ | $: h_{Tr}$

$a_1 + a_2 = \frac{2 \cdot A_{Tr}}{h_{Tr}} = \frac{2 \cdot 59{,}2}{8{,}4} = 14{,}1$

a_1: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{s}{\frac{s}{2}} = \frac{2}{1}$ | zweiter Strahlensatz

$a_1 = 2 \cdot a_2 \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{2}$

$a_1 + a_2 = a_1 + \frac{a_1}{2} = \frac{3}{2} a_1 = 14{,}1$ | $\cdot \frac{2}{3}$

$a_1 = 9{,}4$

α: $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - 48{,}9°}{2} = 65{,}55°$

h_s: $tan\alpha = \frac{h_s}{\frac{a_1}{2}}$ | $\cdot \frac{a_1}{2}$

$h_s = \frac{a_1}{2} \cdot tan\alpha = 4{,}7 \cdot tan 65{,}55° = 10{,}34$

h: $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}34^2 - 4{,}7^2}$ | Satz des Pythagoras

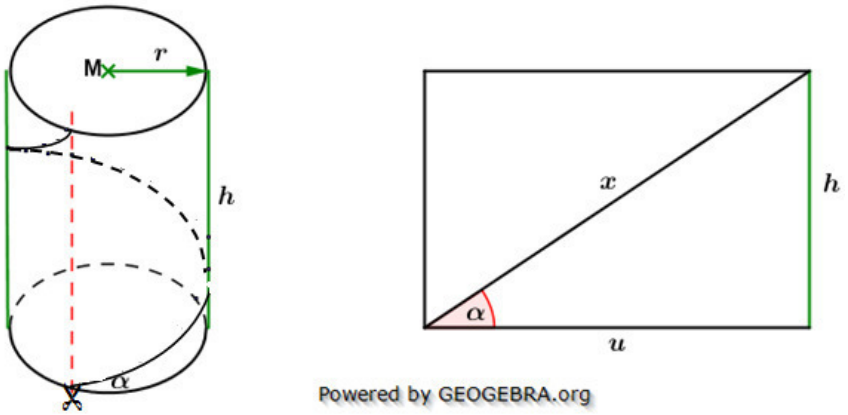
$h = \sqrt{84{,}8256} = 9{,}21$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a_1^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9{,}4^2 \cdot 9{,}21 = 271{,}27$

Das Volumen der Pyramide beträgt $271{,}3\ cm^3$.

Lösung A4

Lösungslogik



Wir schneiden den Mantel des Zylinders orthogonal zur Grund- und Deckfläche durch Anfangs- und Endpunkt der Linie auf. Dadurch erhalten wir ein Rechteck, in dem der Streckenzug um den Zylinder zur Diagonalen des Rechtecks wird. Die Breite des Rechtecks u entspricht dem Umfang des Grundkreises des Zylinders, die Höhe des Rechtecks h ist gegeben.

Klausuraufschrieb

u: $u = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi \cdot a$

x: $x = \sqrt{u^2 + h^2} = \sqrt{(\pi \cdot a)^2 + (3a)^2}$ | Satz des Pythagoras

$x = \sqrt{a^2 \cdot (9 + \pi^2)} = a \cdot \sqrt{9 + \pi^2}$ **q.e.d.**

α: $tan\alpha = \frac{h}{u} = \frac{3a}{\pi \cdot a} = \frac{3}{\pi}$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{3}{\pi}\right) = 43{,}7°$ **q.e.d.**

Lösung A5

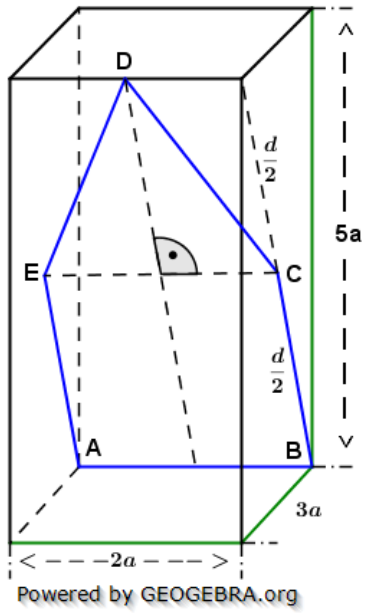
Lösungslogik

Nebenstehende Skizze zeigt das Schrägbild des Prismas mit dem Verlauf des Streckenzuges $ABCDE$.

Der Flächeninhalt setzt sich zusammen aus dem Flächeninhalt des Rechtecks $ABCE$ und dem Flächeninhalt des Dreiecks ECD.

Wir benötigen zunächst die Flächendiagonale d der rechten Seitenfläche mit den Kantenlängen $3a$ und $5a$ und daraus $\frac{d}{2}$.

Danach Berechnung der Teilflächen und der Gesamtfläche.



Klausuraufschrieb

d: $d = \sqrt{(9a)^2 + (5a)^2} = \sqrt{9a^2 + 25a^2}$ | Satz des Pythagoras

$d = \sqrt{34a^2} = a \cdot \sqrt{34}$

$\frac{d}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{34}$

A_{ABCD}: $A_{ABCD} = 2a \cdot \frac{d}{2} = a \cdot d = a^2\sqrt{34}$

A_{ECD}: $A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{d}{2} = a \cdot \frac{d}{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{34}$

A_{ABCDE}: $A_{ABCDE} = A_{ABCD} + A_{ECD} = a^2\sqrt{34} + \frac{a^2}{2}\sqrt{34} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{34}$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de