Realschulabschluss Trigonometrie (Wahlteil B) ab 2021
4 Aufgabe im Dokument

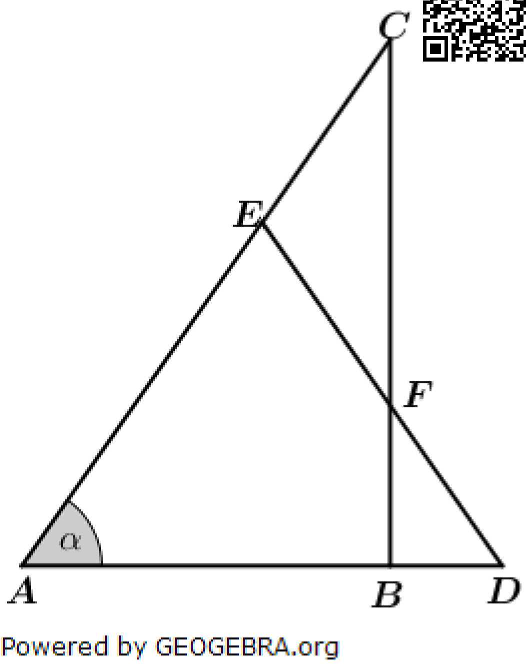
Aufgabe B1a/2021

Gegeben sind das rechtwinklige Dreieck ABC und das gleichschenklige Dreieck ADE.

Es gilt:

$\overline{AB} = 13{,}2\ cm$
$\alpha = 55\ °$
$\overline{CE} = 8{,}0\ cm$
$\overline{AE} = \overline{DE}$.

- Berechnen Sie die Länge von $\overline{BF}$.
- Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $ABFE$.

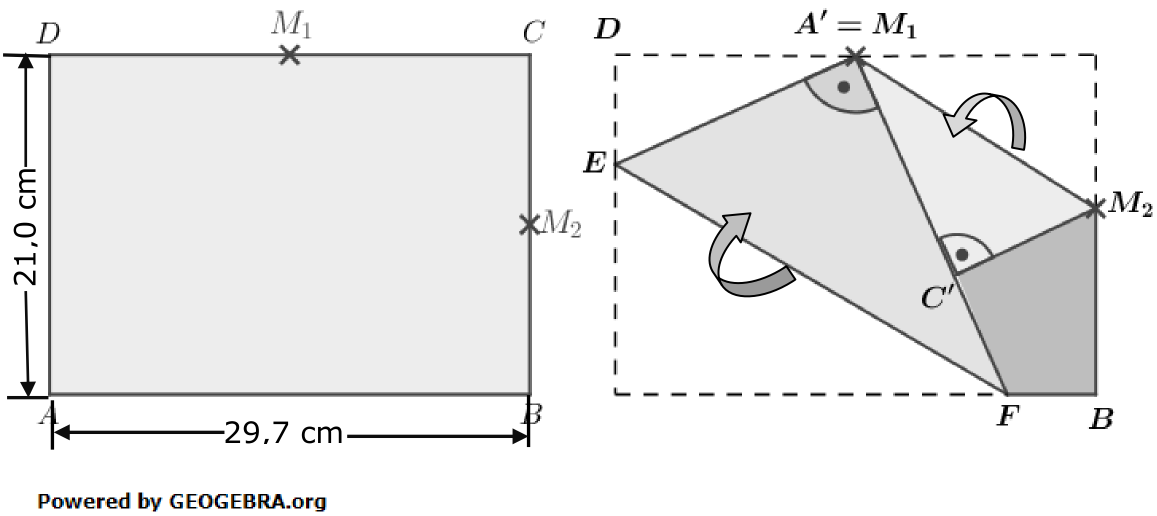


Lösung: $\overline{BF} = 5{,}74\ cm$
$u_{ABFE} = 42{,}0\ cm$

Aufgabe B4b/2021

Ein DINA A4-Blatt hat die Eckpunkte A, B, C und D.
Die Punkte M_1 und M_2 halbieren die Seitenlängen des DIN A4-Blattes.
Der Punkt C wird zu C'. Die beiden Papierkanten stoßen entlang $\overline{M_1F}$ aneinander.

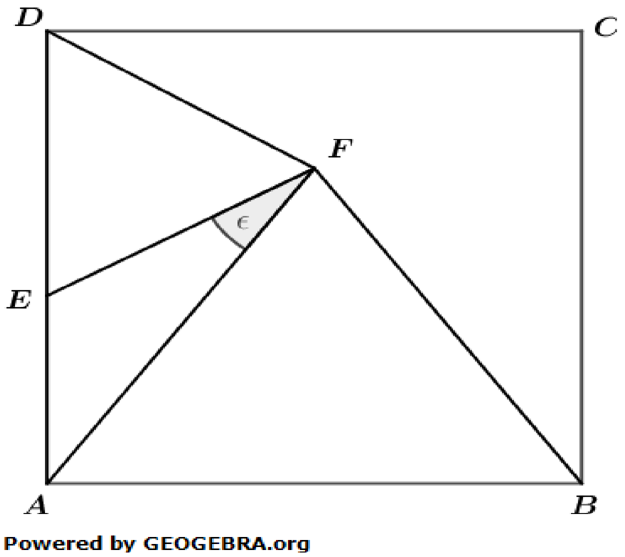
Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks EM_1D und des Vierecks FBM_2C'.



Lösungen: $A_{EM_1D} = 39\ cm^2$; $A_{FBM_2C'} = 77{,}9\ cm^2$

Aufgabe B1a/2022

Im Quadrat $ABCD$ liegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke ABF und DEF.



Es gilt:

$\overline{AB} = 14\ cm$
$\overline{AF} = 12\ cm$
$\overline{AF} = \overline{BF}$
$\overline{EF} = \overline{DF}$.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AFE.
- Berechnen Sie den Winkel ϵ.

Lösung: $A_{AFE} = 19{,}25\ cm^2$
$\epsilon = 23\ °$

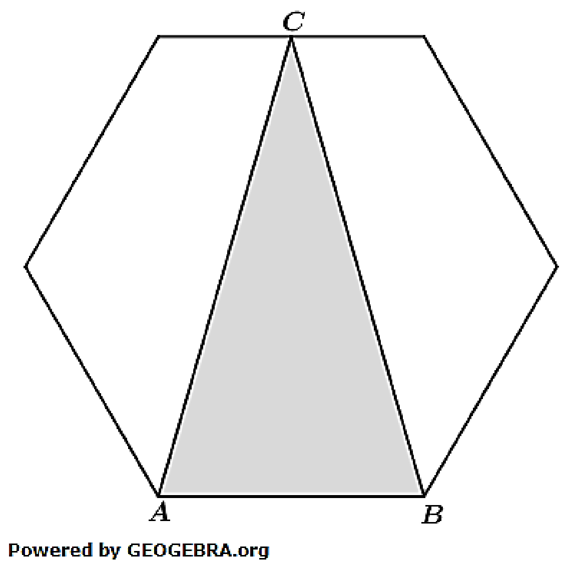
Aufgabe B4b/2022

Das regelmäßige Sechseck und das gleichschenklige Dreieck haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam.

Es gilt:

$\overline{AB} = 12{,}4\ cm$

- Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.



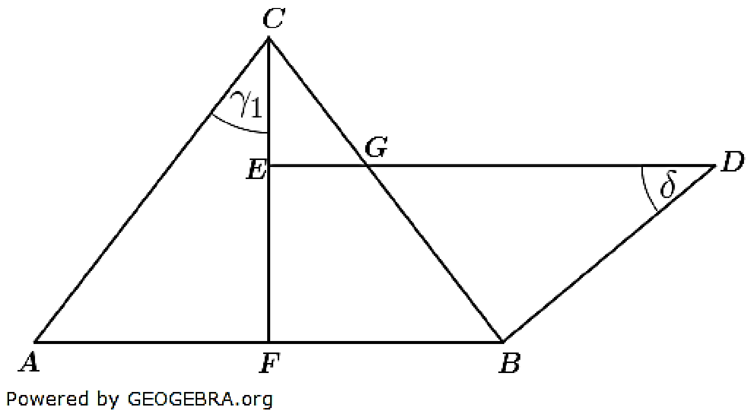
Tom behauptet: „Der Flächeninhalt des Sechsecks ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

- Hat Tom Recht?
  Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder durch eine Argumentation.

Lösungen: $u_{ABC} = 57{,}1\ cm$
Toms Behauptung ist richtig.

Aufgabe B1a/2023

Das gleichschenklige Dreieck ABC und das rechtwinklige $FBDE$ Trapez überdecken sich teilweise.



Es gilt:

$\overline{AC} = 11{,}4\ cm$

$\overline{BD} = 8{,}2\ cm$

$\gamma_1 = 37{,}6\,°$

$\delta = 39{,}2\,°$

$\overline{AC} = \overline{BC}$

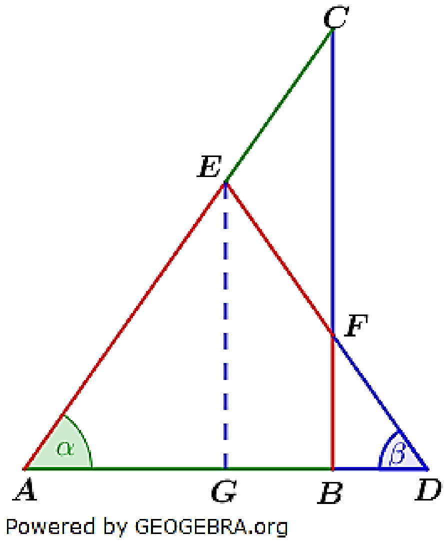
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $FBGE$.

Lösung: $A_{FBGE} = 25{,}7\ cm^2$

Lösung B1a/2021

Lösungslogik

Wir berechnen zunächst im rechtwinkligen Dreieck ABC die Strecke $\overline{BC}$ über den $\tan(\alpha)$ und danach die Strecke $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
Wir berechnen die Strecke $\overline{AE}$ aus der Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{EC}$.
Wir berechnen die Strecke $\overline{AG}$ über den $cos\,(\alpha)$.
Wir berechnen die Strecke $\overline{AD}$ über $2 \cdot \overline{AG}$, denn das Dreieck ist gleichschenklig.
Wie berechnen $\overline{BD}$ aus der Differenz von $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$.
Wir berechnen $\overline{BF}$ über den $tan\,(\beta)$.
Wir berechnen die Strecke $\overline{DF}$ über den Satz des Pythagoras.
Wir berechnen die Strecke $\overline{EF}$ aus der Differenz von $\overline{DE} = \overline{AE}$ und $\overline{DF}$.



Der Umfang des Vierecks $ABFE$ kann nun gebildet werden.

Klausuraufschrieb

$\overline{BC}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan(\alpha) = 13{,}2 \cdot \tan(55°) = 18{,}85$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{13{,}2^2 + 18{,}85^2} = 23{,}01$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC} = 23{,}01 - 8{,}0 = 15{,}01$

$\overline{AG}$: $\quad cos\alpha = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE}$

$\overline{AG} = \overline{AE} \cdot cos\alpha = 15{,}01 \cdot \cos(55°) = 8{,}61$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = 2 \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 8{,}61 = 17{,}22$

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 17{,}22 - 13{,}2 = 4{,}02$

$\overline{BF}$: $\quad tan\beta = \tan(\alpha) = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \quad | \cdot \overline{BD}$

$\overline{BF} = \overline{BD} \cdot tan\alpha = 4{,}02 \cdot \tan(55°) = 5{,}74$

Die Strecke $\overline{BF}$ ist $5{,}74\ cm$ lang.

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{BF}^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{DF} = \sqrt{4{,}02^2 + 5{,}74^2} = 7{,}0$

$\overline{EF}$: $\quad \overline{EF} = \overline{AE} - \overline{DF} = 15{,}01 - 7{,}0 = 8{,}01$

u_{ABFE}: $\quad u_{ABFE} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{EF} + \overline{AE}$

$u_{ABFE} = 13{,}2 + 5{,}74 + 8{,}01 + 15{,}01 = 41{,}96$

Der Umfang des Vierecks $ABFE$ beträgt $42\ cm$.

Lösung B4b/2021

Lösungslogik

Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D:

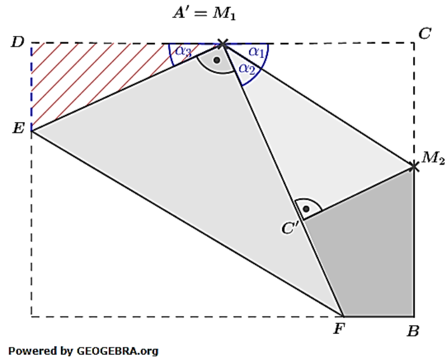
$A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DM_1}$

Zur Bestimmung von müssen wir zunächst die Winkel α_1, α_2 und α_3 berechnen.

α_1 berechnet sich über $\tan(\alpha_1) = \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CM_1}}$.

$\alpha_2 = \alpha_1$, α_3 ist Ergänzungswinkel zu $90\,°$ von $\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot \alpha_1$.

$\overline{ED}$ errechnet sich nun über den $\tan(\alpha_3) = \frac{\overline{ED}}{\overline{DM_1}}$.



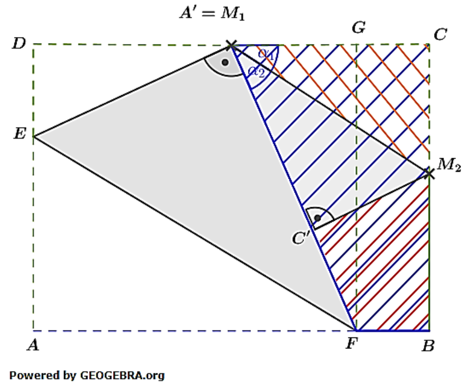
Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C':

Wir bestimmen zunächst die Länge von $\overline{M_1F}$ über $\sin(2 \cdot \alpha_1) = \frac{\overline{FG}}{\overline{M_1F}}$ mit $\overline{FG} = \overline{BC} = 21\,cm$.

Wegen $\overline{M_1F} = \overline{AF}$ ist $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{M_1F}$.

Jetzt berechnen wir die Fläche des Trapezes $FBCM_1$ über $A_{FBCM_1} = \frac{\overline{FB}+\overline{M_1C}}{2} \cdot \overline{BC}$.

Von dieser Fläche müssen wir zweimal den Flächeninhalt des Dreieck M_1M_2C subtrahieren und erhalten damit den Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C'.



Realschulabschluss BW Wahlteile 2021

Klausuraufschrieb

Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D:

$A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DM_1}$

α_1: $\quad \tan(\alpha_1) = \frac{\overline{CM_2}}{\overline{CM_1}} = \frac{\frac{21{,}0}{2}}{\frac{29{,}7}{2}} = \frac{21{,}0}{29{,}7}$

$\quad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{21{,}0}{29{,}7} = 35{,}26\,°$

α_2: $\quad \alpha_2 = \alpha_1 = 35{,}26\,°$

α_3: $\quad \alpha_3 = 90\,° - \alpha_1 - \alpha_2 = 90\,° - 2 \cdot 35{,}26\,° = 19{,}48\,°$

$\overline{ED}$: $\quad \tan(\alpha_3) = \frac{\overline{ED}}{\overline{DM_1}}$

$\quad \overline{ED} = \overline{DM_1} \cdot \tan(\alpha_3)$

$\quad \overline{ED} = \frac{29{,}7}{2} \cdot \tan(19{,}48\,°) = 5{,}25$

A_{EM_1D}: $\quad A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}25 \cdot \frac{29{,}7}{2} = 38{,}98$

Das Dreiecks EM_1D hat eine Flächeninhalt von $39\,cm^2$.

Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C':

$\overline{M_1F}$: $\quad \sin(2 \cdot \alpha_1) = \frac{\overline{FG}}{\overline{M_1F}}$ mit $\overline{FG} = \overline{BC} = 21{,}0\,cm$

$\quad \overline{M_1F} = \frac{\overline{FG}}{\sin(2 \cdot \alpha_1)} = \frac{21{,}0}{\sin(2 \cdot 35{,}26\,°)} = 22{,}28\,cm$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FG} = \overline{AB} - \overline{M_1F} = 29{,}7 - 22{,}28 = 7{,}42$

Fläche des Trapezes $FBCM_1$:

A_{FBCM_1}: $A_{FBCM_1} = \frac{\overline{FB}+\overline{M_1C}}{2} \cdot \overline{BC}$

$A_{FBCM_1} = \frac{7{,}42+\frac{29{,}7}{2}}{2} \cdot 21{,}0 = 233{,}835$

Fläche des Dreiecks M_1M_2C:

$A_{M_1M_2C}$: $A_{M_1M_2C} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_1C} \cdot \overline{M_2C}$

$A_{M_1M_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{29{,}7}{2} \cdot \frac{21}{2} = 77{,}9625$

$A_{FBM_2C'}$: $A_{FBM_2C'} = A_{FBCM_1} - 2 \cdot A_{M_1M_2C}$

$A_{FBM_2C'} = 233{,}835 - 2 \cdot 77{,}9625 = 77{,}91$

Das Viereck FBM_2C' ist $77{,}9\ cm^2$ groß.

Lösung B1a/2022

Lösungslogik

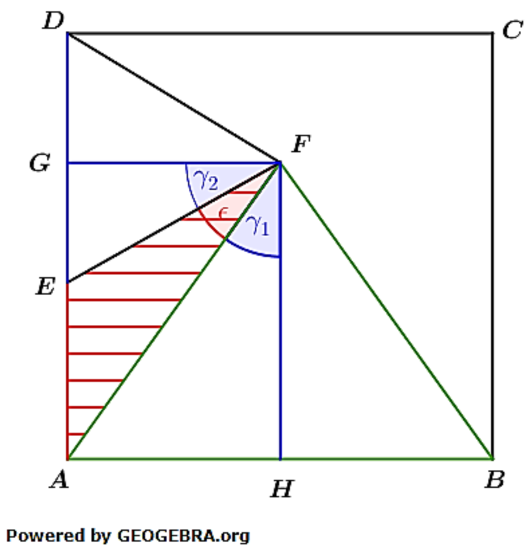
Berechnung der Fläche A_{AFE}:

Berechnung $\overline{HF}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung der Strecke $\overline{GD}$.

Berechnung der Strecke $\overline{AE}$.

Berechnung der Fläche des Dreiecks AFE über die Grundseite $\overline{AE}$ und die Höhe $\overline{GF}$.



Berechnung des Winkels ϵ:

Berechnung γ_1 über den sin.

Berechnung von γ_2 über den tan.

Berechnung von ϵ als Ergänzungswinkel zu $90°$ von γ_1 und γ_2.

Klausuraufschrieb

Berechnung der Fläche A_{AFE}.

$\overline{HF}$: $\overline{HF} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AH}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{HF} = \sqrt{12^2 - 7^2} = 9{,}75$

$\overline{GD}$: $\overline{GD} = \overline{AB} - \overline{HF} = 14 - 9{,}75 = 4{,}25$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{GD} = 14 - 2 \cdot 4{,}25 = 5{,}5$

$\overline{GF}$: Wegen des gleichschenkligen Dreiecks ABF ist $\overline{GF} = 7$

A_{AFE}: $A_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{GF} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}5 \cdot 7 = 19{,}25$

Das Dreieck AFE hat eine Fläche von $19{,}25\ cm^2$.

Berechnung der Fläche ϵ:

γ_1: $\sin(\gamma_1) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AF}} = \frac{7}{12}$

$\gamma_1 = \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right) = 35{,}69\,°$

γ_2: $\tan(\gamma_2) = \frac{\overline{GD}}{\overline{GF}} = \frac{4{,}25}{7}$

$\gamma_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4{,}25}{7}\right) = 31{,}26\,°$

ϵ: $\epsilon = 90\,° - \gamma_1 - \gamma_2 = 90\,° - 35{,}69\,° - 31{,}26\,° = 23{,}05\,°$

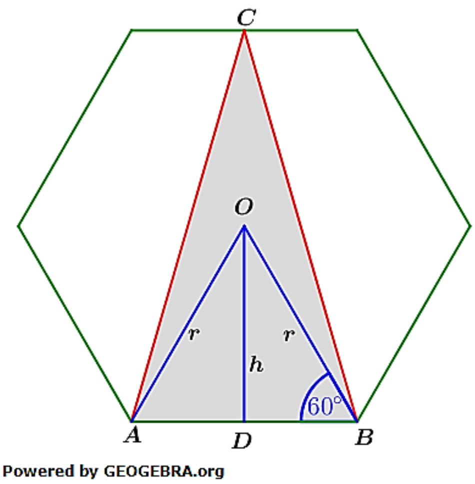
Der Winkel ϵ hat etwa $23\,°$.

Lösung B4b/2022

<u>Lösungslogik</u>

Umfang Dreieck ABC:

Im regelmäßigen Sechseck sind die 6 Basisdreiecke des Sechsecks gleichseitig.
Dies führt zu $r = \overline{AB} = 12{,}4\ cm$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Die Strecke $\overline{DC} = 2h$.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.
$u_{ABC} = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC}$.



Prüfung von Toms Behauptung:

Wir berechnen die Fläche des regelmäßigen Sechsecks über die Formel
$A_{Sechseck} = \frac{3}{2} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \sqrt{3}$ sowie die Fläche des Dreiecks ABC über die Formel
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DC}$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Umfang Dreieck ABC:

$u_{ABC} = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC}$

$\overline{AC}$: $\overline{AC}^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{DC}^2$

$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{DC}^2}$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{DO}$

$\overline{DO}$: $\sin(60\,°) = \frac{\overline{DO}}{r}$

$\overline{DO} = r \cdot \sin(60\,°)$

Wegen regelmäßigem Sechseck ist $r = \overline{AB} = 12{,}54\ cm$.

$\overline{DO} = 12{,}4 \cdot \sin(60\ °) = 10{,}74$

$\overline{DC} = 2 \cdot \overline{DO} = 21{,}48\ cm$

$\overline{AC} = \sqrt{6{,}2^2 + 21{,}48^2} = 22{,}36\ cm$

$u_{ABC} = 12{,}4 + 2 \cdot 22{,}36 = 57{,}12\ cm$

Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt $57{,}1\ cm$.

Prüfung von Toms Behauptung:

$A_{Sechseck} = \frac{3}{2} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 12{,}4^2 \cdot \sqrt{3} = 399{,}48\ cm^2$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot 12{,}4 \cdot 21{,}48 = 133{,}18$

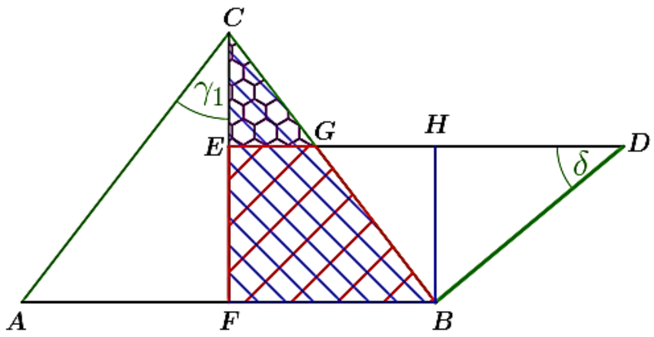
$\frac{399{,}48}{133{,}18} = 3$

Tom hat Recht.

Lösung B1a/2023

Lösungslogik

Zur Berechnung der Fläche A_{FBGE} müssen wir von der Fläche des Dreiecks A_{FBC} die Fläche des Dreiecks A_{EGC} abziehen.



Powered by GEOGEBRA.org

Berechnung der Fläche A_{FBC}:

Berechnung der Höhe $\overline{FC}$ über den $\cos(\gamma_1)$.

Berechnung $\overline{FB}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks A_{FBC}.

Berechnung der Fläche A_{EGC}:

Berechnung der Strecke $\overline{BH} = \overline{FE}$ über den $\sin(\delta)$.

Berechnung der Strecke $\overline{EC}$ über die Differenz der Strecken $\overline{FC}$ und $\overline{FE}$.

Berechnung der Strecke $\overline{EG}$ über den $\sin(\gamma_1)$.

Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks A_{EGC}.

Berechnung der Fläche A_{FBGE}.

Berechnung des Flächeninhaltes des Trapezes A_{FBGE} über die Differenz der Flächen A_{FBC} und A_{EGC}.

Klausuraufschrieb

$A_{FBGE} = A_{FBC} - A_{EGC}$

Berechnung der Dreiecksfläche A_{FBC}.

A_{FBC}:

$A_{FBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}$

$\overline{FC}$: $\cos(\gamma_1) = \frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}$

$\overline{FC} = \overline{AC} \cdot \cos(\gamma_1)$

$\overline{FC} = 11{,}4 \cdot cos(37{,}6\,°) = 9{,}03\ cm$

$\overline{FB}$: $\overline{FB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{FC}^2$ | Satz des Pythagoras

$\overline{FB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{FC}^2} = \sqrt{11{,}4^2 - 9{,}03^2} = 6{,}96$

$A_{FBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}96 \cdot 9{,}03 = 31{,}42$

Berechnung der Dreiecksfläche A_{EGC}.

A_{EGC}:

$A_{EGC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EG} \cdot \overline{EC}$

$\overline{EC}$: $\overline{EC} = \overline{FC} - \overline{FE}$

$\overline{FE}$: $\overline{FE} = \overline{BH}$

$\overline{BH}$: $\sin(\delta) = \frac{\overline{BH}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD}$

$\overline{BH} = \overline{BD} \cdot \sin(\delta)$

$\overline{BH} = 8{,}2 \cdot \sin(39{,}2°) = 5{,}18$

$\overline{FE} = 5{,}18$

$\overline{EC}$: $\overline{EC} = 9{,}03 - 5{,}18 = 3{,}85$

$\overline{EG}$: $\tan(\gamma_1) = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}}$ | $\cdot \overline{EC}$

$\overline{EG} = \overline{EC} \cdot \tan(\gamma_1)$

$\overline{EG} = 3{,}85 \cdot \tan(37{,}6°) = 2{,}96$

A_{EGC}:

$A_{EGC} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}96 \cdot 3{,}85 = 5{,}7$

Berechnung der Dreiecksfläche A_{FGBE}.

$A_{FBGE} = 31{,}42 - 5{,}7 = 25{,}72$

Das Viereck $FBGE$ *ist* $25{,}7\ cm^2$ *groß.*