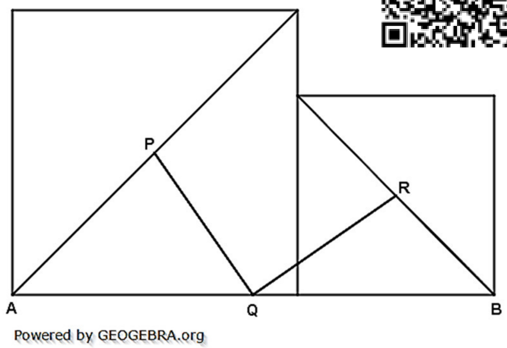
Realschulabschluss Streckenzüge auf Körpern und im Raum (Wahlteil)
4 Aufgaben im Dokument

Aufgabe W1a/2003

Zwei Quadrate mit den Seitenlängen $10{,}0\ cm$ bzw. $7{,}0\ cm$ werden wie rechts skizziert aneinandergelegt.
P und R sind die Mittelpunkte der Diagonalen.
Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Berechnen Sie die Länge des Streckenzuges $APQRB$ und die Größe des Winkels RQP.

Lösung: $\overline{APQRB} = 24{,}2\ cm$
$\sphericalangle RQP = 90°$



Aufgabe W1b/2004

Die Zeichnung stellt das Netz eines Würfels mit der Kantenlänge a dar.
Es gilt:

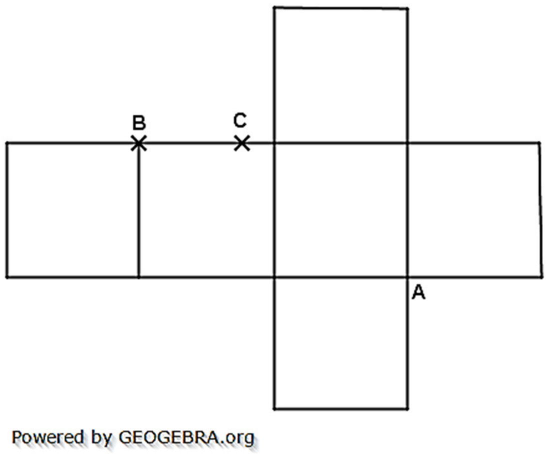
$$\overline{BC} = \frac{3}{4}a$$

Zeichnen Sie ein Schrägbild des Körpers mit dem Dreieck ABC maßgerecht für $a = 6\ cm$.
Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a mit der Formel berechnen lässt:

$$A = \frac{3}{8}a^2\sqrt{2}.$$

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ im Körper in Abhängigkeit von a ohne Verwendung gerundeter Werte.

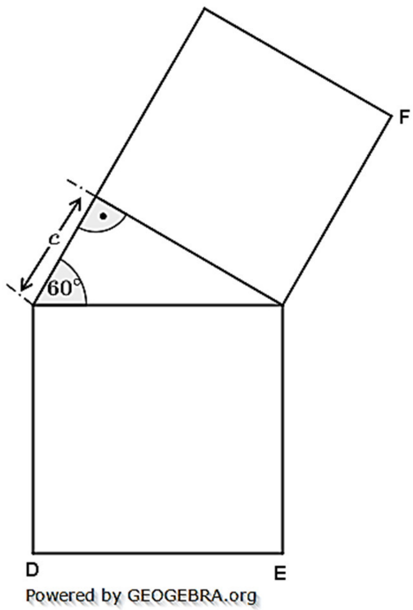
Lösung: $\overline{AC} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$



Aufgabe W1b/2006

Nebenstehende Figur zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten- und Hypothenusen-quadrat.

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte:
Der Abstand des Punktes F von der Geraden $\overline{DE}$ beträgt $\frac{7}{2}c$.



Aufgabe W1a/2009

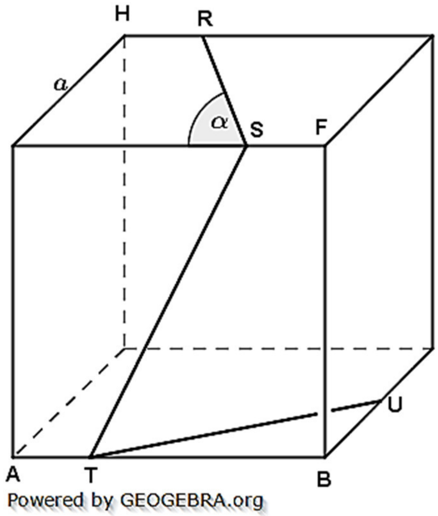
Auf einem Würfel liegt der Streckenzug $RSTU$ mit der Länge $21{,}7\ cm$.

Es gilt:

$a = 6{,}4\ cm$
$\alpha = 55{,}5°$
$\overline{AT} = \overline{FS} = \overline{HR}$

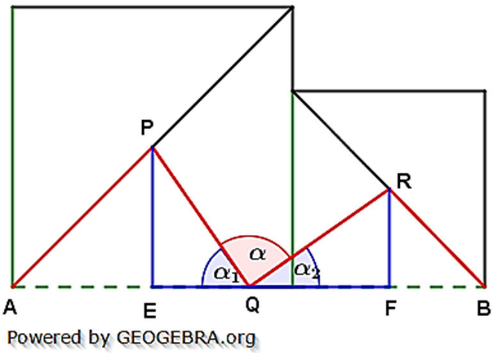
Berechnen Sie die Länge von $\overline{BU}$.

Lösung: $\overline{BU} = 3{,}0\ cm$



Lösung Aufgabe W1a/2003

Lösungslogik



Berechnung der Teilstrecke $\overline{AP}$ über die halbe Diagonale des großen Quadrates.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{RB}$ über die halbe Diagonale des kleinen Quadrates.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{PQ}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{QR}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{QF}$ und $\overline{FR}$.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{PR}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{PG}$ und $\overline{GR}$.
Berechnung der Länge des Streckenzuges $APQRB$.
Berechnung des Winkels α_1 über den sin.
Berechnung des Winkels α_2 über den sin.
Berechnung des Winkels α als Ergänzungswinkel.

Klausuraufschrieb

$\overline{AP}$: $\overline{AP} = \frac{d_{10}}{2} = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{2} = 7{,}07$

$\overline{RB}$: $\overline{RB} = \frac{d_7}{2} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} = 4{,}95$

$\overline{EQ}$: $\overline{EQ} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{a_{10}}{2} = \frac{10+7-10}{2} = 3{,}5$

$\overline{PQ}$: $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{EP}^2 + \overline{EQ}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{10}}{2}\right)^2 + \overline{EQ}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{PQ} = \sqrt{5^2 + 3{,}5^2} = 6{,}1$

$\overline{QF}$: $\overline{QF} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{a_7}{2} = \frac{10+7-7}{2} = 5$

$\overline{QR}$: $\overline{QR} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \overline{FR}^2} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \left(\frac{a_7}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{QR} = \sqrt{5^2 + 3{,}5^2} = 6{,}1$

$\overline{APQRB}$: $\overline{APQRB} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RB} = 7{,}07 + 6{,}1 + 6{,}1 + 4{,}95 = 24{,}22$

Der Streckenzug $APQR$ ist $24{,}2\ cm$ lang.

α_1: $sin\alpha_1 = \frac{\overline{EP}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{6{,}1} = 0{,}81967$

$\alpha_1 = sin^{-1}(0{,}81967) = 55{,}05°$

α_2: $sin\alpha_2 = \frac{\overline{FR}}{\overline{QR}} = \frac{3{,}5}{6{,}1} = 0{,}57377$

$\alpha_2 = sin^{-1}(0{,}57377) = 35{,}01°$

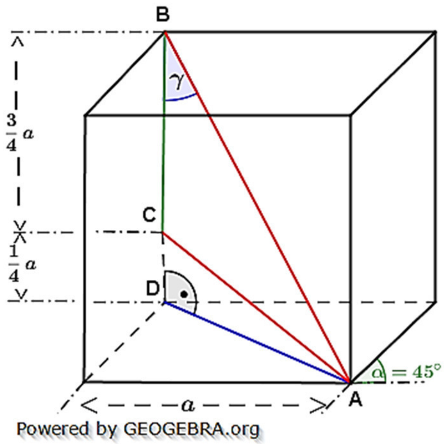
α: $\alpha = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 = 180° - 55{,}05° - 35{,}01° = 98{,}94°$

Der Winkel RQP ist $90°$ groß.

Lösung Aufgabe W1b/2004

Lösungslogik

Die Skizze zeigt das Schrägbild des gegebenen Würfels.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Raumdiagonale im Würfel. Der Winkel γ ist dadurch $45°$.
Im Dreieck ABC ist die Strecke $\overline{AD}$ als Flächendiagonale der Grundfläche gleichzeitig Höhe auf die Seite BC.
Berechnung der Dreiecksfläche über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a \cdot \sqrt{2}$ | Flächendiagonale

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} a \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{8} a^2 \sqrt{2}$ **q.e.d.**

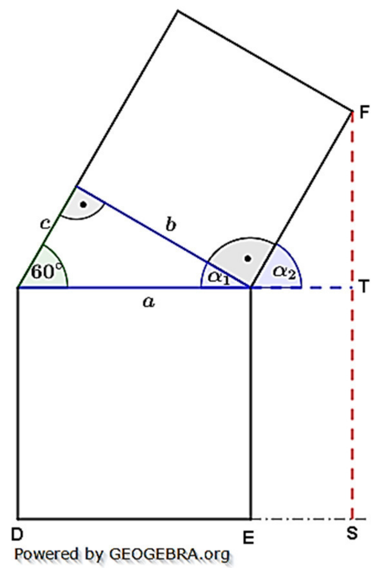
$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{2a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \sqrt{\frac{33}{16}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$

Lösung Aufgabe W1b/2006

Lösungslogik

Der Abstand des Punktes F von der Geraden durch D und E entspricht der Länge der Strecke $\overline{SF}$.
Die Strecke $\overline{SF}$ ist die Summe der Strecken $\overline{ST} = a$ und $\overline{TF}$.
Bestimmung der Winkel α_1 und α_2.
Berechnung von a über den $cos60°$.
Berechnung von b über den $sin60°$.
Berechnung von $\overline{TF}$ über den $sin\alpha_2$.
Berechnung des Abstandes des Punktes F von der Geraden durch D und E.



Klausuraufschrieb

α_1: $\alpha_1 = 90° - 60° = 30°$

α_2: $\alpha_2 = 1800° - 90° - 30° = 60°$

a: $cos60° = \frac{c}{a}$ | $\cdot a;\ : cos60°$

$a = \frac{c}{cos60°} = \frac{c}{0,5} = 2c$

b: $sin60° = \frac{b}{a}$ | $\cdot a$

$b = a \cdot sin60° = 2c \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = c\sqrt{3}$

Realschulabschluss Streckenzüge auf Körpern und im Raum (Wahlteil)

$\overline{TF}$: $sin\alpha_2 = \frac{\overline{TF}}{b}$ | $\cdot b$

$\overline{TF} = b \cdot sin\alpha_2 = c\sqrt{3} \cdot sin60° = c\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}c$

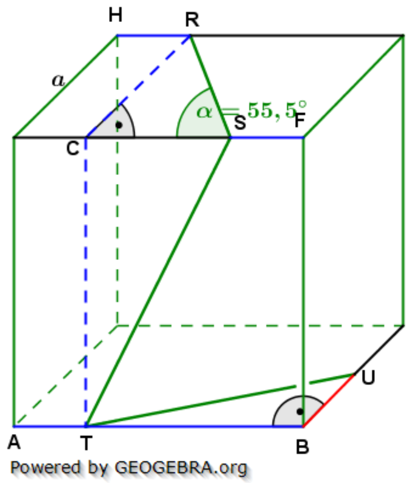
$\overline{SF}$: $\overline{SF} = \overline{ST} + \overline{TF} = a + \overline{TF} = 2c + \frac{3}{2}c$

$\overline{SF} = \frac{7}{2}c$ **q.e.d.**

Lösung Aufgabe W1a/2009

Lösungslogik

Die Strecke $\overline{BU}$ lässt sich über den Satz des Pythagoras aus den Strecken $\overline{TB}$ und $\overline{TU}$ bestimmen.
Die Strecke $\overline{TU}$ berechnet sich aus der Differenz der Länge des Streckenzuges $RSTU$ und den Längen der Strecken $\overline{RS}$ und $\overline{ST}$.
Da die beiden Dreiecke SRC und STC kongruent sind, ist $\overline{RS} = \overline{ST}$.
$\overline{RS} = \overline{ST}$ errechnet sich über den $sin\alpha$.
$\overline{TB}$ errechnet sich der Differenz von a und $\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$.
$\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$ errechnet sich aus der Differenz von a und $\overline{CS}$ geteilt durch 2.
$\overline{CS}$ errechnet sich über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{RS}$: $sin\alpha = \frac{a}{\overline{RS}}$ | $\cdot \overline{RS};\ : sin\alpha$

$\overline{RS} = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{6{,}4}{sin55{,}5°} = 7{,}77$

$\overline{CS}$: $\overline{CS} = \sqrt{\overline{RS}^2 - a^2} = \sqrt{7{,}77^2 - 6{,}4^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{CS} = \sqrt{19{,}4129} = 4{,}40$

$\overline{AT}$: $\overline{AT} = \frac{a - \overline{CS}}{2} = \frac{6{,}4-4{,}4}{2} = 1$

$\overline{TB}$: $\overline{TB} = a - \overline{AT} = 6{,}4 - 1 = 5{,}4$

$\overline{TU}$: $\overline{TU} = \overline{RSTU} - 2 \cdot \overline{RS} = 21{,}7 - 2 \cdot 7{,}77 = 6{,}16$

$\overline{BU}$: $\overline{BU} = \sqrt{\overline{TU}^2 - \overline{TB}^2} = \sqrt{6{,}16^2 - 5{,}4^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BU} = \sqrt{8{,}7856} = 2{,}96$

Die Strecke $\overline{BU}$ ist $3\ cm$ lang.