Abschlussprüfung Realschule

Wahlteile ab 2003

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis Wahlteile

01 *Abschlussprüfung Realschule Wahlteile ab 2003*

	Seite
Wahlteil 2003	
Aufgaben	04
Lösungen	06
Wahlteil 2004	
Aufgaben	15
Lösungen	17
Wahlteil 2005	
Aufgaben	23
Lösungen	25
Wahlteil 2006	
Aufgaben	32
Lösungen	34
Wahlteil 2007	
Aufgaben	40
Lösungen	43
Wahlteil 2008	
Aufgaben	50
Lösungen	52
Wahlteil 2009	
Aufgaben	58
Lösungen	61
Wahlteil 2010	
Aufgaben	69
Lösungen	72
Wahlteil 2011	
Aufgaben	79
Lösungen	82
Wahlteil 2012	
Aufgaben	90
Lösungen	93
Wahlteil 2013	
Aufgaben	101
Lösungen	104
Wahlteil 2014	
Aufgaben	114
Lösungen	117
Wahlteil 2015	
Aufgaben	125
Lösungen	129

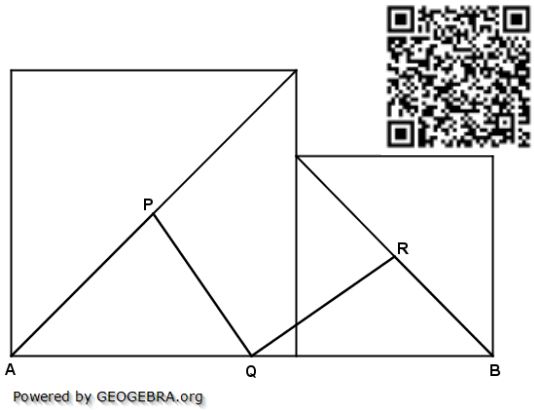
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Wahlteil 2016
Aufgaben 139
Lösungen 143
Wahlteil 2017
Aufgaben 154
Lösungen 158
Wahlteil 2018
Aufgaben 168
Lösungen 172
Wahlteil 2019
Aufgaben 181
Lösungen 185

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2003

Zwei Quadrate mit den Seitenlängen $10{,}0\ cm$ bzw. $7{,}0\ cm$ werden wie rechts skizziert aneinandergelegt.
P und R sind die Mittelpunkte der Diagonalen.
Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Berechnen Sie die Länge des Streckenzuges $APQRB$ und die Größe des Winkels RQP.



Lösung: $\overline{APQRB} = 24{,}2\ cm$
$\sphericalangle RQP = 90°$

Aufgabe W1b/2003

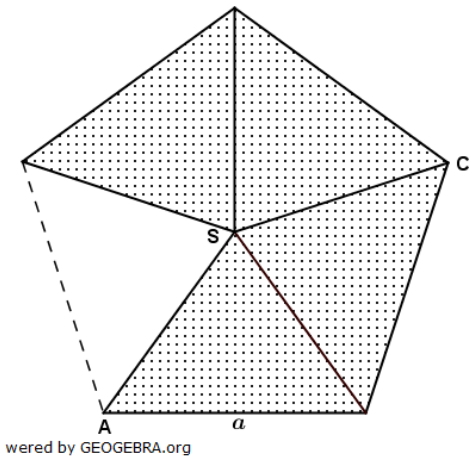
Die Punkte $A(-4|0)$ und $B(0|y_B)$ bilden mit dem Koordinatenursprung ein rechtwinkliges Dreieck. Der Punkt B ist auf der y–Achse beweglich. Der Innenwinkel des Dreiecks bei A wird mit α bezeichnet.
Der Winkel α ist von y_B abhängig. Tabellieren Sie diese Abhängigkeit des Winkels α für y_B von 0 bis 7 in Einerschritten. Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild.
Wie groß ist jeweils y_B wenn α die Werte $30°$ bzw. $60°$ annimmt?
Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck jeweils, wenn α die Werte $30°$ bzw. $60°$ annimmt?

Lösung: $\alpha = 30°;\ \ y_b = 2{,}3\ LE;\ \ A_{AOB} = 4{,}6\ FE$
$\alpha = 60°;\ \ y_B = 6{,}9\ LE;\ \ A_{AOB} = 13{,}9\ FE$ alterntiv: $A_{AOB} = 13{,}8\ FE$.

Aufgabe W2b/2003

Die vier dunkel eingefärbten Teilflächen eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge $a = 7{,}6\ cm$ bilden den Mantel einer quadratischen Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
Der Punkt M liegt auf der Mitte der Strecke $\overline{SC}$.
Berechnen Sie die Länge von $\overline{AM}$ im Körper.

Tipp: Berechnung von $\overline{AM}$ über den Kosinussatz.



Lösung: $V = 69{,}1\ cm^3$
$\overline{AM} = 8{,}3\ cm$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3a/2003

Die Normalparabel p_1 hat die Gleichung $y = x^2 - 4x + 6$.
Die Normalparabel p_2 ist nach unten geöffnet und hat den Scheitel $S_2(0|6)$.
Durch die Schnittpunkte beider Parabeln verläuft die Gerade g.
Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden.
Die Gerade bildet mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie die restlichen Innenwinkel und den Umfang dieses Dreiecks.

Lösung: $g\colon\ y = -2x + 6; u = 15{,}7\ LE; \alpha = 63{,}4°\,; \beta = 26{,}6°$

Aufgabe W3b/2003

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{2x+1}{3x-9} - \frac{x+2}{2x+6} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-9}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}; \quad \mathbb{L} = \{-2\}$

Aufgabe W4a/2003

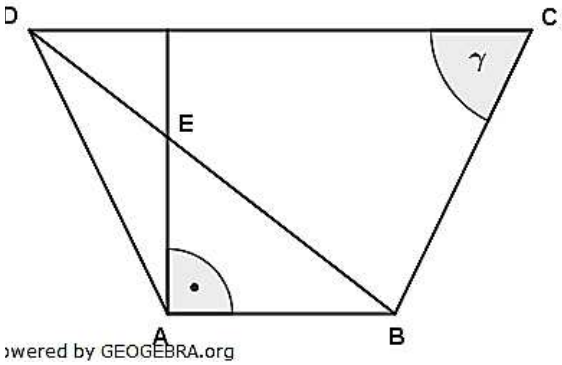
Vom gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sind gegeben:

$\overline{AB} = 5{,}6\ cm$
$\overline{AD} = 7{,}8\ cm$
$\gamma = 64{,}2°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{AE}$.
Welchen Abstand hat E von $\overline{BC}$.

Lösung: $\overline{AE} = 4{,}4\ cm$
Abstand E von $\overline{BC}$ ist $4{,}4\ cm$.

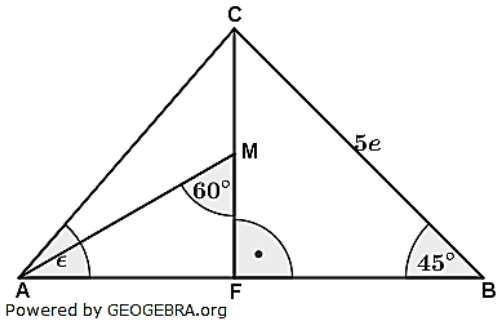
Tipp: Erst Kosinussatz dann Sinussatz für das Dreieck ABD verwenden.



Aufgabe W4b/2003

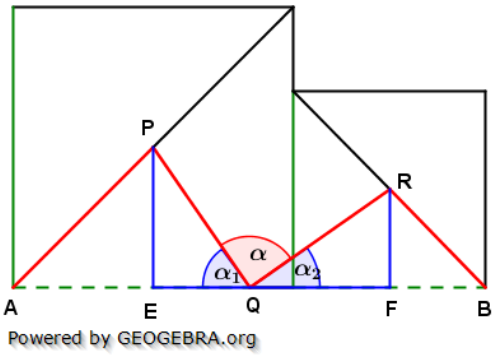
Im nebenstehenden Dreieck ABC ist M der Mittelpunkt von $\overline{CF}$.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass gilt:.

$$tan\epsilon = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$



Lösung Aufgabe W1a/2003

Lösungslogik



Berechnung der Teilstrecke $\overline{AP}$ über die halbe Diagonale des großen Quadrates.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{RB}$ über die halbe Diagonale des kleinen Quadrates.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{PQ}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{QR}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{QF}$ und $\overline{FR}$.
Berechnung der Teilstrecke $\overline{PR}$ über den Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{PG}$ und $\overline{GR}$.
Berechnung der Länge des Streckenzuges $APQRB$.
Berechnung des Winkels α_1 über den sin.
Berechnung des Winkels α_2 über den sin.
Berechnung des Winkels α als Ergänzungswinkel.

Klausuraufschrieb

$\overline{AP}$: $\overline{AP} = \frac{d_{10}}{2} = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{2} = 7{,}07$

$\overline{RB}$: $\overline{RB} = \frac{d_7}{2} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} = 4{,}95$

$\overline{EQ}$: $\overline{EQ} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{a_{10}}{2} = \frac{10+7-10}{2} = 3{,}5$

$\overline{PQ}$: $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{EP}^2 + \overline{EQ}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{10}}{2}\right)^2 + \overline{EQ}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{PQ} = \sqrt{5^2 + 3{,}5^2} = 6{,}1$

$\overline{QF}$: $\overline{QF} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{a_7}{2} = \frac{10+7-7}{2} = 5$

$\overline{QR}$: $\overline{QR} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \overline{FR}^2} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \left(\frac{a_7}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{QR} = \sqrt{5^2 + 3{,}5^2} = 6{,}1$

$\overline{APQRB}$: $\overline{APQRB} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RB} = 7{,}07 + 6{,}1 + 6{,}1 + 4{,}95 = 24{,}22$

Der Streckenzug $APQR$ ist $24{,}2\ cm$ lang.

α_1: $sin\alpha_1 = \frac{\overline{EP}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{6{,}1} = 0{,}81967$

$\alpha_1 = sin^{-1}(0{,}81967) = 55{,}05°$

α_2: $sin\alpha_2 = \frac{\overline{FR}}{\overline{QR}} = \frac{3{,}5}{6{,}1} = 0{,}57377$

$\alpha_2 = sin^{-1}(0{,}57377) = 35{,}01°$

α: $\alpha = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 = 180° - 55{,}05° - 35{,}01° = 98{,}94°$

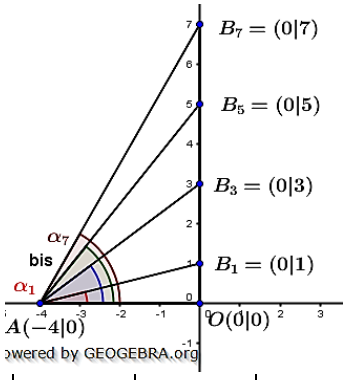
Der Winkel RQP ist $90°$ groß.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2003

Lösungslogik

In nebenstehender Grafik sind aus Übersichtsgründen nur die Werte 1; 3; 5 und 7 dargestellt.
Der jeweilige Winkel α ergibt sich aus dem tan über $tan\alpha = \frac{y_B}{4}$.
Tabelle und Schaubild siehe Klausuraufschrieb.



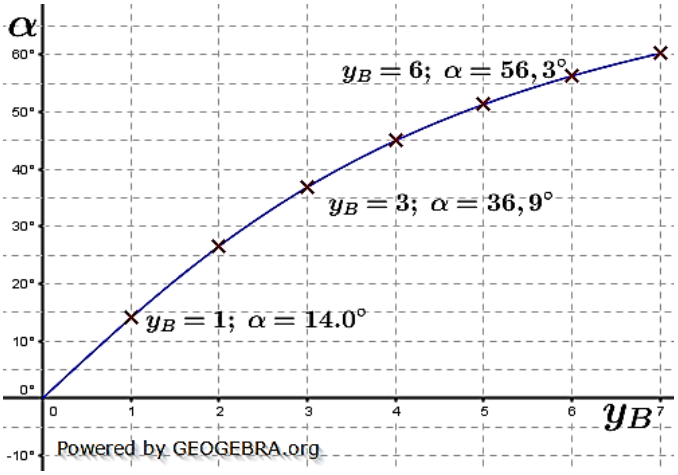
Klausuraufschrieb

α_1 bis α_7: $tan\alpha = \frac{y_B}{4}$; $\alpha = \tan^{-}\frac{y_B}{4}$

y_B	0	1	2	3	4	5	6	7
α	0,0°	14,0°	26,6°	36,9°	45,0°	51,3°	56,3°	60,3°

$\alpha = 30°$: $tan30° = \frac{y_B}{4}$
$y_B = 4 \cdot tan30° = 2{,}3\ LE$
$A_{A0B} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}3 = 4{,}6\ FE$

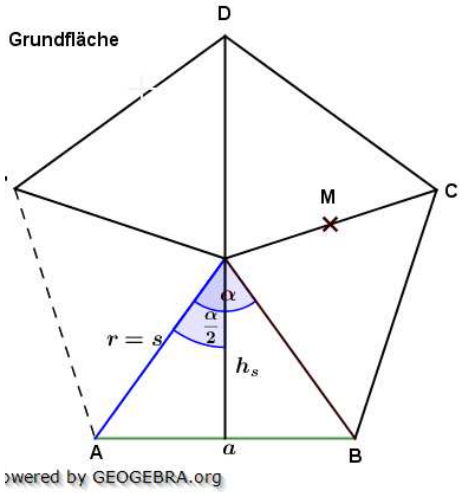
$\alpha = 60°$: $tan60° = \frac{y_B}{4}$
$y_B = 4 \cdot tan60° = 6{,}9\ LE$
$A_{A0B} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6{,}9 = 13{,}8\ FE$

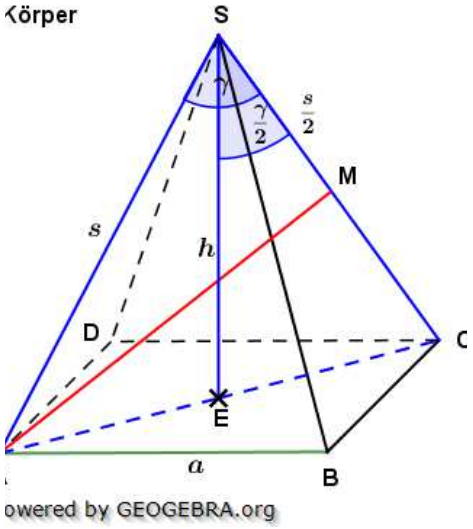


Lösung W2b/2003

Lösungslogik

Volumen der Pyramide über $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ (quadratische Pyramide).
Berechnung des Innenwinkels α und $\frac{\alpha}{2}$ des Fünfecks.
Berechnung von $r = s_{Pyr}$ über den $sin\frac{\alpha}{2}$. Hieraus folgt $\frac{s_{Pyr}}{2}$.
Berechnung der Strecke $\overline{AE}$ (entspricht der halben Diagonalen der quadratischen Grundfläche).
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens der Pyramide.
Berechnung von $\frac{\gamma}{2}$ über den cos von h zu s, hieraus folgt γ.
Berechnung der Strecke $\overline{AM}$ über den Kosinussatz mit s, $\frac{s}{2}$ und γ.





Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

α: $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$.

r: $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ | $\cdot r;\ : sin\frac{\alpha}{2}$

$r = \frac{\frac{a}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3{,}8}{sin36°} = 6{,}46$

s: $s = r = 6{,}46$ hieraus $\frac{s}{2} = 3{,}23$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot \sqrt{2} = 5{,}37$

h: $h = \sqrt{s^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{6{,}46^2 - 5{,}37^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{12{,}8947} = 3{,}59$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 7{,}6^2 \cdot 3{,}59 = 69{,}12$

$\frac{\gamma}{2}$: $cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h}{2} = \frac{3{,}59}{6{,}46} = 0{,}5557$

$\frac{\gamma}{2} = cos^{-1}(0{,}5557) = 56{,}24°$ hieraus $\gamma = 112{,}5°$

$\overline{AM}$: $\overline{AM}^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$= 6{,}46^2 + 3{,}23^2 - 2 \cdot 6{,}46 \cdot 3{,}23 \cdot cos112{,}5° = 68{,}1345$

$\overline{AM} = \sqrt{68{,}1345} = 8{,}2544$

Das Volumen der Pyramide beträgt $69{,}1\ cm^3$. Die Strecke $\overline{AM}$ ist $8{,}3\ cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2003

Lösungslogik

Aufstellung der Funktionsgleichung p_2.
Bestimmung der Schnittpunkte von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.
Bestimmung der Funktionsgleichung von g über die beiden Schnittpunkte.
Erstellung einer Graphik, Markieren des Dreiecks.
Bestimmung der Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenachsen.
Berechnung der Seitenlängen und des Umfang des Dreiecks.
Bestimmung der Innenwinkel α und β über tan.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = x^2 - 4x + 6$

Funktionsgleichung p_2:

p_2: $y = -x^2 + 6$ | in x–Richtung unverschobene, nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt in $S_2(0|6)$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 4x + 6 = -x^2 + 6$ | $+x^2;\ -6$

$2x^2 - 4x = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x = 0$ | ausklammern

$x(x-2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0;\quad x - 2 = 0 \Longrightarrow x_2 = 2$

$y_1 = -x_1^2 + 6 = 6$ | y_1 aus p_2

$y_2 = -x_2^2 + 6 = -4 + 6 = 2$ | y_2 aus p_2

Die Schnittpunkte sind $P(0|6)$ und $Q(2|2)$.

Geradengleichung durch P und Q:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{2-0} = -2$

$y = -2x + b$ | Punktprobe mit $P(0|6)$

$6 = -2 \cdot 0 + b$

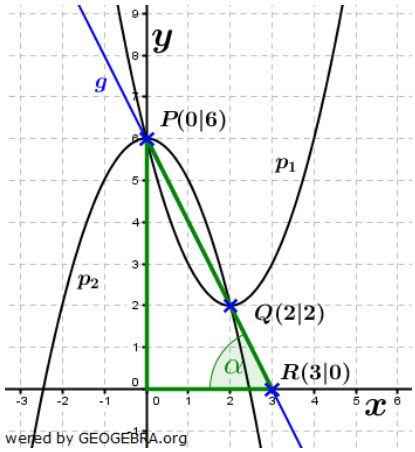
$b = 6$

g: $y = -2x + 6$

Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen:

$0 = -2x + 6 \Longrightarrow x = 3$ Schnittpunkt x-Achse

Schnittpunkt Gerade mit der x-Achse ist $R(3|0)$.



Umfang des Dreiecks OPR:

u_{OPR}: $u = \overline{OP} + \overline{OR} + \overline{PR}$

$\overline{OP} = 6;\ \overline{OR} = 3$

$\overline{PR} = \sqrt{6^2 + 3^2} \approx 6{,}7$ | Satz des Pythagoras

$u = 6 + 3 + 6{,}7 = 15{,}7$

Der Umfang des Dreiecks OPR beträgt etwa $15{,}7\ LE$.

Innenwinkel des Dreiecks OPR:

α: $tan(\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{6}{3} = 2 \Longrightarrow \alpha \approx 63{,}4°$

β: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Die Innenwinkel des Dreiecks OPR betragen $\alpha = 63{,}4°$, $\beta = 26{,}6°$ und $\gamma = 90°$.

Lösung W3b/2003

$$\frac{2x+1}{3x-9}-\frac{x+2}{2x+6}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-9}$$

Nenner 1:	$3x-9$	$3(x-3)$
Nenner 2:	$2x+6$	$2(x+3)$
Nenner 3:	x^2-9	$(x+3)(x-3)$
Hauptnenner:		$2\cdot 3\cdot(x+3)(x-3)$

$2\cdot 3\cdot(x+3)(x-3)=0$ für $x_1=3$ und $x_2=-3$.

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$

$$\frac{(2x+1)\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{3(x-3)}}-\frac{(x+2)\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{2(x+3)}}=\frac{(x^2+2x-1)\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{(x+3)(x-3)}}{\cancel{(x+3)(x-3)}}$$

$2(2x+1)(x+3)-3(x+2)(x-3)=6(x^2+2x-1)$ | ausmultiplizieren

$2(2x^2+6x+x+3)-3(x^2-3x+2x-6)=6x^2+12x-6$

| Restklammern auflösen

$4x^2+14x+6-3x^2+3x+18=6x^2+12x-6$ | $-6x^2;\ -12x;\ +6$

$-5x^2-5x+30$ | $:(-5)$

$x^2+x-6=0$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+6}=-0{,}5\pm\sqrt{6{,}25}=-0{,}5\pm 2{,}5$

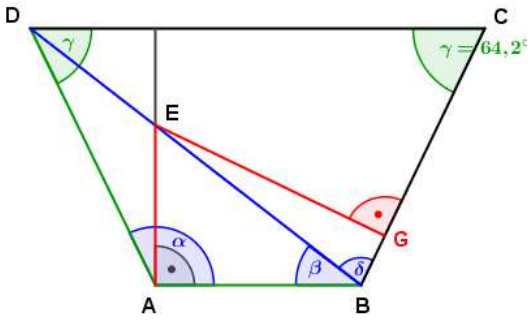
$x_1=-2$ $\qquad x_2=-3$

Wegen $x_2=-3\notin\mathbb{D}$ ist $\mathbb{L}=\{-2\}$.

Lösung W4a/2003

Lösungslogik (einfach)

Die Strecke $\overline{BD}$ errechnet sich mit dem Kosinussatz über $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ und dem Winkel α. Danach lässt sich mit dem Sinussatz der Winkel β ermitteln.
Berechnung von $\overline{AE}$ dann über den $tan\beta$.
Berechnung von δ.
Berechnung von $\overline{EB}$ mit dem Satz des Pythagoras.
Berechnung $\overline{EG}$ als Abstand des Punktes E von $\overline{EG}$ mit $sin\delta$.



Klausuraufschrieb

$\overline{DB}$: $\quad \overline{DB}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cdot cos\alpha$ | Kosinussatz

α: $\quad \alpha=\frac{360°-2\cdot\gamma}{2}=\frac{360°-2\cdot 61{,}2°}{2}=115{,}8°$ | wegen gleichschenkligem Trapez

$\overline{DB}=\sqrt{7{,}8^2+5{,}6^2-2\cdot 7{,}8\cdot 5{,}6\cdot cos115{,}8°}$

$\overline{DB}=11{,}41$

β: $\quad \frac{sin\beta}{\overline{AD}}=\frac{sin\alpha}{\overline{DB}}$ | $\cdot\overline{AD}$

$sin\beta=\frac{sin\alpha}{\overline{DB}}\cdot\overline{AD}=\frac{sin115{,}8°}{11{,}41}\cdot 7{,}8=0{,}6155$ | Sinussatz

$\beta=sin^{-1}(0{,}58984)=37{,}98°$

$\overline{A:E}$: $\quad tan\beta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ | $\cdot\overline{AE}$

$\overline{AE}=\cdot\overline{AB}\cdot tan\beta=5{,}6\cdot tan37{,}98°=4{,}37$

δ: $\quad \delta=\alpha-\beta=115{,}8°-37{,}98°=77{,}82°$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{4{,}37^2 + 5{,}6^2}$ | Satz des Pythagoras

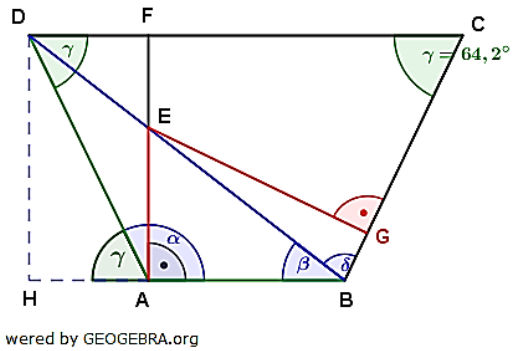
$\overline{EB} = 7{,}10$

$\overline{EG}$: $sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{EB}}$ | $\cdot \overline{EB}$

$\overline{EG} = \overline{EB} \cdot sin\delta = 7{,}1 \cdot sin77{,}82° = 6{,}94$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist etwa $4{,}4\ cm$ lang. Der Abstand des Punktes E von $\overline{BC}$ beträgt $6{,}9\ cm$.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)



Berechnung von $\overline{HD} = \overline{AF}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung $\overline{HA}$ über den Satz des Pythagoras im Dreieck ADH.
Berechnung $\overline{HB}$ aus $\overline{HA} + \overline{AB}$.
Berechnung $\overline{DB}$ über den Satz des Pythagoras im Dreieck HBD.
Berechnung von β über den tan.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den $tan\beta$
Berechnung von $\overline{EB}$ über den Satz des Pythagoras im Dreieck ABE.
Berechnung von α über die Winkelsumme im Viereck.
Berechnung von δ.
Berechnung von $\overline{EG}$ über den $sin\delta$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{HD}$: $sin\gamma = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}$ | $\cdot \overline{AD}$

$\overline{HD} = \overline{AD} \cdot sin\gamma = 7{,}8 \cdot sin64{,}2° = 7{,}0225$

$\overline{HA}$: $\overline{HA} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{HD}^2} = \sqrt{7{,}8^2 - 7{,}0225^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{HA} = 3{,}3948$

$\overline{HB}$: $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AB} = 3{,}3948 + 5{,}6 = 8{,}9948$

$\overline{DB}$: $\overline{DB} = \sqrt{\overline{HD}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{7{,}0225^2 + 8{,}9948^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{DB} = 11{,}41$

β: $tan\beta = \frac{\overline{HD}}{\overline{HB}} = \frac{7{,}0225}{8{,}9948} = 0{,}7807$

$\beta = \tan^{-1} 0{,}7807 = 37{,}98°$

$\overline{AE}$: $tan\beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AE}$

$\overline{AE} =\cdot \overline{AB} \cdot tan\beta = 5{,}6 \cdot tan37{,}98° = 4{,}37$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{4{,}37^2 + 5{,}6^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{EB} = 7{,}1033$

α: $\alpha = \frac{360° - 2 \cdot \gamma}{2} = \frac{360° - 2 \cdot 61{,}2°}{2} = 115{,}8°$ | wegen gleichschenkligem Trapez

δ: $\delta = \alpha - \beta = 115{,}8° - 37{,}98° = 77{,}82°$

$\overline{EG}$: $\quad sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{EB}} \quad | \quad \cdot \overline{EB}$

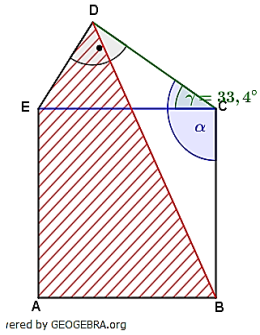
$\overline{EG} = \overline{EB} \cdot sin\delta = 7{,}1 \cdot sin77{,}82° = 6{,}94$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist etwa $4{,}4\ cm$ lang. Der Abstand des Punktes E von $\overline{BC}$ beträgt $6{,}9\ cm$.

Lösung W3a/2004

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Berechnung von $\overline{EC}$ über $cos\gamma$.
Berechnung von α.
Berechnung von $\overline{BD}$ mit dem Kosinussatz.
Berechnung von A_{ABDE} aus der Summe von $\overline{EC}^2$ und A_{ECD} abzüglich A_{BCD}.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot cos\alpha} \quad |$ Kosinussatz

$\overline{EC}$: $\quad cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}} \quad | \quad \cdot \overline{EC};\ : cos\gamma$

$\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4{,}1}{cos33{,}4°} = 4{,}91$

$\overline{BC}$: $\quad \overline{BC} = \overline{EC} = 4{,}91$

α: $\quad \alpha = 90° + \gamma = 90° + 33{,}4° = 123{,}4°$

$\overline{BD} = \sqrt{4{,}1^2 + 4{,}91^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 4{,}91 \cdot cos123{,}4°} = 7{,}94$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = A_{ABCD} + A_{ECD} - A_{BCD}$

A_{ABCD}: $\quad A_{ABCD} = \overline{EC}^2 = 4{,}91^2 = 24{,}11\ cm^2$

A_{ECD}: $\quad A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\gamma \quad |$ trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}91 \cdot 4{,}1 \cdot sin33{,}4° = 5{,}54\ cm^2$

A_{BCD}: $\quad A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\alpha \quad |$ trigonometrischer Flächeninhalt.

$A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}91 \cdot 4{,}1 \cdot sin123{,}4° = 8{,}40\ cm^2$

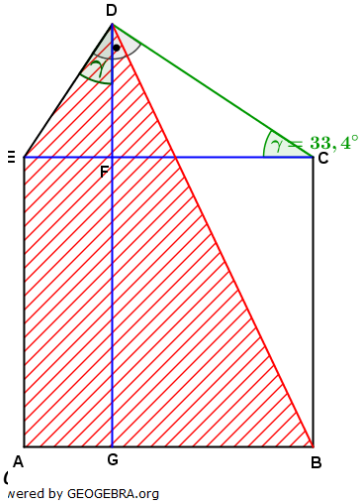
A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = 24{,}11 + 5{,}54 - 8{,}40 = 21{,}25\ cm^2$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7{,}9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21{,}3\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{EC} = \overline{AB}$ über den $cos\gamma$.
Berechnung von $\overline{FD}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den $tan\gamma$.
Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{EC}$ und $\overline{EF}$.
Die rote Fläche lässt sich jetzt berechnen aus:
Fläche Rechteck $AGFE$ + Fläche Dreieck EFD + Fläche Dreieck BDG.
Berechnung der Strecke $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{EC}$: $cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}$ | $\cdot \overline{EC}$; (

$\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4{,}1}{cos33{,}4°} = 4{,}91$

$\overline{FD}$: $sin\gamma = \frac{\overline{FD}}{\overline{CD}}$ | $\cdot \overline{CD}$

$\overline{FD} = \overline{CD} \cdot sin\gamma = 4{,}1 \cdot sin33{,}4° = 2{,}257$

$\overline{EF}$: $tan\gamma = \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}}$ | $\cdot \overline{ED}$; $tan\gamma$

$\overline{EF} = \frac{\overline{FD}}{tan\gamma} = \frac{2{,}257}{tan33{,}4°} = 3{,}423$

$\overline{FC}$: $\overline{FC} = \overline{EC} - \overline{EF} = 4{,}91 - 3{,}423 = 1{,}487$

A_{ABDE}: $A_{ABDE} = A_{AGFE} + A_{EFD} + A_{BDG}$

A_{AGFE}: $A_{AGFE} = \overline{EF} \cdot \overline{AB} = 1{,}4882 \cdot 4{,}91 = 7{,}307$

A_{EFD}: $A_{EFD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4882 \cdot 2{,}257 = 1{,}6794$

A_{BDG}: $A_{BDG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FC} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3{,}423 \cdot (4{,}91 + 2{,}257) = 12{,}2663$

A_{ABDE}: $A_{ABDE} = 7{,}307 + 1{,}6794 + 12{,}2663 = 21{,}2527$

$\overline{BD}$: $\overline{BD} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

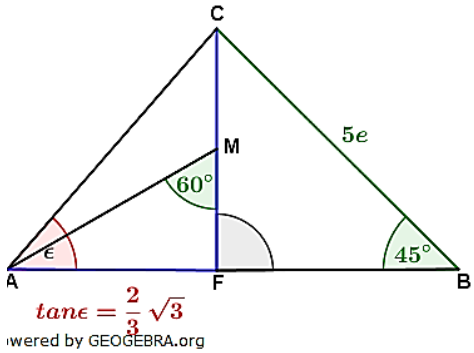
$\overline{BD} = \sqrt{3{,}423^2 + (4{,}9112 + 2{,}0257)^2} = 7{,}9435$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7{,}9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21{,}3\ cm^2$.

Lösung W4b/2003

Lösungslogik

Definition $tan\epsilon = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$.
Berechnung von $\overline{CF}$ über den $sin45°$.
Bestimmung von $\overline{FM}$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den $tan60°$.
Einsetzen von $\overline{CF}$ und $\overline{AF}$ in die Definitionsgleichung und Vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$tan\epsilon = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$

$\overline{CF}$: $sin45° = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{CF} = \overline{BC} \cdot sin45° = 5e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 2{,}5e\sqrt{2}$

$\overline{FM}$: $\overline{FM} = 0{,}5 \cdot \overline{CF} = 0{,}5 \cdot 2{,}5e\sqrt{2} = 1{,}25e\sqrt{2}$

$\overline{AF}$: $tan60° = \frac{\overline{AF}}{\overline{FM}}$ | $\cdot \overline{FM}$

$\overline{AF} = \overline{FM} \cdot tan60° = 1{,}25e\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$tan\epsilon = \frac{2{,}5e\sqrt{2}}{1{,}25e\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)

$tan\epsilon = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2004

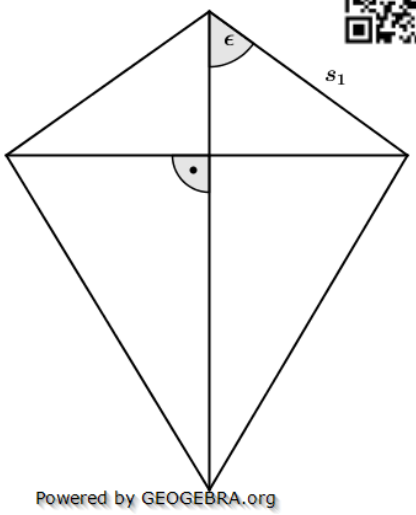
Ein Körper besteht aus zwei quadratischen Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche. Die Skizze zeigt den Diagonalschnitt des Körpers.
Gegeben sind:

$s_1 = 12{,}4\ cm$

$\epsilon = 52{,}8\,°$

Das Volumen der unteren Pyramide ist doppelt so groß wie das der oberen.
Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

Lösung: $O = 748{,}5\ cm^2$



Aufgabe W1b/2004

Die Zeichnung stellt das Netz eines Würfels mit der Kantenlänge a dar.
Es gilt:

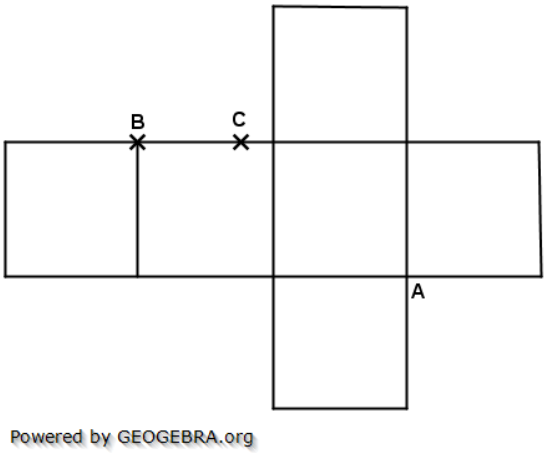
$\overline{BC} = \frac{3}{4}a$

Zeichnen Sie ein Schrägbild des Körpers mit dem Dreieck ABC maßgerecht für $a = 6\ cm$.
Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a mit der Formel berechnen lässt:

$A = \frac{3}{8}a^2\sqrt{2}.$

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ im Körper in Abhängigkeit von a ohne Verwendung gerundeter Werte.

Lösung: $\overline{AC} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$



Aufgabe W2a/2004

Die Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 + 4x + 6$.
Verschiebt man diese Parabel um drei Einheiten nach rechts und um drei Einheiten nach unten, entsteht die Parabel p_2 mit dem Scheitelpunkt S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts Q der beiden Parabeln.
Durch S_2 und Q verläuft die Gerade g. Die Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und geht durch den Scheitelpunkt S_1 der Parabel p_1.
Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden h.

Lösung: $Q(-1|3);\ y = -2x + 6.$

Aufgabe W2b/2004

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{x^2+25x+100}{2x^2+20x+50} = \frac{2x+3}{x+5} - \frac{x-6}{2x+10}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-5\}; \quad \mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe W3a/2004

Das Fünfeck $ABCDE$ besteht aus einem Quadrat und einem rechtwinkligen Dreieck.
Gegeben sind:

$\overline{CD} = 4{,}1\ cm$

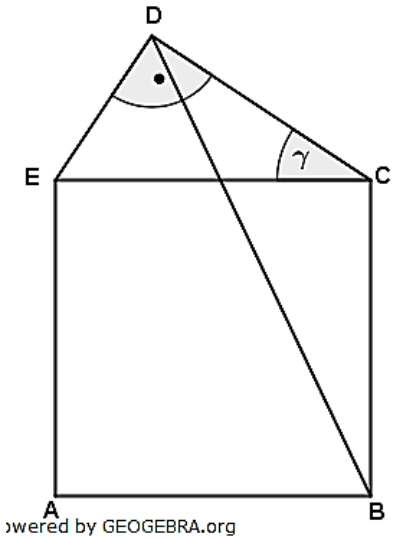
$\gamma = 33{,}4°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{BD}$ und den Flächeninhalt des Vierecks $ABDE$.

Lösung: $\overline{BD} = 7{,}9\ cm$

$A_{ABDE} = 21{,}3\ cm^2$

Tipp: Kosinussatz für $\overline{BD}$, zweimal trigonometrischen Flächeninhalt für A_{BCD} und A_{ECD}.



Aufgabe W3b/2004

Im Rechteck $ABCD$ gilt:

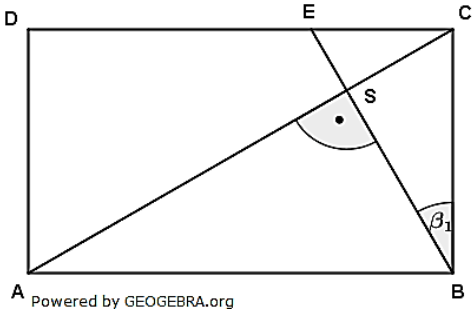
$\overline{AD} = 2e$

$\beta_1 = 30°$

Zeigen Sie dass sich der Flächeninhalt des Vierecks $ASED$ mit der Formel

$$A = \frac{11}{6}e^2\sqrt{3}$$

berechnen lässt.



Aufgabe W4a/2004

Das Bild zeigt Parabeln und Geraden. Ordnen Sie jedem Schaubild die richtige Funktionsgleichung zu.
Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

(2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$

(3) $y = (x-4)^2 - 3$

(4) $y = (x+4)^2 - 3$

(5) $y = x^2 - 2x - 1$

(6) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

(7) $y = x^2 - 4x + 5$

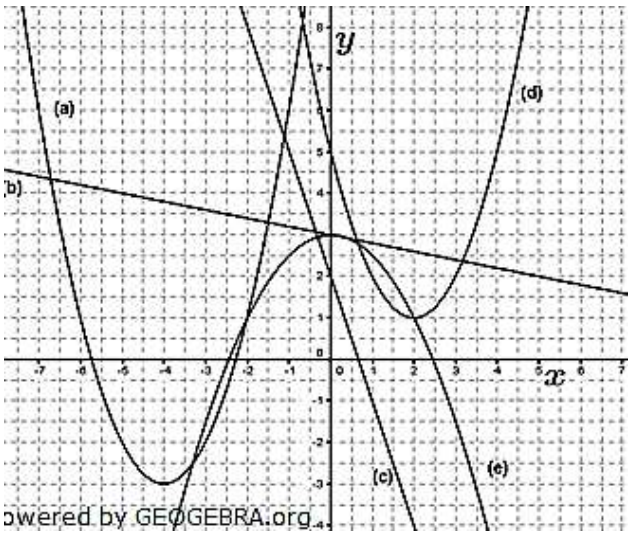
(8) $y = -2x - 3$

(9) $y = -3x + 2$

(10) $y = -2x + 3$

(11) $y = -0{,}5x + 3$

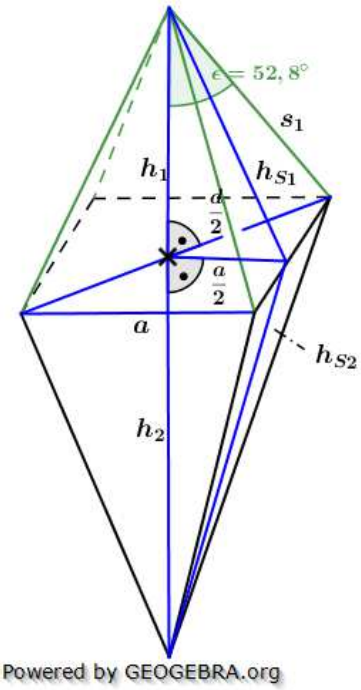
(12) $y = -\frac{1}{5}x + 3$



Lösung W1a/2004

Lösungslogik

Zur Beachtung: die Skizze zeigt den Diagonalschnitt, nicht den Parallelschnitt.
Berechnung von $\frac{d}{2}$ über den $sin\epsilon$ und daraus d.
Berechnung von h_1 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Kantenlänge a der quadratischen Grundfläche über d.
Berechnung von h_{S_1} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von V_1 über die Volumenformel.
Berechnung von V_2.
Berechnung von h_2 über die Volumenformel.
Berechnung von h_{S_2} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M_1 und M_2 sowie $O_{Körper}$.



Klausuraufschrieb

$\frac{d}{2}$: $sin\epsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s_1}$ | $\cdot s_1$

$\frac{d}{2} = s_1 \cdot sin\epsilon = 12{,}4 \cdot sin52{,}8° = 9{,}88$

d: $d = 2 \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot 9{,}88 = 19{,}76$

h_1: $h_1 = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 9{,}88^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_1 = \sqrt{56{,}1456} = 7{,}5$

a: $d = a \cdot \sqrt{2}$ | $:\sqrt{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}76}{\sqrt{2}} = 13{,}97$

$\frac{a}{2}$: $\frac{a}{2} = 0{,}5 \cdot a = 7{,}0$

h_{S_1}: $h_{S_1} = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 7{,}0^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{S_1} = \sqrt{104{,}76} = 10{,}24$

V_1: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 13{,}79^2 \cdot 7{,}5 = 487{,}9$

V_2: $V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 487{,}9 = 975{,}8$

h_2: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_2$ | $\cdot 3;\ : a^2$

$h_2 = \frac{3 \cdot V_2}{a^2} = \frac{3 \cdot 975{,}8}{13{,}97^2} = 15{,}0$

h_{S_2}: $h_{S_2} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15{,}0^2 + 7{,}0^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{S_2} = \sqrt{274} = 16{,}55$

M_1: $M_1 = 2 \cdot a \cdot h_{S_1} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 10{,}24 = 286{,}10$

M_2: $M_2 = 2 \cdot a \cdot h_{S_2} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 16{,}55 = 462{,}40$

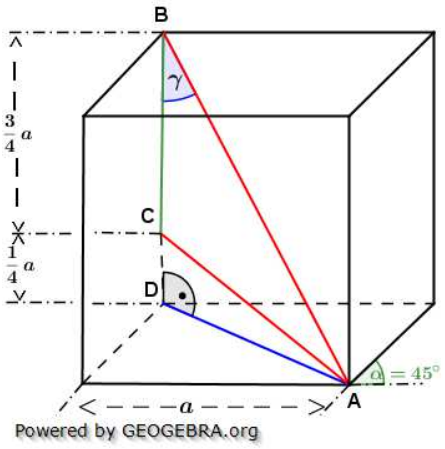
O_{Ges}: $O_{Ges} = M_1 + M_2 = 286{,}10 + 462{,}40 = 748{,}5$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $748{,}5\ cm^2$.

Lösung Aufgabe W1b/2004

Lösungslogik

Die Skizze zeigt das Schrägbild des gegebenen Würfels.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Raumdiagonale im Würfel. Der Winkel γ ist dadurch $45°$.
Im Dreieck ABC ist die Strecke $\overline{AD}$ als Flächendiagonale der Grundfläche gleichzeitig Höhe auf die Seite BC.
Berechnung der Dreiecksfläche über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a \cdot \sqrt{2}$ | Flächendiagonale

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} a \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{8} a^2 \sqrt{2}$ **q.e.d.**

$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{2a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \sqrt{\frac{33}{16}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$

Lösung W2a/2004

Lösungslogik

Umstellung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Bestimmung des Scheitelpunkts von p_2 aus der Aufgabenstellung.
Bestimmung des Schnittpunkts Q von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzen.
Aufstellen der Geradengleichung g durch S_2 und Q.
Aufstellen der zu g parallelen Geradengleichung h durch S_1.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = x^2 + 4x + 6$

Scheitelpunkt von p_1:

$y = (x+2)^2 + 2$ | quadratische Ergänzung

$S_1(-2|2)$

Scheitelpunktverschiebung gem. Aufgabenstellung:

S_2: $S_2(-2+3|2-3)$

$S_2(1|-1)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x-1)^2 - 1$ | Scheitelpunktgleichung p_2

$y = x^2 - 2x$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 + 4x + 6 = x^2 - 2x$ | $-x^2;\ +2x$

$6x + 6 = 0$

$x_Q = -1;\quad y_Q = x_Q^2 - 2x_Q = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $Q(-1|3)$.

Geradengleichung durch S_2 und Q:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{-1-1} = -2$

$y = -2x + b$ | Punktprobe mit $S_2(1|-1)$

$-1 = -2 \cdot 1 + b$

$b = 1$

g: $y = -2x + 1$

Parallele Gerade h zu g:

h: $y = -2x + b$ | parallel heißt gleiche Steigung $m = -2$

$2 = -2 \cdot (2) + b$ | Punktprobe mit $S_1(-2|2)$

$b = 6$

h: $y = -2x + 6$

Lösung W2b/2004

$$\frac{x^2 + 25x + 100}{2x^2 + 20x + 50} = \frac{2x+3}{x+5} - \frac{x-6}{2x+10}$$

Nenner 1:	$2x^2 + 20x + 50$	$2(x+5)^2$
Nenner 2:		$(x+5)$
Nenner 3:	$2x + 10$	$2(x+5)$
Hauptnenner:		$2 \cdot (x+5)^2$

$2 \cdot (x+5)^2 = 0$ für $x_1 = -5$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-5\}$

$$\frac{(x^2 + 25x + 100) \cdot \cancel{2 \cdot (x+5)^2}}{\cancel{2 \cdot (x+5)^2}} = \frac{(2x+3) \cdot 2 \cdot (x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+5}} - \frac{(x-6) \cdot \cancel{2} \cdot (x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{2(x+5)}}$$

$x^2 + 25x + 100 = 2(2x+3)(x+5) - (x-6)(x+5)$ | ausmultiplizieren

$x^2 + 25x + 100 = 2(2x^2 + 10x + 3x + 15) - (x^2 + 5x - 6x - 30)$

| Restklammern auflösen

$x^2 + 25x + 100 = 4x^2 + 26x + 30 - x^2 + x + 30$ | $-3x^2;\ -27x;\ -60$

$-2x^2 - 2x + 40 = 0$ | $:(-2)$

$x^2 + x - 20 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 20} = -0{,}5 \pm \sqrt{20{,}25} = -0{,}5 \pm 4{,}5$

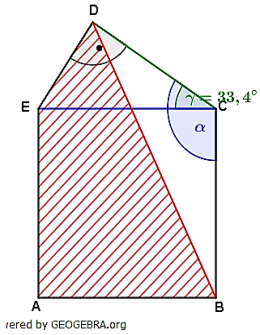
$x_1 = 4;\quad x_2 = -5$

Wegen $x_2 = -5 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \{4\}$ die einzigste Lösung.

Lösung W3a/2004

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{EC}$ über $cos\gamma$.
Berechnung von α.
Berechnung von $\overline{BD}$ mit dem Kosinussatz.
Berechnung von A_{ABDE} aus der Summe von $\overline{EC}^2$ und A_{ECD} abzüglich A_{BCD}.



Klausuraufschrieb

$\overline{BD}$: $\overline{BD} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot cos\alpha}$ | Kosinussatz

$\overline{EC}$: $cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}$ | $\cdot \overline{EC}$; $: cos\gamma$

$\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4,1}{cos33,4°} = 4,91$

$\overline{BC}$: $\overline{BC} = \overline{EC} = 4,91$

α: $\alpha = 90° + \gamma = 90° + 33,4° = 123,4°$

$\overline{BD} = \sqrt{4,1^2 + 4,91^2 - 2 \cdot 4,1 \cdot 4,91 \cdot cos123,4°} = 7,94$

A_{ABDE}: $A_{ABDE} = A_{ABCD} + A_{ECD} - A_{BCD}$

A_{ABCD}: $A_{ABCD} = \overline{EC}^2 = 4,91^2 = 24,11\ cm^2$

A_{ECD}: $A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\gamma$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4,91 \cdot 4,1 \cdot sin33,4° = 5,54\ cm^2$

A_{BCD}: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\alpha$ | trigonometrischer Flächeninhalt.

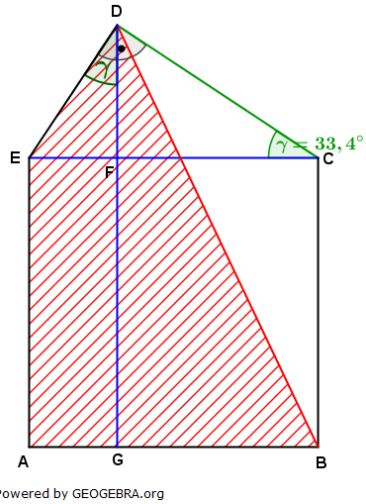
$A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4,91 \cdot 4,1 \cdot sin123,4° = 8,40\ cm^2$

A_{ABDE}: $A_{ABDE} = 24,11 + 5,54 - 8,40 = 21,25\ cm^2$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7,9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21,3\ cm^2$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{EC} = \overline{AB}$ über den $cos\gamma$.
Berechnung von $\overline{FD}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den $tan\gamma$.
Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{EC}$ und $\overline{EF}$.
Die rote Fläche lässt sich jetzt berechnen aus:
Fläche Rechteck $AGFE$ + Fläche Dreieck EFD + Fläche Dreieck BDG.
Berechnung der Strecke $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{EC}$: $cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}$ | $\cdot \overline{EC}$; $: cos\gamma$

$\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4,1}{cos33,4°} = 4,91$

$\overline{FD}$: $sin\gamma = \frac{\overline{FD}}{\overline{CD}}$ | $\cdot \overline{CD}$

$\overline{FD} = \overline{CD} \cdot sin\gamma = 4,1 \cdot sin33,4° = 2,257$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{EF}$: $\quad tan\gamma = \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{FD};\ : tan\gamma$

$\overline{EF} = \frac{\overline{FD}}{tan\gamma} = \frac{2{,}257}{tan33{,}4°} = 3{,}423$

$\overline{FC}$: $\quad \overline{FC} = \overline{EC} - \overline{EF} = 4{,}91 - 3{,}423 = 1{,}487$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = A_{AGFE} + A_{EFD} + A_{BDG}$

A_{AGFE}: $\quad A_{AGFE} = \overline{EF} \cdot \overline{AB} = 1{,}4882 \cdot 4{,}91 = 7{,}307$

A_{EFD}: $\quad A_{EFD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4882 \cdot 2{,}257 = 1{,}6794$

A_{BDG}: $\quad A_{BDG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FC} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3{,}423 \cdot (4{,}91 + 2{,}257) = 12{,}2663$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = 7{,}307 + 1{,}6794 + 12{,}2663 = 21{,}2527$

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right)^2}$ $\quad |$ Satz des Pythagoras

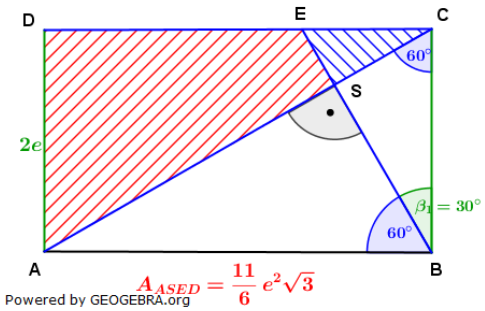
$\overline{BD} = \sqrt{3{,}423^2 + (4{,}9112 + 2{,}0257)^2} = 7{,}9435$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7{,}9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21{,}3\ cm^2$.

Lösung W3b/2004

Lösungslogik

Die Fläche des Vierecks A_{ASED} errechnet sich aus der Fläche des Dreiecks A_{ACD} abzüglich der Fläche des Dreiecks A_{ESC}.
Berechnung von $\overline{DC}$ über den $tan30°$.
Bestimmung von $\overline{SC}$ über den $sin30°$.
Berechnung von $\overline{SE}$ über den $tan30°$.
Berechnung von A_{ACD} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{ESC} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{ASED} und Vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$A_{ASED} = A_{ACD} - A_{ESC}$

$\overline{DC}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{DC};\ : tan30°$

$\overline{DC} = \frac{\overline{AD}}{tan30°} = \frac{2e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}}$

$\overline{SC}$: $\quad sin30° = \frac{\overline{SC}}{\overline{BC}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\overline{SC} = \overline{BC} \cdot sin30° = 2e \cdot 0{,}5 = e$

$\overline{SE}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}}$ $\quad | \quad \cdot \overline{SC}$

$\overline{SE} = \overline{SC} \cdot tan30° = e \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{e\sqrt{3}}{3}$

A_{ACD}: $\quad A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{6e}{\sqrt{3}} = \frac{6e^2}{\sqrt{3}}$

A_{ESC}: $\quad A_{ESC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{SE} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{e^2\sqrt{3}}{6}$

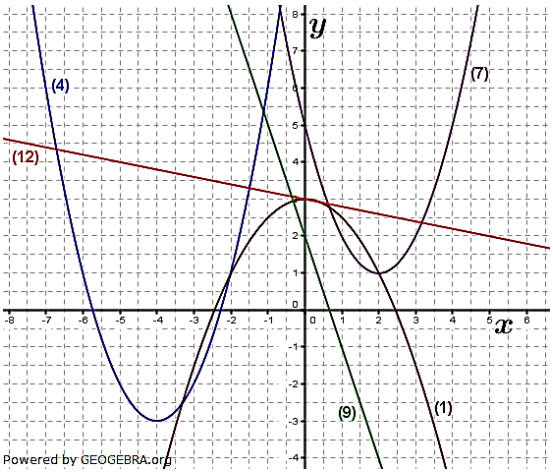
A_{ASED}: $\quad A_{ASED} = \frac{6e^2}{\sqrt{3}} - \frac{e^2\sqrt{3}}{6} = \frac{36e^2 - e^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}} = \frac{36e^2 - 3e^2}{6\cdot\sqrt{3}}$

$= \frac{33e^2}{6\cdot\sqrt{3}}$ $\quad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$A_{ASED} = \frac{33e^2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{33e^2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 3} = \frac{11}{6}e^2\sqrt{3}$ $\quad$ **q.e.d.**

Lösung W4a/2004

<u>Klausuraufschrieb</u>



(a) gehört zur Gleichung (4)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(-4|-3)$

(b) gehört zur Gleichung (12)
Gerade mit negativer Steigung $m = -\frac{1}{5}$ und y–Achsenabschnitt $S_y(0|3)$.

(c) gehört zur Gleichung (9)
Gerade mit negativer Steigung $m = -3$ und y–Achsenabschnitt $S_y(0|2)$.

(d) gehört zur Gleichung (7)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Verschiebung nach rechts und nach oben, $S(2|1)$.

(e) gehört zur Gleichung (1)
Nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit Scheitelpunkt $S(0|3)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2005

Für die quadratische Pyramide gilt:

$\overline{AB} = 5{,}6\ cm$

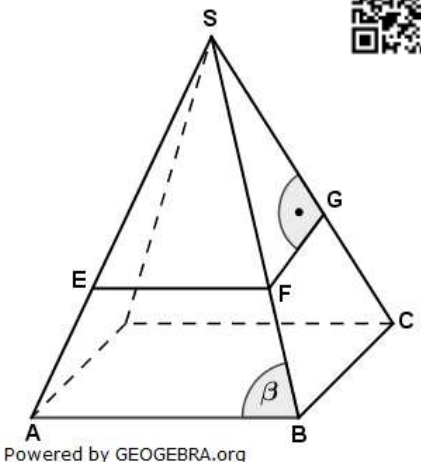
$\beta = 65{,}0°$.

$\overline{AE} = \overline{BF} = 3{,}0\ cm$

Berechnen Sie die Länge $\overline{GF}$ sowie den Flächeninhalt des Vierecks $BCGF$.

Lösung: $\overline{FG} = 2{,}8\ cm$

$A_{BCGF} = 13{,}6\ cm^2$

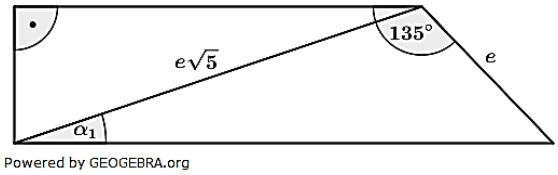


Aufgabe W1b/2005

Gegeben ist das rechtwinklige Trapez.

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass gilt:

$$tan\alpha_1 = \frac{1}{3}.$$



Aufgabe W2a/2005

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = x^2 + 4x + 1$.

Durch den Scheitelpunkt der Parabel und durch den Punkt $P(6|5)$ geht die Gerade g_1.

Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g_1.

Eine zweite nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(3|y_2)$.

Er liegt auf der Geraden g_1.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts A beider Parabeln.

Durch den Schnittpunkt A verläuft eine zu g_1 parallele Gerade g_2. Die Gerade g_2 schneidet die Parabel p_2 in einem weiteren Punkt.

Berechnen Sie dessen Koordinaten.

Lösung: g_1: $y = x - 1$; $A(1|6)$; $B(6|11)$

Aufgabe W2b/2005

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$$\frac{-2x^2 + 57x - 21}{6(x-4)(x+3)} = \frac{2x+1}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x+6}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3; 4\}$; $\mathbb{L} = \{\frac{5}{3}\}$

Aufgabe W3a/2005

Von einer regelmäßigen neunseitigen Pyramide sind bekannt:

$M = 300\ cm^2$ (Mantelfläche)

$a = 6{,}4\ cm$ (Grundkante)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung: $V = 473\ cm^3$

Aufgabe W3b/2005

Ein Kreis wird in zwei Kreisausschnitte geteilt. Beide Ausschnitte bilden jeweils den Mantel eines Kegels (siehe Skizze).

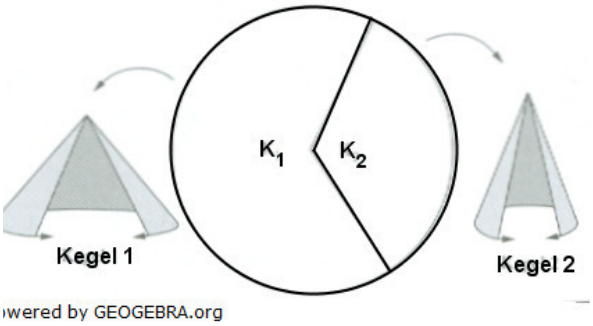
Für Kegel 1 gilt:

$V_1 = 12\pi e^3$.

$h_1 = 4e$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Radus von Kegel 2 gilt:

$r_2 = 2e$



Aufgabe W4b/2005

Im Dreieck ABC liegt das Trapez $ADEF$.

Gegeben sind:

$\overline{AF} = 7{,}1\ cm$

$\overline{FE} = 5{,}0\ cm$

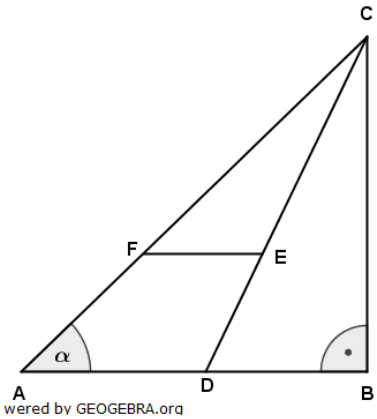
$\overline{BC} = 14{,}0\ cm$

$\alpha = 44{,}0°$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ADEF$.

Lösung: $A_{ADEF} = 31{,}4\ cm^2$

Tipp: Zweiter Strahlensatz für $\overline{AD}$.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2005

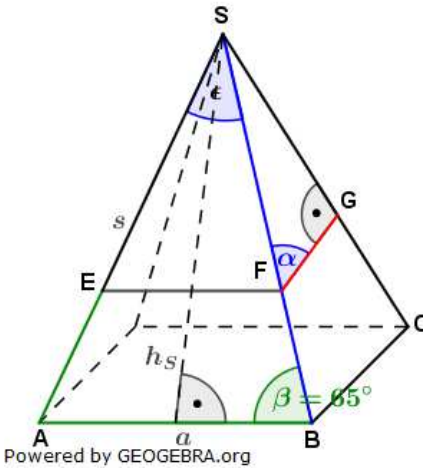
Lösungslogik

Für die Strecke $\overline{FG}$:

Berechnung des Spitzenwinkels ϵ über die Ergänzungswinkel.
Berechnung von s über den $cos\beta$.
Berechnung von $\overline{FS}$ aus der Differenz von s und $\overline{BF}$.
Berechnung von α über die Ergänzungswinkel.
Berechnung von $\overline{FG}$ über den $cos\alpha$.

Für die Fläche $BCGF$:

Berechnung der Seitenfläche der Pyramide über die trigonometrische Flächenformel.
Berechnung der Fläche des Dreiecks FGS über die trigonometrische Flächenformel.
Berechnung der Fläche $BCGF$ über die Differenz aus Seitenfläche Pyramide und Fläche des Dreiecks FGS.



Klausuraufschrieb

ϵ: $\epsilon = 180° - 2 \cdot \beta = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$

s: $cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{s}$ | $\cdot s; : cos\beta$

$s = \frac{\frac{a}{2}}{cos\beta} = \frac{2{,}8}{cos65°} = 6{,}63$

$\overline{FS}$: $\overline{FS} = s - \overline{BF} = 6{,}63 - 3{,}0 = 3{,}63$

α: $\alpha = 180° - \epsilon - 90° = 90° - 50° = 40°$

$\overline{FG}$ $cos\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{FS}}$ | $\cdot \overline{FS}$

$\overline{FG} = \overline{FS} \cdot cos\alpha = 3{,}63 \cdot cos40° = 2{,}78$

Die Strecke $\overline{FG}$ ist $2{,}8\,cm$ lang.

A_{ABS}: $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot sin\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 6{,}63^2 \cdot sin50°$ | trigonometrischer Flächeninhalt
$= 16{,}84$

A_{FGS}: $A_{FGS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FG} \cdot sin40°$ | trigonometrischer Flächeninhalt
$= \frac{1}{2} \cdot 3{,}63 \cdot 2{,}8 \cdot sin40° = 3{,}27$

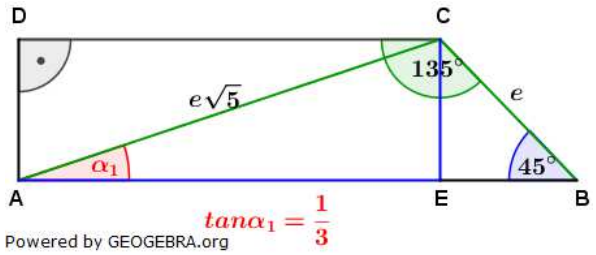
A_{BCGF}: $A_{BCGF} = A_{ABS} - A_{FGS} = 16{,}84 - 3{,}27 = 13{,}57$

Die Fläche des Vierecks $BCGF$ beträgt $13{,}6\,cm^2$.

Lösung W1b/2005

Lösungslogik

Definition $tan\alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den $sin45°$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den Satz des Pythagoras.
Einsetzen von $\overline{CE}$ und $\overline{AE}$ in die Definitionsgleichung und Vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$tan\alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$

$\overline{CE}$: $sin45° = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$ | $\cdot \overline{CB}$

$\overline{CE} = \overline{CB} \cdot sin45° = e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{e}{2}\sqrt{2}$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{\left(e\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{e}{2}\sqrt{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AE} = \sqrt{5e^2 - \frac{e^2}{2}} = \sqrt{\frac{9e^2}{2}} = \frac{3e}{\sqrt{2}}$

$tan\alpha_1$: $tan\alpha_1 = \frac{\frac{e}{2}\sqrt{2}}{\frac{9e^2}{2}} = \frac{e\sqrt{2}}{\frac{3e}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2005

Lösungslogik

Umstellung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Bestimmung der Geradengleichung g_1 durch den Scheitel von p_1 und Punkt $P(6|5)$.
Bestimmung der y–Koordinate von S_2 über die Geradengleichung.
Aufstellen der Parabelgleichung p_2.
Bestimmung des Schnittpunktes A von p_1 und p_2.
Aufstellen der Geradengleichung g_2 parallel g_1 und durch Punkt A.
Bestimmung des zweiten Schnittpunktes von g_2 mit p_2.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = x^2 + 4x + 1$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x+2)^2 - 3$ | quadratische Ergänzung

$S_1(-2|-3)$

Geradengleichung durch S_1 und P:

g_1: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-3)}{6-(-2)} = 1$

$y = x + b$ | Punktprobe mit $P(6|5)$

$5 = 1 \cdot 6 + b$

$b = -1$

g_1: $y = x - 1$

y_2-Koordinate von S_2:

y_2: $y_2 = 3 - 1 = 2$ | Punktprobe auf g_1 mit $S_2(|y_2)$

$S_2(3|2)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x-3)^2 + 2$ | Scheitelpunktgleichung aufstellen

$y = x^2 - 6x + 11$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 + 4x + 1 = x^2 - 6x + 11$ | $-x^2;\ +6x;\ -11$

$10x = 10$ | $:10$

$x = 1 \longrightarrow p_1$

$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(1|6)$.

Geradengleichung g durch $A(1|6)$ mit $m = 1$:

g_2: $y = mx + b$

$6 = 1 + b$ | Punktprobe mit $A(1|6)$

$b = 5$

g_2: $y = x + 5$

Schnittpunkt von p_2 mit g:

$p_2 \cap g$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 11 = x + 5$ | $-x;\ -5$

$x^2 - 7x + 6 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 6} = 3{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 3{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 6;\ \ x_2 = 1$

$x_1 \longrightarrow g_2$

$y_1 = x_1 + 5 = 6 + 5 = 11$

Der zweite Schnittpunkt von p_2 mit g_2 hat die Koordinaten $B(6|11)$.

Lösung W2b/2005

$$\frac{-2x^2 + 57x - 21}{6(x-4)(x+3)} = \frac{2x+1}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x+6}$$

Nenner 1:		$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$
Nenner 2:	$3x - 12$	$3(x-4)$
Nenner 3:	$2x + 6$	$2(x+3)$
Hauptnenner:		$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$

$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3) = 0$ für $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-3; 4\}$

$$\frac{(-2x^2 + 57x - 21) \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)}}{2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)} = \frac{(2x+1) \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot (x-4)}(x+3)}{\cancel{3(x-4)}} - \frac{(3x-1) \cdot \cancel{2 \cdot 3} \cdot (x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{2(x+3)}}$$

$-2x^2 + 57x - 21 = 2 \cdot (2x+1)(x+3) - 3 \cdot (3x-1)(x-4)$ | ausmultiplizieren

$-2x^2 + 57x - 21 = 2(2x^2 + 7x + 3) - 3(3x^2 - 13x + 4)$ | Restklammern

| auflösen

$-2x^2 + 57x - 21 = 4x^2 + 14x + 6 - 9x^2 + 39x - 12$ | Zusammenfassen

$-2x^2 + 57x - 21 = -5x^2 + 53x - 6$ | $+5x^2;\ -53x;\ +6$

$3x^2 + 4x - 15 = 0$ | $:(3)$

$x^2 + \frac{4}{3}x - 5 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{45}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{7}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3}$; $\quad x_2 = -3$

Wegen $x_2 = -3 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ die einzigste Lösung.

Lösung W3a/2005

Lösungslogik

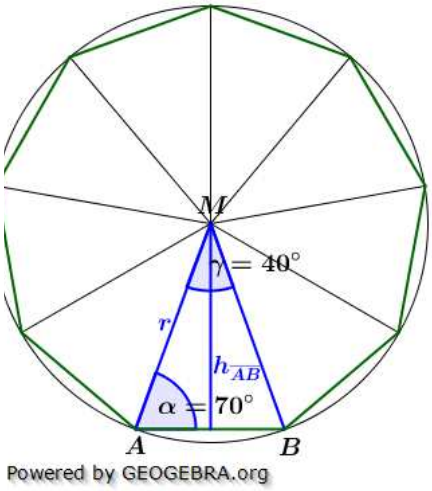
Volumen der Pyramide über $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$.

Berechnung von G:

Wir berechnen die Grundfläche des regelmäßigen Neunecks. Der Mittelpunktswinkel γ ist $\frac{360°}{9} = 40°$. Daraus ergeben sich die Basiswinkel der jeweiligen Teildreiecke zu $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = 70\,°$.

Wir berechnen den Radius r des Umkreises über den Sinussatz.

Wir berechnen die Fläche des Teildreiecks ABM über den trigonometrischen Flächeninhalt, multiplizieren das Ergebnis mit 9 und haben somit die Größe der Grundfläche errechnet.



Berechnung von h_{Pyr}:

Über den gegebenen Mantel M berechnen wir die Fläche eines Seitendreicks der Pyramide. Mithilfe dieser Fläche und der Grundseite a errechnen wir die Höhe h_a eines Seitendreiecks.

Wir berechnen die Höhe $h_{\overline{AB}}$ (siehe Grafik) eines Teildreiecks der Grundfläche. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich nunmehr die Höhe h_{Pyr} der Pyramide ermitteln.

Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$

Berechnung von G:

γ: $\gamma = \frac{360°}{9} = 40°$

α: $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = 70\,°$

r: $\frac{a}{sin40°!} = \frac{r}{sin70"}$ | Sinussatz

$r = \frac{a \cdot sin70°}{sin40°} = \frac{6{,}4 \cdot sin70°}{sin40°} = 9{,}36$

A_{ABM}: $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\gamma$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}36^2 \cdot sin40° = 28{,}16$

G: $G = 9 \cdot A_{ABM} = 9 \cdot 28{,}16 = 253{,}40$

Berechnung von h_{Pyr}:

A_{Seite}: $A_{Seite} = \frac{M}{9} = \frac{300}{9} = 33{,}3333$

h_a: $A_{Seite} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$h_a = \frac{2 \cdot A_{Seite}}{a} = \frac{2 \cdot 33{,}3333}{6{,}4} = 10{,}42$

$h_{\overline{AB}}$: $h_{\overline{AB}} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}36^2 - 3{,}2^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{\overline{AB}} = \sqrt{77{,}37} = 8{,}80$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{h_a^2 - h_{\frac{2}{AB}}} = \sqrt{10{,}42^2 - 8{,}80^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{31{,}14} = 5{,}6$

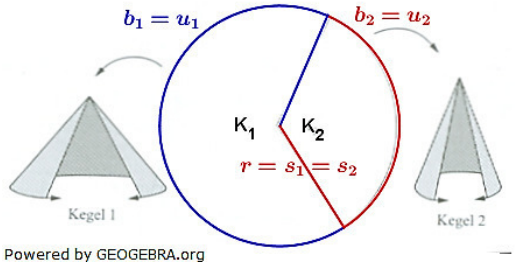
V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 253{,}4 \cdot 5{,}6 = 473{,}01$

Das Volumen der Pyramide beträgt $473\ cm^3$.

Lösung W3b/2005

Lösungslogik

Wegen der Abwicklung der beiden Pyramiden aus ein und demselben Kreis sind deren Seitenlängen gleich. Die Länge der Seitenkante entspricht dem Radius des Abwicklungskreises.
Zum anderen entspricht die Länge des Kreisbogens über K_1 dem Umfang des Grundkreises von Kegel 1, die Länge des Kreisbogens über K_2 entspricht dem Umfang des Grundkreises von Kegel 2.



Der Umfang des Abwicklungskreises errechnet sich aus der Umfangsformel für einen Kreis mit $u = 2\pi \cdot r$, wobei hier r gleich der Länge der Seitenkanten beider Kegel ist.
Berechnung von r_1 aus der Volumenformel.
Berechnung von s_1 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Umfangs des Grundkreises von Pyramide 1.
Berechnen des Umfangs des Abwicklungskreises mit $r = s_1$.
Differenzbildung aus Umfang des Abwicklungskreises und Umfang des Grundkreises von Kegel 1 ergibt Umfang des Grundkreises von Kegel 2.
Berechnung von r_2 über die Umfangsformel des Grundkreises von Kegel 2.

Klausuraufschrieb

r_1: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$ | $\cdot 3;\ : \pi \cdot h_1$

$r_1^2 = \frac{3 \cdot V_1}{\pi \cdot h_1} = \frac{3 \cdot 12\pi e^3}{\pi \cdot 4e} = 9e^2$ | $\sqrt{\ }$

$r_1 = 3e$

s_1: $s_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2} = \sqrt{(3e)^2 + (4e)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s_1 = \sqrt{9e^2 + 16e^2} = \sqrt{25e^2} = 5e$

u_1: $u_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 3e = 6\pi e$

u_{Abw}: $u_{Abw} = 2\pi \cdot s_1 = 2\pi \cdot 5e = 10\pi e$

u_2: $u_2 = u_{Abw} - u_1 = 10\pi e - 6\pi e = 4\pi e$

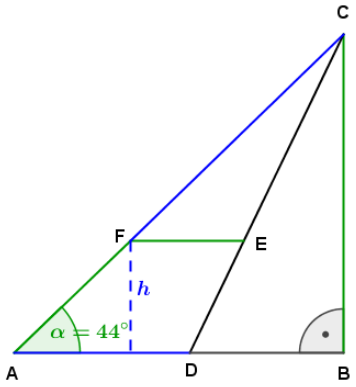
r_2: $u_2 = 2\pi \cdot r_2$ | $: 2\pi$

$r_2 = \frac{u_2}{2\pi} = \frac{4\pi e}{2\pi} = 2e$ **q.e.d.**

Lösung W4b/2005

Lösungslogik (einfach)

Das Viereck $ADEF$ ist ein Trapez mit den beiden parallelen Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{FE}$ und der Höhe h.
Berechnung von $\overline{AC}$ über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{AF}$.
Berechnung von h über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den zweiten Strahlensatz.



Klausuraufschrieb

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AD} + \overline{FE}) \cdot h$

$\overline{AC}$: $\quad sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC};\ : sin\alpha$

$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{sin\alpha} = \frac{14}{sin44°} = 20{,}15$

$\overline{FC}$: $\quad \overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = 20{,}15 - 7{,}1 = 13{,}05$

h: $\quad sin\alpha = \frac{h}{\overline{AF}} \quad | \quad \cdot \overline{AF}$

$h = \overline{AF} \cdot sin\alpha = 7{,}1 \cdot sin44° = 4{,}93$

$\overline{AD}$: $\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$ (2. Strahlensatz)

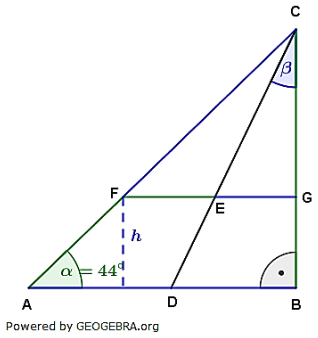
$\overline{AD} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}} \cdot \overline{AC} = \frac{5{,}0}{13{,}05} \cdot 20{,}15 = 7{,}72$

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7{,}72 + 5{,}0) \cdot 4{,}93 = 31{,}35$

Das Viereck $ADEF$ hat eine Fläche von $31{,}4\ cm^2$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h wie in Lösungslogik (einfach), dann:
Berechnung von $\overline{AB}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{FG}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{EG}$ aus Differenz von $\overline{FG}$ und $\overline{FE}$.
Berechnung Winkel β über tan.
Berechnung von $\overline{DB}$ über $tan\beta$.
Berechnung von $\overline{AD}$ aus Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{DB}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h siehe Lösung (einfach).

$\overline{AB}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB};\ : tan\alpha$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan\alpha} = \frac{14}{tan44°} = 14{,}4974$

$\overline{FG}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}-h}{\overline{FG}} \quad | \quad \cdot \overline{FG};\ : tan\alpha$

$\overline{FG} = \frac{\overline{BC}-h}{tan\alpha} = \frac{14-4{,}93}{tan44°} = 9{,}3923$

$\overline{EG}$: $\quad \overline{EG} = \overline{FG} - \overline{FE} = 9{,}3923 - 5{,}0 = 4{,}3923$

β: $\quad tan\beta = \frac{\overline{EG}}{\overline{BC}-h} = \frac{4{,}3923}{14-4{,}93} = 0{,}4843$

$\beta = \tan^{-1} 0{,}4843 = 25{,}84°$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{DB}$: $\quad tan\beta = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\overline{DB} = \overline{BC} \cdot tan\beta = 14 \cdot tan25{,}84° = 6{,}78$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 14{,}4974 - 6{,}78 = 7{,}72$

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7{,}72 + 5{,}0) \cdot 4{,}93 = 31{,}35$

Das Viereck $ADEF$ hat eine Fläche von $31{,}4\ cm^2$.

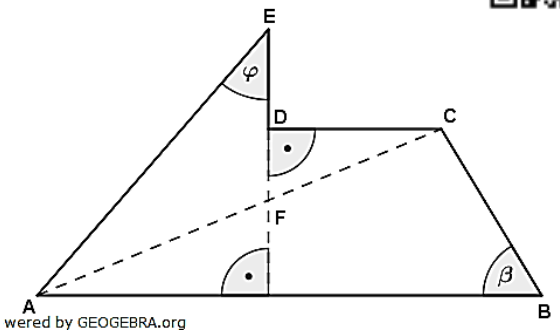
Aufgabe W1a/2006

In der Figur $ABCDE$ sind gegeben:

$\overline{AB} = 12{,}2\ cm$
$\overline{AE} = 8{,}5\ cm$
$\overline{BC} = 4{,}7\ cm$
$\beta = 59{,}0°$.
$\varphi = 41{,}0°$

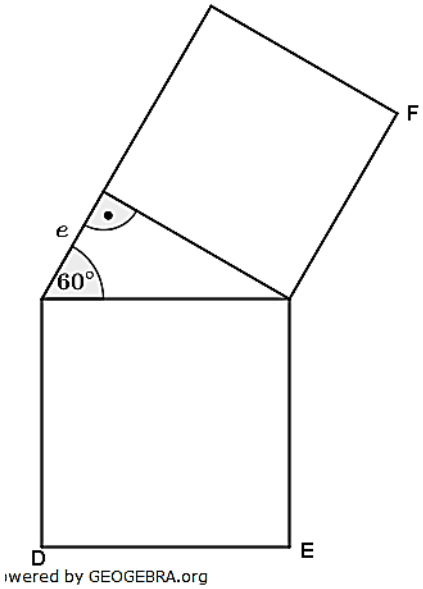
Berechnen Sie die Länge $\overline{DF}$.

Lösung: $\overline{DF} = 1{,}7\ cm$



Aufgabe W1b/2006

Nebenstehende Figur zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten- und Hypothenusenquadrat.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte:
Der Abstand des Punktes F von der Geraden DE beträgt $\frac{7}{2}e$



Aufgabe W2a/2006

Eine nach oben geöffnete Normalparabel p und eine Gerade g_1 schneiden sich in den Punkten $A(2|5)$ und $B(6|-3)$.
Berechnen Sie die Gleichungen von Parabel und Gerade.
Die Gerade g_2 ist parallel zur Geraden g_1 und geht durch den Scheitelpunkt der Parabel. Die Koordinatenachsen bilden mit g_2 ein Dreieck.
Berechnen Sie den Umfang und die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: p: $y = x^2 - 10x + 21$; g_1: $y = -2x + 9$

Aufgabe W2b/2006

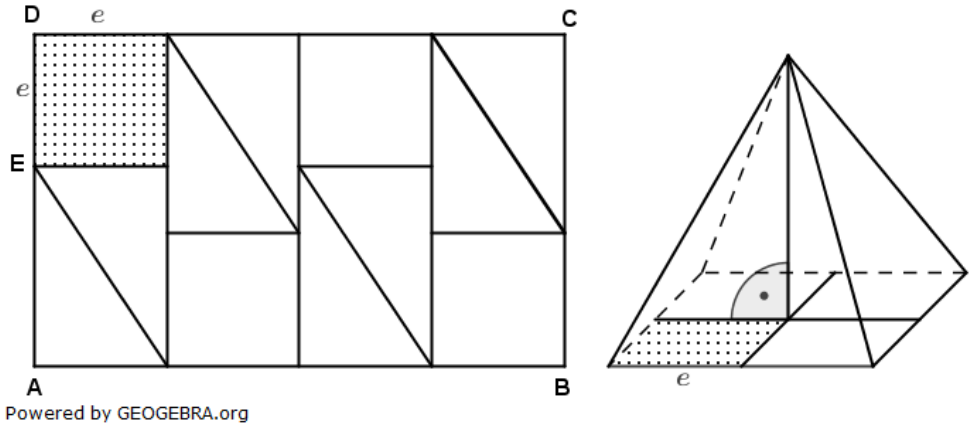
Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{4(2x^2-4x-1)}{3x^2-12} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-6}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}; \quad \mathbb{L} = \{-\frac{2}{7}\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2006

Mit den Einzelteilen des Rechtecks $ABCD$ wird die Oberfläche der quadratischen Pyramide vollständig beklebt.



Es gilt:

$A_{ABCD} = 96\ cm^2$ (Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$)

$\overline{DE} = e = 3{,}0\ cm$

Berechnen Sie die Länge $\overline{AE}$, das Volumen der quadratischen Pyramide und den Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche.

Lösung: $\overline{AE} = 5\ cm$; $V = 48\ cm^3$ $\alpha = 43{,}3°$

Aufgabe W4b/2006

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $34{,}5\ cm^2$.

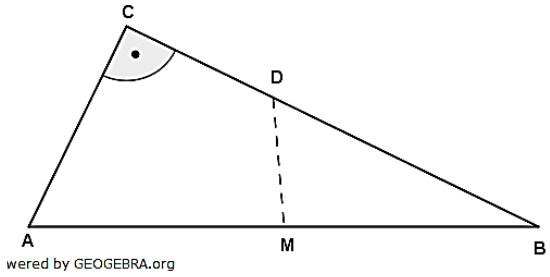
Weiterhin gilt:

$\overline{AC} = 5{,}8\ cm$

$\overline{AM} = \overline{MB}$

Das Dreieck MBD nimmt ein Drittel der Fläche des Dreiecks ABC ein.

Berechnen Sie die Länge $\overline{BD}$.



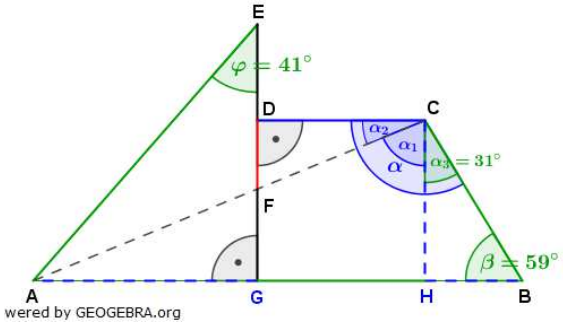
Lösung: $\overline{BD} = 7{,}9\ cm$

Tipp: Trigonometrischen Flächeninhalt für die Strecke $\overline{BD}$ über die Fläche des Dreiecks MBD.

Lösung W1a/2006

Lösungslogik

Berechnung von α über die Winkelsumme im Viereck.
Berechnung von $\overline{AG}$ über $sin\varphi$.
Berechnung von $\overline{HB}$ über $sin\alpha_3$.
Berechnung von $\overline{DC}$.
Berechnung von $\overline{HC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von α_1 über den tan.
Berechnung von α_2.
Berechnung von $\overline{DF}$ über den $tan\alpha_2$



Klausuraufschrieb

α: $\alpha = 360° - 90° - 90° - 59° = 121°$

$\overline{AG}$: $sin\varphi = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}$ | $\cdot \overline{AE}$

$\overline{AG} = \overline{AE} \cdot sin\varphi = 8{,}5 \cdot sin41° = 5{,}58$

$\overline{HB}$: $sin\alpha_3 = \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{HB} = \overline{BC} \cdot sin\alpha_3 = 4{,}7 \cdot sin31° = 2{,}42$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{HB} = 12{,}2 - 5{,}58 - 2{,}42 = 4{,}2$

$\overline{HC}$: $\overline{HC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{4{,}7^2 - 2{,}42^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{HC} = \sqrt{16{,}2336} = 4{,}03$

α_1: $tan\alpha_1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AB}-\overline{HB}}{4{,}03} = \frac{12{,}2-2{,}42}{4{,}03} = 2{,}4268$

$\alpha_1 = tan^{-1}(2{,}4268) = 67{,}61°$

α_2: $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 - \alpha_3 = 121° - 67{,}61° - 31° = 22{,}39°$

$\overline{DF}$: $tan\alpha_3 = \frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}$ | $\cdot \overline{DC}$

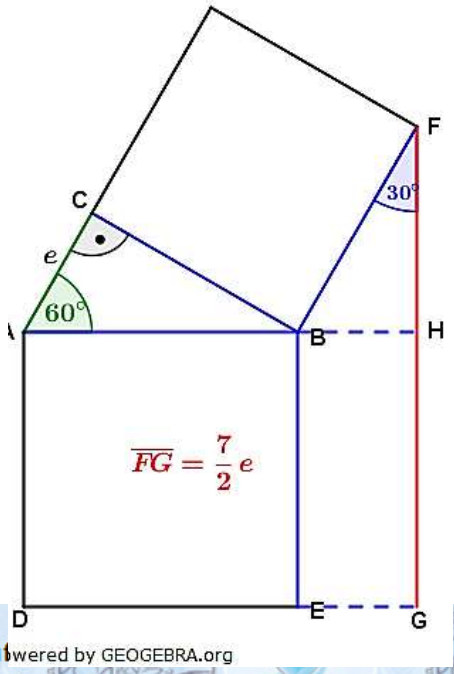
$\overline{DF} = \overline{DC} \cdot tan\alpha_3 = 4{,}2 \cdot tan22{,}39° = 1{,}73$

Die Strecke $\overline{DF}$ ist $1{,}7\ cm$ lang.

Lösung W1b/2006

Lösungslogik

Definition $\overline{FG} = \overline{GH} + \overline{FH}$.
Berechnung von $\overline{AB} = \overline{GH}$ über den $cos60°$.
Berechnung von $\overline{CB} = \overline{BF}$ über den $sin60°$.
Berechnung von $\overline{FH}$ über den $cos30°$.
Einsetzen von $\overline{GH}$ und $\overline{FH}$ in die Definitionsgleichung und vereinfachen.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Au
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$\overline{FG} = \overline{GH} + \overline{FH}$

$\overline{GH}$: $\quad cos60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{GH}} \quad | \quad \cdot \overline{GH};\ : cos60°$

$\overline{GH} = \frac{\overline{AC}}{cos60°} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

$\overline{BF}$: $\quad sin60° = \frac{\overline{BF}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{BF} = \overline{AC} \cdot sin60° = e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

$\overline{FH}$: $\quad cos30° = \frac{\overline{FH}}{\overline{BF}} \quad | \quad \cdot \overline{BF}$

$\overline{FH} = \overline{BF} \cdot cos30° = \frac{e}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}e$

$\overline{FG}$: $\quad \overline{FG} = 2e + \frac{3}{2}e = \frac{7}{2}e$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2006

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung und Scheitelpunktgleichung p durch die beiden Punkte A und B.
Aufstellung der Geradengleichung g_1 durch die beiden Punkte A und$B$.
Aufstellen der Geradengleichung g_2 parallel g_1 und durch den Scheitelpunkt S von p.
Zeichnen der Situation in ein Koordinatensystem.
Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks, Berechnung von u, α und β.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p durch A und B:

p: $\quad y = x^2 + bx + c$

(1) $\quad 5 = 4 + 2b + c \quad |$ Punktprobe mit $A(2|5)$

(2) $\quad -3 = 36 + 6b + c \quad |$ Punktprobe mit $B(6|-3)$

(1)-(2) $\quad 8 = -32 - 4b \quad | \quad +4b;\ -8$

$4b = -40 \quad | \quad :4$

$b = -10$

$b \longrightarrow (1)$

$5 = 4 - 20 + c \quad | \quad +16$

$c = 21$

p: $\quad y = x^2 - 10x + 21$

Scheitelpunktgleichung von p:

$y = (x-5)^2 - 4 \quad |$ quadratische Ergänzung

$S(5|-4)$

Geradengleichung g_1 durch A und B:

g_1: $\quad y = mx + b$

m: $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-5}{6-2} = -2$

$y = -2x + b \quad |$ Punktprobe mit $A(2|5)$

$5 = -2 \cdot 2 + b$

$b = 9$

g_1: $\quad y = -2x + 9$

Parallele Gerade g_2 durch $S(5|-4)$:

g_2: $y = -2x + b$ | parallel heißt gleiche Steigung $m = -2$

$-4 = -2 \cdot 5 + b$ | Punktprobe mit $S(5|-4)$

$b = 6$

g_2: $y = -2x + 6$

Schnittpunkt von g_2 mit der x–Achse:

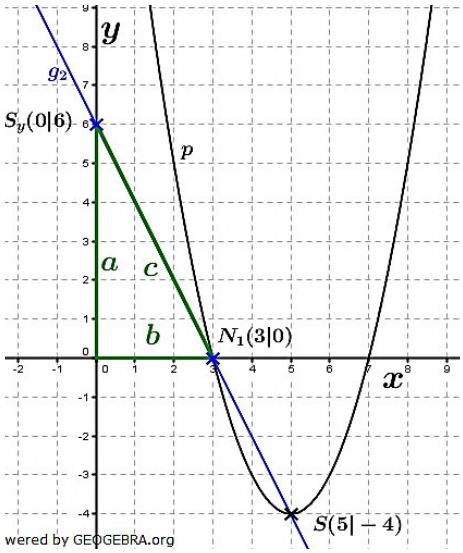
$0 = -2x + 6$

$x_0 = 3$

Schnittpunkt von g_2 mit der y–Achse:

$y = -2 \cdot 0 + 6$

$S_y(0|6)$



Umfang des Dreiecks $0N_1S_y$:

$u_{0N_1S_y} = a + b + c$

$a = 6;\ \ b = 3$

c: $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 9$

$c = \sqrt{45} \approx 6{,}7$

$u_{0N_1S_y} = 6 + 3 + 6{,}7$

$u_{0N_1S_y} = 15{,}7$

Der Umfang des Dreiecks beträgt $15{,}7\ LE$.

Innenwinkel des Dreiecks $0N_1S_y$:

$\sphericalangle 0N_1S_y = \alpha$

$tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2$

$\alpha = tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$

$\sphericalangle N_1S_y0 = \beta$

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Die Innenwinkel des Dreiecks sind $\alpha = 63{,}4°;\ \ \beta = 26{,}6°$ und $\gamma = 90°$.

Lösung W2b/2006

$$\frac{4(2x^2 - 4x - 1)}{3x^2 - 12} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-6}$$

Nenner 1:	$3x^2 - 12$	$3 \cdot (x+2)(x-2)$
Nenner 2:		$(x+2)$
Nenner 3:	$3x - 6$	$3(x-2)$
Hauptnenner:		$3 \cdot (x+2)(x-2)$

$3 \cdot (x+2)(x-2) = 0$ für $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$

$$\frac{4(2x^2-4x-1)\cdot\cancel{3\cdot(x+2)(x-2)}}{\cancel{3\cdot(x+2)(x-2)}} = \frac{(x+1)\cdot 3\cdot\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} - \frac{(2x-3)\cdot\cancel{3}\cdot(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{3(x-2)}}$$

$4(2x^2 - 4x - 1) = 3 \cdot (x+1)(x-2) - (2x-3)(x+2)$ | Klammern auflösen

$8x^2 - 16x - 4 = 3(x^2 - x - 2) - (2x^2 + x - 6)$ | Restklammern auflösen

$8x^2 - 16x - 4 = 3x^2 - 3x - 6 - 2x^2 - x + 6$ | Zusammenfassen

$8x^2 - 16x - 4 = x^2 - 4x$ | $-x^2;\ +4x;$

$7x^2 - 12x - 4 = 0$ | $:7$

$x^2 - \frac{12}{7}x - \frac{4}{7} = 0$ | p/q-Formel

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

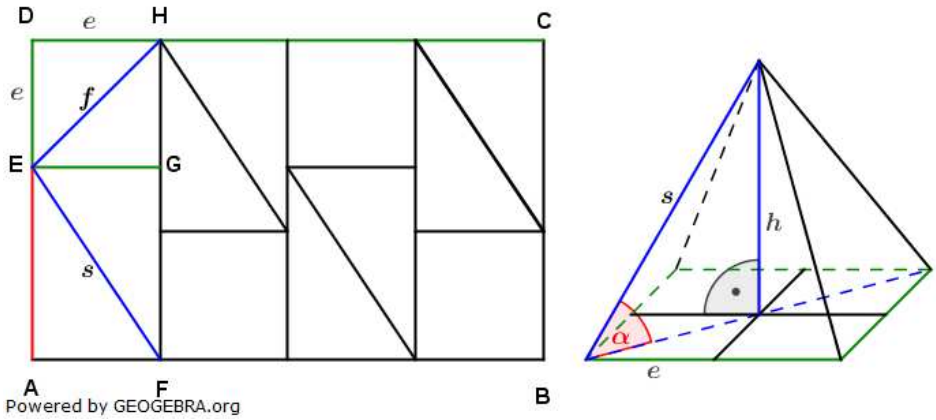
$x_{1,2} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{4}{7}} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{28}{49}} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{6}{7} \pm \frac{8}{7}$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{2}{7}$

Wegen $x_1 = 2 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$ die einzigste Lösung.

Lösung W4a/2006

Lösungslogik



Für die Strecke $\overline{AE}$:

Berechnung der Strecke $\overline{AE}$ über die Flächenformel für das Rechteck $ABCD$.

Für das Volumen der Pyramide:

Berechnung von $s = \overline{EF}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung der Diagonalen f des Quadrats $EGHD$.

Berechnung von h der Pyramide über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Volumens der Pyramide über die Volumenformel.

Für den Neigungswinkel α:

Berechnung von α über den sin.

Klausuraufschrieb

$\overline{AE}$: $A_{ABCD} = 4e \cdot (\overline{AE} + e)$ | $: 4e; -e$

$\overline{AE} = \frac{A_{ABCD}}{4e} - e = \frac{96}{4 \cdot 3} - 3 = 5$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist $5\,cm$ lang.

s: $s^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ | Satz des Pythagoras

$s = 5{,}83$

f: $f^2 = 2e^2 = 18$ | Satz des Pythagoras

$f = 4{,}24$

h: $h^2 = s^2 - f^2 = 34 - 18 = 16$ | Satz des Pythagoras

$h = 4$

V: $V = \frac{1}{3} \cdot (2e)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$

Das Volumen der Pyramide beträgt $48\,cm^3$.

α: $sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{4}{5{,}83} = 0{,}6861$

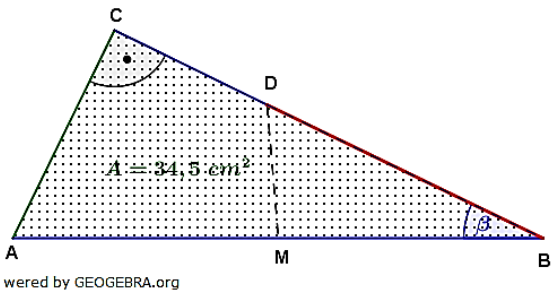
$\alpha = sin^{-1}(0{,}6861) = 43{,}32°$

Der Neigungswinkel α hat $43{,}3°$.

Lösung W4b/2006

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{CB}$ über die Flächenformel des Dreiecks ABC.
Berechnung von $\overline{AB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{MB} = 0{,}5 \cdot \overline{AB}$.
Berechnung von β über den sin.
Berechnung der Fläche des Dreiecks $MBD = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC}$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Sinussatz.



Klausuraufschrieb

A_{MBD}: $A_{MBD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 34{,}5 = 11{,}5\ cm^2$

$\overline{CB}$: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CB}$ | $\cdot 2;\ : \overline{AC}$

$\overline{CB} = \frac{2 \cdot A_{ABC}}{\overline{AC}} = \frac{2 \cdot 34{,}5}{5{,}8} = 11{,}9$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{5{,}8^2 - 11{,}9^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AB} = \sqrt{175{,}25} = 13{,}24$

$\overline{MB}$ $\overline{MB} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} = 0{,}5 \cdot 13{,}24 = 6{,}62$

β: $sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5{,}8}{13{,}24} = 0{,}4381$

$\beta = sin^{-1}(0{,}4381) = 26{,}0°$

$\overline{BD}$: $A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{BD} \cdot sin\beta$ | trigonometrischer Flächeninhalt

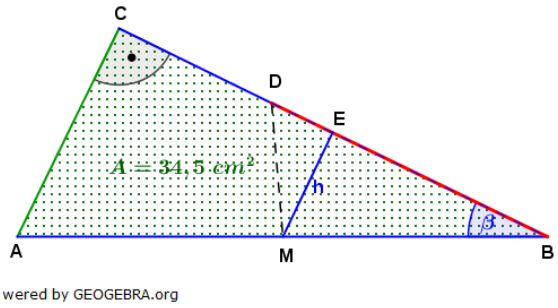
$11{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}62 \cdot \overline{BD} \cdot sin26°$ | $\cdot 2;\ : (6{,}62 \cdot sin26°)$

$\overline{BD} = \frac{2 \cdot 11{,}5}{6{,}62 \cdot sin26°} = 7{,}923$

Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ beträgt $7{,}9\ cm$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{MB}$, β und A_{MBD} wie in Lösungslogik (einfach).
Berechnung von h über $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über die Flächenformel des Dreiecks $A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}$.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{MB}$, β und A_{MBD} wie in Lösung (einfach).

h: $\quad sin\beta = \frac{h}{\overline{MB}} \quad | \quad \cdot \overline{MB}$

$h = \overline{MB} \cdot sin\beta = 6{,}62 \cdot sin26{,}0° = 2{,}9020$

$\overline{BD}$: $\quad A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}$

$11{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}902 \cdot \overline{BD} \quad | \quad \cdot 2;\ : 2{,}902$

$\overline{BD} = \frac{2 \cdot 11{,}5}{2{,}902} = 7{,}9256$

Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ beträgt $7{,}9\ cm$.

Aufgabe W1a/2007

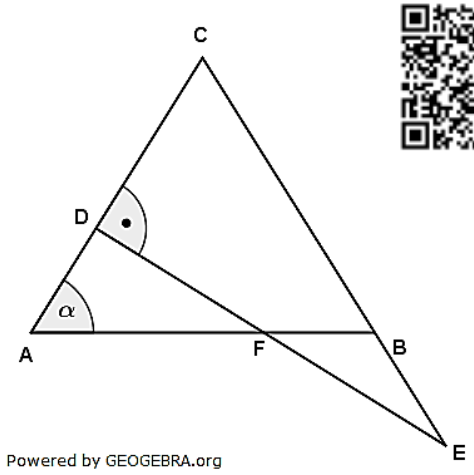
Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC und das rechtwinklige Dreieck CDE.
Es gilt:

$\overline{AC} = \overline{BC}$
$\overline{AB} = 10{,}0\ cm$
$\overline{AD} = 3{,}6\ cm$
$\alpha = 58{,}0°$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BFE.

Lösung: $A_{BFE} = 5{,}3\ cm^2$.

Tipp: Trigonometrischer Flächeninhalt für das Dreieck BFE.

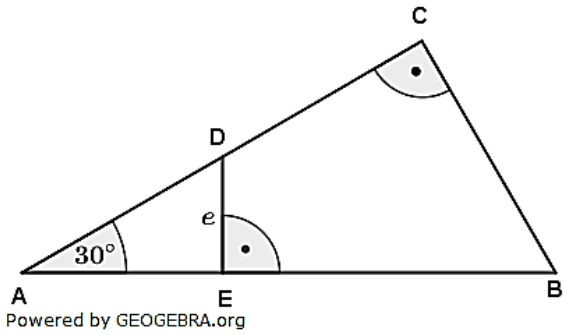


Aufgabe W1b/2007

Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist D der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EBCD$ mit der Formel

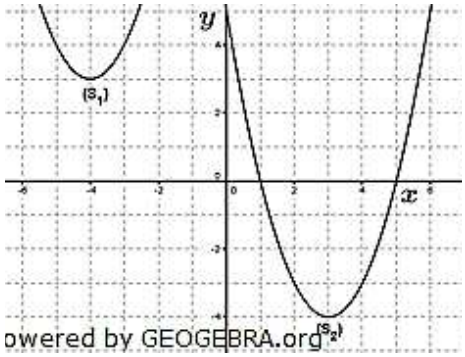
$$A = \frac{13}{6} e^2 \sqrt{3}$$

berechnet werden kann.



Aufgabe W2a/2007

Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden verschobenen Normalparabeln (entnehmen Sie die erforderlichen Werte der Zeichnung).
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P der beiden Parabeln.
Die Gerade g geht durch die Punkte P und S_1.
Die Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch S_2.
Berechnen Sie die Gleichung von h.
Die Gerade h bildet mit der x-Achse und der y-Achse ein Dreieck. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.



Lösung: $P(-1|12)$; h: $y = 3x - 13$; $A = 28{,}2\ FE$

Aufgabe W2b/2007

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

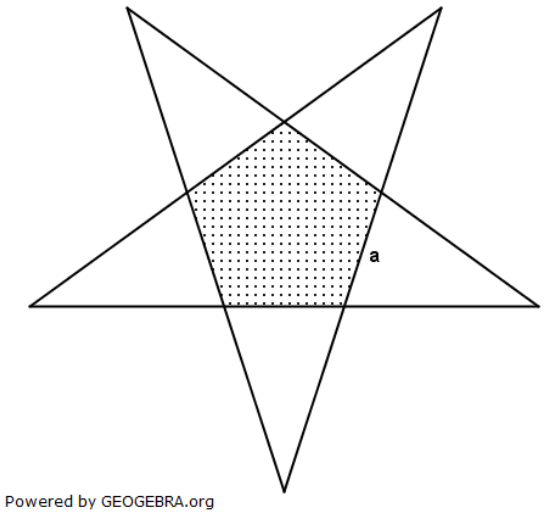
$$\frac{24x^2-5x-26}{(6x+4)(3x-2)} = \frac{4x-5}{3x-2} - \frac{2x+3}{2(3x+2)}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$; $\mathbb{L} = \{-3\}$

Aufgabe W3a/2007

Ein regelmäßiges Fünfeck hat die Seitenlänge $a = 3{,}6\ cm$.
Verlängert man alle Fünfeckseiten, so entsteht das Netz einer regelmäßigen Pyramide.
Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen der Pyramide.

Lösung: $M = 49{,}9\ cm^2$
$V = 36{,}8\ cm^3$

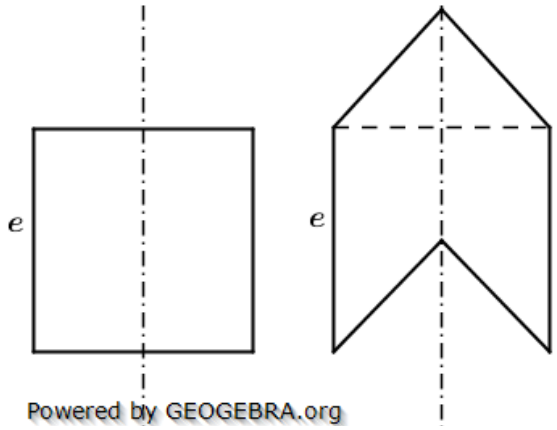


Aufgabe W3b/2007

Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Quadrat mit der Seitenlänge e.
Aus dem Zylinder wird ein Kegel mit halber Zylinderhöhe herausgearbeitet und oben aufgesetzt.
Weisen Sie nach, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$$\frac{\pi e^2}{2}(\sqrt{2}-1).$$

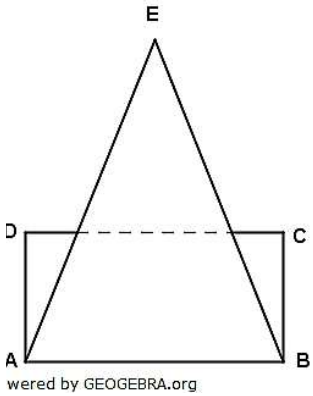
größer ist als die des Zylinders.



Aufgabe W4a/2007

Das Rechteck $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 6{,}0\ cm$ und $\overline{BC} = 3{,}0\ cm$.
Von seiner Fläche werden $80\ \%$ durch das gleichschenklige Dreieck ABE überdeckt.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes E von der Strecke $\overline{AB}$.

Lösung: $\overline{EH} = 7{,}5\ cm$.



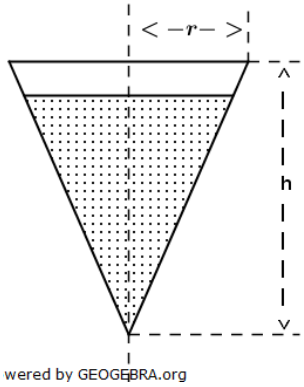
Aufgabe W4b/2007

Ein kegelförmiges Gefäß ist gegeben durch:

$h = 8{,}0\ cm$
$r = 3{,}5\ cm$

Es ist zu $\frac{7}{8}$ seiner Höhe mit Wasser gefüllt.
Eine Kugel taucht vollständig in das Gefäß ein. Dadurch steigt der Wasserspiegel genau bis zum Rand des Gefäßes. Bestimmen Sie den Radius der Kugel.

Lösung: $r_{Kugel} = 2{,}0\ cm$

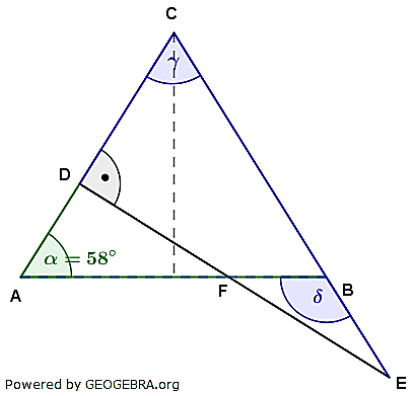


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2007

Lösungslogik

Berechnung von δ über die Ergänzungswinkel
(Das Dreieck ABC ist gleichschenklig).
Berechnung von δ.
Berechnung von $\overline{AC} = \overline{BC}$ über $cos\alpha$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über $cos\alpha$.
Berechnung von $\overline{FB}$ als Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$.
Berechnung von $\overline{DC}$ als Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über $cos\gamma$.
Berechnung von $\overline{EB}$ als Differenz von $\overline{CE}$ und $\overline{CB}$.
Berechnung A_{BFE} mit dem trigonometrischen Flächeninhalt.



Klausuraufschrieb

$A_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{BE} \cdot sin\delta$ | trigonometrischer Flächeninhalt

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 116° = 64°$

δ: $\delta = 180° - \alpha = 180° - 58° = 122°$

$\overline{BE}$: $sin\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AB}$

$\overline{BE} = \overline{AB} \cdot sin\alpha = 18 \cdot sin36° = 10{,}58$

β: $\beta = 90° - \alpha = 54°$

$\overline{AC}$: $cos\alpha = \frac{0{,}5 \cdot \overline{AB}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}$; $: cos\alpha$

$\overline{AC} = \frac{0{,}5 \cdot \overline{AB}}{cos\alpha} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{cos58°} = 9{,}44$

$\overline{AF}$: $cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}$ | $\cdot \overline{AF}$; $: cos\alpha$

$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{cos\alpha} = \frac{3{,}6}{cos58°} = 6{,}79$

$\overline{FB}$: $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = 10 - 6{,}79 = 3{,}21$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 9{,}44 - 3{,}6 = 5{,}84$

$\overline{CE}$: $cos\gamma = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$ | $\cdot \overline{CE}$; $: cos\gamma$

$\overline{CE} = \frac{\overline{DC}}{cos\gamma} = \frac{5{,}84}{cos64°} = 13{,}32$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \overline{CE} - \overline{AC} = 13{,}32 - 9{,}44 = 3{,}88$

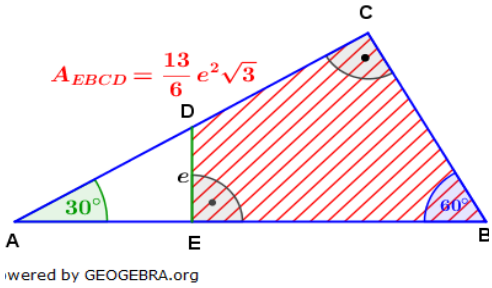
A_{BFE}: $A_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}88 \cdot sin122° = 5{,}28$

Das Dreieck BFE hat eine Fläche von $5{,}3\ cm^2$.

Lösung W1b/2007

Lösungslogik

Die Fläche des Vierecks A_{EBCD} errechnet sich aus der Fläche des Dreiecks A_{ABC} abzüglich der Fläche des Dreiecks A_{AED}.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den $sin30°$.
Bestimmung von $\overline{AC}$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den $tan30°$.
Berechnung von A_{ABC} über die Flächenformel des Dreiecks.



Berechnung von A_{AED} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{EBCD} und vereinfachen.

Klausuraufschrieb

$A_{EBCD} = A_{ABC} - A_{AED}$

$\overline{AD}$: $\quad sin30° = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \quad | \quad \cdot \overline{AD};\ : sin30°$

$\overline{AD} = \frac{\overline{ED}}{sin30°} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AD} = 4e$

$\overline{BC}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot tan30° = 4e \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3} e\sqrt{3}$

$\overline{AE}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} \quad | \quad \cdot \overline{AE};\ : tan30°$

$\overline{AE} = \frac{\overline{ED}}{tan30°} = \frac{e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot \frac{4}{3} e\sqrt{3} = \frac{16}{6} e^2\sqrt{3}$

A_{AED}: $\quad A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e}{\sqrt{3}} \cdot e = \frac{3e^2}{2\sqrt{3}} \quad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)

$A_{AED} = \frac{3e^2 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3e^2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} e^2\sqrt{3}$

A_{EBCD}: $\quad A_{EBCD} = \frac{16}{6} e^2\sqrt{3} - \frac{1}{2} e^2\sqrt{3} = \frac{16e^2\sqrt{3} - 3e^2\sqrt{3}}{6} = \frac{13}{6} e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2007

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichungen p_1 und p_2 über die abgelesenen Scheitelpunkte.
Berechnung des Schnittpunktes von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Geradengleichung g durch den Schnittpunkt von p_1 mit p_2 und dem Scheitelpunkt von p_1.
Aufstellen der Geradengleichung h parallel g und durch den Scheitelpunkt S_2 von p_2.
Zeichnen der Situation in ein Koordinatensystem.
Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks, Berechnung von A.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichungen p_1 und p_2 über abgelesene Scheitelpunkte:

p_1: $y = (x+4)^2 + 3$ | $S_1(-4|3)$

$y = x^2 + 8x + 19$

p_2: $y = (x-3)^2 - 4$ | $S_2(3|-4)$

$y = x^2 - 6x + 5$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 + 8x + 19 = x^2 - 6x + 5$ | $-x^2;\ +6x;\ -5$

$14x = -14$ | $:14$

$x = -1$

$-1 \longrightarrow p_1$

$y = (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 19 = 12$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(-1|12)$.

Geradengleichung g durch P und S_1:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-12}{-4-(-1)} = 3$

$y = 3x + b$ | Punktprobe mit $P(-1|12)$

$12 = 3 \cdot (-1) + b$

$b = 15$

g: $y = 3x + 15$

Geradengleichung h parallel g durch S_2:

h: $y = 3x + b$ | parallel heißt gleiche Steigung.

$-4 = 3 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $S_2(-4|3)$

$b = -13$

h: $y = 3x - 13$

Schnittpunkte von h mit den Koordinatenachsen:

$0 = 3x - 13$ | Schnittpunkt mit x-Achse

$x_0 = \frac{13}{3}$

$y = 3 \cdot 0 - 13$ | Schnittpunkt mit y-Achse

$S_y = (0|-13)$

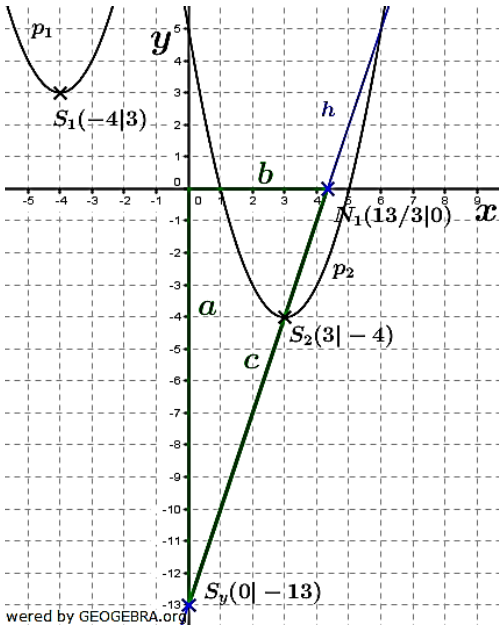
Fläche des Dreiecks $A_{0N_1S_y}$:

$A_{0N_1S_y} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

$a = 13;\ \ b = \frac{13}{3}$

$A_{0N_1S_y} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{6} \approx 28{,}2$

Die Fläche des Dreiecks beträgt $28{,}2\ FE$.



Lösung W2b/2007

$$\frac{24x^2-5x-26}{(6x+4)(3x-2)}=\frac{4x-5}{3x-2}-\frac{2x+3}{2(3x+2)}$$

Nenner 1:	$(6x+4)(3x-2)$	$2\cdot(3x+2)(3x-2)$
Nenner 2:		$3x-2$
Nenner 3:		$2(3x+2)$
Hauptnenner:		$2\cdot(3x+2)(3x-2)$

$2\cdot(3x+2)(3x-2)\ =0$ für $x_1=\frac{2}{3}$ und $x_2=-\frac{2}{3}$.

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

$$\frac{(24x^2-5x-26)\cdot\cancel{2\cdot(3x+2)(3x-2)}}{\cancel{2\cdot(3x+2)(3x-2)}}=\frac{(4x-5)\cdot 2\cdot(3x+2)\cancel{(3x-2)}}{\cancel{3x-2}}-\frac{(2x+3)\cdot\cancel{2\cdot(3x+2)}(3x-2)}{\cancel{2(3x+2)}}$$

$24x^2-5x-26=2\cdot(4x-5)(3x+2)-(2x+3)(3x-2)$	|	Klammern
	|	auflösen
$24x^2-5x-26=2\cdot(12x^2-7x-10)-(6x^2+5x-6)$	|	Restklammern
	|	auflösen
$24x^2-5x-26=24x^2-14x-20-6x^2-5x+6$	|	Zusammenfassen
$24x^2-5x-26=18x^2-19x-14$	|	$-18x^2;\ +19x;\ +14$
$6x^2+14x-12=0$	|	$:6$
$x^2+\frac{7}{3}x-2=0$	|	p/q-Formel

$$x_{1,2}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}+2}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}+\frac{72}{36}}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{121}{36}}=-\frac{7}{6}\pm\frac{11}{6}$$

$x_1=\frac{2}{3};\quad x_2=-3$

Wegen $x_1=\frac{2}{3}\notin\mathbb{D}$ ist $\mathbb{L}=\{-3\}$ die einzigste Lösung.

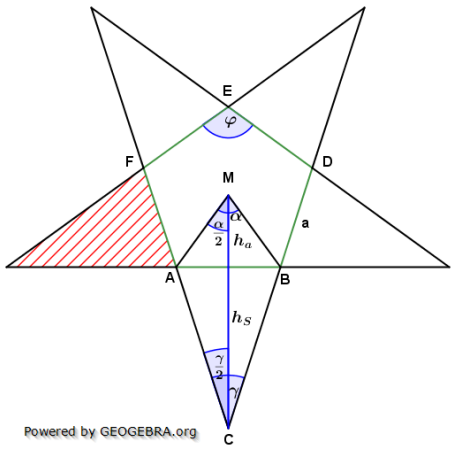
Lösung W3a/2007

Lösungslogik

Der Mantel der regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide entspricht fünfmal der Fläche des Dreiecks ABC. Für die Dreiecksfläche benötigen wir die Länge von h_S. Für h_S wiederum benötigen wir den Winkel $\frac{\gamma}{2}$.

Im Drachenviereck $CDEF$ sind die Winkel CFE, FED und EDC gleich groß und entsprechen dem Winkel φ. γ errechnet sich somit aus der Winkelsumme im Viereck von $360°$ abzüglich dreimal dem Winkel φ.

Die Fläche des Dreiecks ABC kann jetzt ermittelt werden und damit auch der Mantel M der Pyramide.



Für das Volumen der Pyramide wird die Grundfläche des Fünfecks sowie die Höhe h benötigt. Hierzu muss h_a ermittelt werden über den $tan\frac{\alpha}{2}$. α errechnet sich aus dem Spitzenwinkel des Dreiecks ABM.

Die Fläche des Dreiecks ABM errechnet sich nun über die Flächenformel des Dreiecks aus $\frac{a}{2}$ und h_a. Die Grundfläche ist fünfmal die Fläche des Dreiecks ABM. Die Höhe h der Pyramide errechnet sich aus dem Satz des Pythagoras. Danach kann das Volumen der Pyramide berechnet werden.

Klausuraufschrieb

φ: $\varphi = \frac{5 \cdot 180° - 360°}{5} = 108°$

γ: $\gamma = 360° - 3 \cdot \varphi = 360° - 3 \cdot 108° = 36$ | $\cdot 2;\ : a$

$\frac{\gamma}{2}$: $\frac{\gamma}{2} = 18°$

h_S: $tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_S}$ | $\cdot h_S;\ : tan\frac{\gamma}{2}$

$h_S = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1{,}8}{tan18°} = 5{,}54$

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 5{,}54 = 9{,}97$

M: $M = 5 \cdot A_{ABC} = 5 \cdot 9{,}97 = 49{,}86$

α: $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$.

h_a: $tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a}$ | $\cdot h_a;\ : tan\frac{\alpha}{2}$

$h_a = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1{,}8}{tan36°} = 2{,}48$

A_{ABM}: $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 2{,}48 = 4{,}46$

G: $G = 5 \cdot A_{ABM} = 5 \cdot 4{,}46 = 22{,}3$

h: $h = \sqrt{h_S^2 - h_a^2} = \sqrt{5{,}54^2 - 2{,}48^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{24{,}5412} = 4{,}95$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 22{,}3 \cdot 4{,}95 = 36{,}795$

Der Mantel der Pyramide hat einen Flächeninhalt von $49{,}9\ cm^2$. Ihr Volumen ist $36{,}8\ cm^3$ groß.

Lösung W3b/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte N_1 und N_2.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Aufstellen der Geradengleichung g durch den Scheitelpunkt S_1 mit $m = -1$.
Berechnung des Schnittpunktes von g mit der x–Achse ergibt Scheitelpunkt S_2.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch N_1 und N_2:

p_1: $y = (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$

$y = (x - 1) \cdot (x - 5) = x^2 - 6x + 5$

alternativ:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $0 = 1^2 + p + q$ | Punktprobe mit $N_1(1|0)$

(2) $0 = 25 + 5p + q$ | Punktprobe mit $N_2(5|0)$

(2)-(1) $0 = 24 + 4q$

$b = -6$

$b \longrightarrow (1)$

$0 = 1 - 6 + q$

$q = 5$

p_1: $y = x^2 - 6x + 5$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-3)^2 - 4$ | quadratische Ergänzung

$S_1(3|-4)$

Geradengleichung g durch S_1 mit $m = -1$:

g: $y = -x + b$ | $m = -1$.

$-4 = -3 + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$b = -1$

g: $y = -x - 1$

Schnittpunkt von g mit der x-Achse:

$0 = -x - 1$

$x_0 = -1$

Scheitelpunkt von p_2 (nach Aufgabenstellung „Berührpunkt mit der x–Achse):

$S_2(-1|0)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+1)^2$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 2x + 1$ | allgemeine Parabelgleichung von p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$ | $-x^2;\ +6x;\ -5$

$8x - 4 = 0$

$x_S = 0{,}5$

$x_S \longrightarrow p_1$

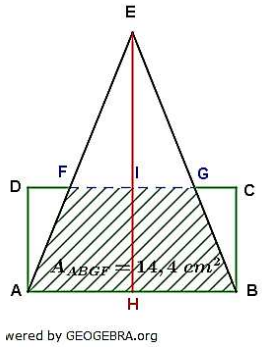
$y_s = 0{,}5^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 5 = 2{,}25$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(0{,}5|2{,}25)$.

Lösung W4a/2007

<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von A_{ABGF} aus $80\,\%$ des Rechtecks $ABCD$.
Berechnung von $\overline{FG}$ über die Flächenformel Trapez.
Berechnung von $\overline{FI}$.
Berechnung von $\overline{EH}$ über den ersten Strahlensatz.



Klausuraufschrieb

A_{ABGF}: $A_{ABGF} = 0{,}8 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0{,}8 \cdot 6 \cdot 3 = 14{,}4.$

$\overline{FG}$: $A_{ABGF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{FG}) \cdot \overline{BC}$

$14{,}4 = \frac{1}{2} \cdot (6 + \overline{FG}) \cdot 3 \quad | \quad \cdot 2;\ :3$

$\frac{28{,}8}{3} = 6 + \overline{FG} \quad | \quad -6$

$\overline{FG} = \frac{28{,}8}{3} - 6 = 3{,}6$

$\overline{FI}$: $\overline{FI} = 0{,}5 \cdot \overline{FG} = 0{,}5 \cdot 3{,}6 = 1{,}8$

$\overline{EH}$: $\frac{\overline{EH}-3}{\overline{FI}} = \frac{\overline{EH}}{\frac{\overline{AB}}{2}}$

$\frac{\overline{EH}-3}{1{,}8} = \frac{\overline{EH}}{3} \quad | \quad \cdot 3;\ \cdot 1{,}8$

$3 \cdot (\overline{EH} - 3) = 1{,}8 \cdot \overline{EH}$

$3 \cdot \overline{EH} - 9 = 1{,}8 \cdot \overline{EH} \quad | \quad -1{,}8 \cdot \overline{EH};\ +9$

$1{,}2 \cdot \overline{EH} = 9 \quad | \quad :1{,}2$

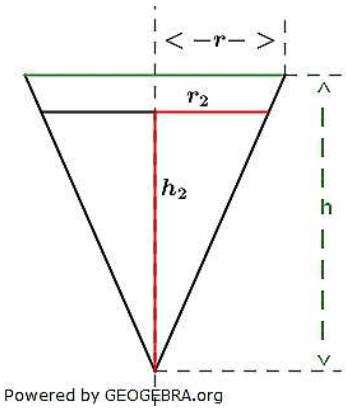
$\overline{EH} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5$

Der Abstand des Punktes E zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt $7{,}5\ cm$.

Lösung W4b/2007

Lösungslogik

Berechnung des Volumens des gesamten kegelförmigen Gefäßes über die Volumenformel.
Berechnung von h_2.
Berechnung von r_2 über den 2. Strahlensatz.
Berechnung des Wasservolumens.
Berechnung des Kugelvolumens aus der Differenz von Gesamtvolumen des Kegels und dem Wasservolumen.
Berechnung von über die Volumenformel der Kugel.



Klausuraufschrieb

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 8{,}0 = 102{,}63$

h_2: $h_2 = \frac{7}{8} \cdot h = \frac{7}{8} \cdot 8 = 7$

r_2: $\frac{r_2}{h_2} = \frac{r}{h} \quad | \quad \cdot h_2$

$r_2 = \frac{r \cdot h_2}{h} = \frac{3{,}5 \cdot 7}{8} = 3{,}0625$

V_{Wa}: $V_{Wa} = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}1^2 \cdot 7{,}0 = 70{,}445$

V_{Kug}: $V_{Kug} = V_{Keg} - V_{Wa} = 102{,}63 - 70{,}445 = 32{,}185$

r_{Kug}: $V_{Kug} = \frac{4}{3}\pi r_{Kug}^3 \quad | \quad \cdot \frac{3}{4};\ :\pi$

$r_{Kug}^3 = \frac{\frac{3}{4} \cdot V_{Kug}}{\pi} = \frac{0{,}75 \cdot 32{,}2}{\pi} = 7{,}6872 \quad | \quad \sqrt[3]{\ }$

$r_{Kug} = 1{,}9736$

Der Radius der Kugel beträgt $2{,}0\ cm$.

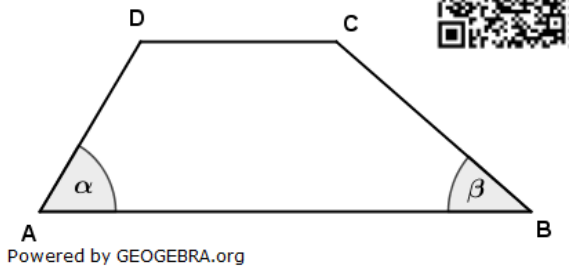
Aufgabe W1a/2008

Gegeben ist das Trapez $ABCD$.
Es gilt:

$\overline{AB} = 8{,}0\ cm$
$\overline{BC} = 4{,}2\ cm$
$\beta = 41{,}0°$
$\overline{AD} = \overline{CD}$

Berechnen Sie den Winkel α.

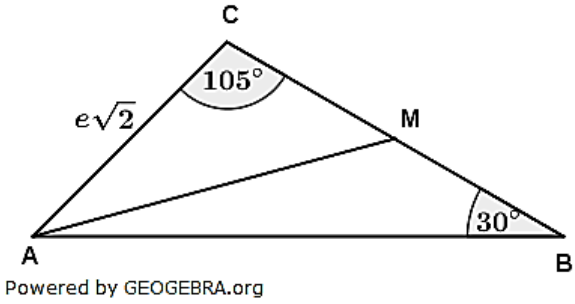
Lösung: $\alpha = 59{,}5°$.



Aufgabe W1b/2008

Gegeben ist das Dreieck ABC. Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{BC}$.
Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass für den Flächeninhalt des Dreiecks ABM gilt:

$$A_{ABM} = \frac{e^2}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$



Aufgabe W2a/2008

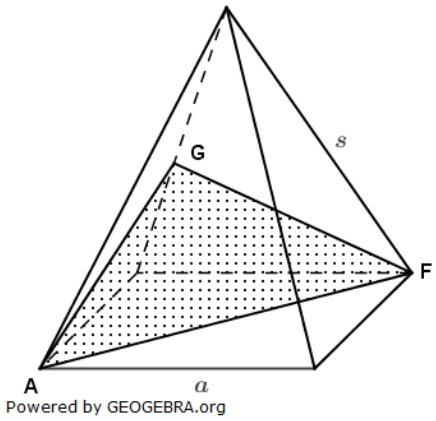
Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt:

$a = 7{,}6\ cm$
$s = 10{,}2\ cm$.

Der Punkt G halbiert die Seitenkante s.
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AFG.

Lösung: $u_{AFG} = 25{,}6\ cm$

Tipp: Kosinussatz für die Strecke $\overline{AG} = \overline{FG}$.



Aufgabe W2b/2008

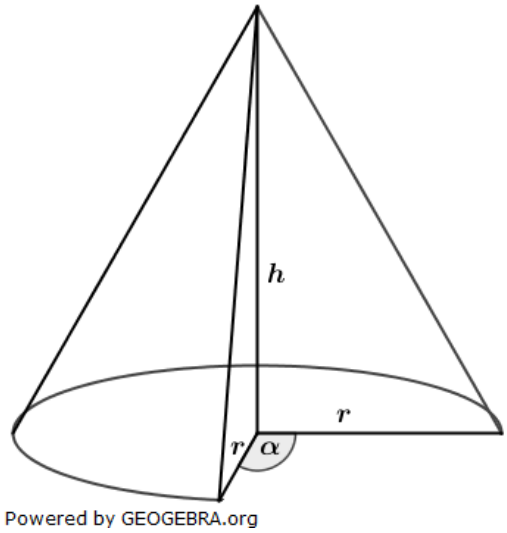
Aus einem massiven Kegel wurde ein Teil ausgeschnitten.
Es gilt:

$h = 4e$
$r = 3e$
$\alpha = 120°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$4e^2(2\pi - 3)$.

kleiner ist.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3a/2008

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(2|-5)$.
Durch die gemeinsamen Punkte der bei den Parabeln verläuft eine Gerade.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden rechnerisch.
Berechnen Sie die Winkel, unter denen die Gerade die x-Achse schneidet.

Lösung: $h\colon\ y = -2x + 2;\ \alpha = 116{,}6\,°$

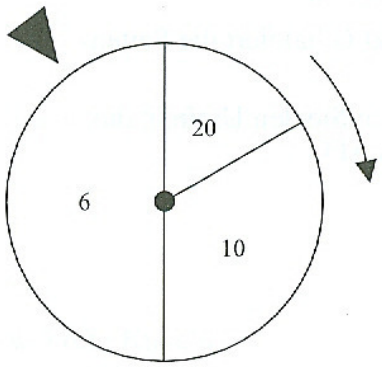
Aufgabe W3b/2008

Von einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 sind die Schnittpunkte mit der x-Achse bekannt: $N_1(1|0)$ und $N_2(5|0)$
Durch den Scheitelpunkt der Parabel p_1 verläuft die Gerade g mit der Steigung $m = -1$. Auf dieser Geraden liegt der Scheitelpunkt einer zweiten nach oben geöffneten Normalparabel, die mit der x-Achse nur einen gemeinsamen Punkt hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Parabeln.

Lösung: $P(0{,}5|2{,}25)$

Aufgabe W4a/2008

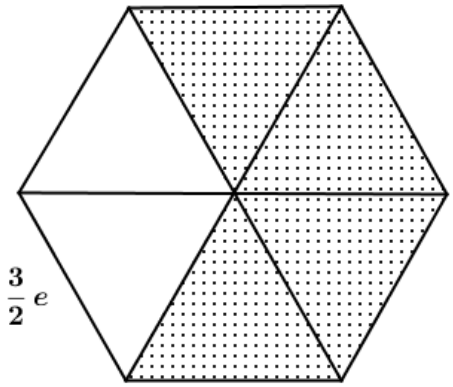
Ein Glücksrad mit den Mittelpunktswinkeln 60°, 120° und 180° ist mit den Zahlen 20, 10 und 6 beschriftet.
Es wird zweimal gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 30 ergibt? Lösung: $p = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\,\%$
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe größer als 12 ist? Lösung: $p = \frac{3}{4} = 75\,\%$
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe kleiner als 30? Lösung: $p = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\,\%$



Aufgabe W4b/2008

Das regelmäßige Sechseck hat die Seitenlänge $\frac{3}{2}e$.
Die vier grau eingefärbten Dreiecke bilden die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide.
Berechnen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von e.
Der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Pyramide wird mit φ bezeichnet.
Zeigen Sie, dass gilt: $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

Lösung: $V = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$

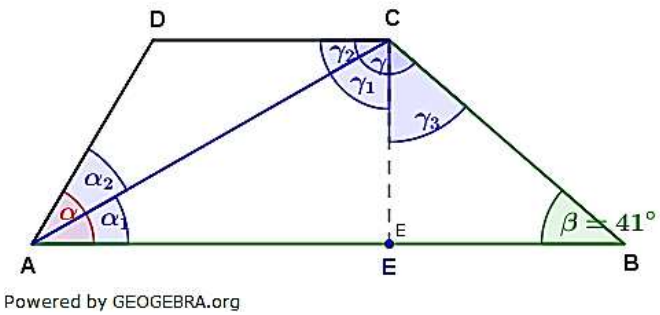


Powered by GEOGEBRA.org

Lösung W1a/2008

Lösungslogik

Berechnung von γ_3 als Ergänzungswinkel im Dreieck EBC.
Berechnung von γ.
Berechnung von $\overline{EC}$ über den $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{AE}$ über $\overline{AB} - \overline{EB}$.
Berechnung von γ_1 über den tan.
Berechnung von γ_2 als Differenz aus γ und γ_1.



Wegen $\overline{AD} = \overline{DC}$, ist $\alpha_2 = \gamma_2$.
Berechnung von α_1 über die Winkelsumme im Dreieck ABC.
Berechnung von α als Summe von α_1 und α_2.

Klausuraufschrieb

γ_3: $\gamma_3 = 90° - \beta = 90° - 41° = 49°$

γ: $\gamma = 90° + \gamma_3 = 90° + 49° = 139°$

$\overline{EC}$: $sin\beta = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{EC} = \overline{BC} \cdot sin\beta = 4{,}2 \cdot sin41° = 2{,}7554$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{EC}^2} = \sqrt{4{,}2^2 - 2{,}7554^2} = 10{,}0478$ | Satz des Pythagoras

$\overline{EB} = \sqrt{10{,}0478} = 3{,}17$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 8{,}0 - 3{,}17 = 4{,}83$

γ_1: $tan(\gamma_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{4{,}83}{2{,}7554} = 1{,}7529$

$\gamma_1 = tan^{-1} 1{,}7529 = 60{,}27°$

γ_2: $\gamma_2 = 90° - \gamma_1 = 90° - 60{,}27° = 29{,}73° = \alpha_2$

α_1: $\alpha_1 = 180° - \beta - \gamma_1 - \gamma_3 = 180° - 41° - 60{,}27° - 49° = 29{,}73°$

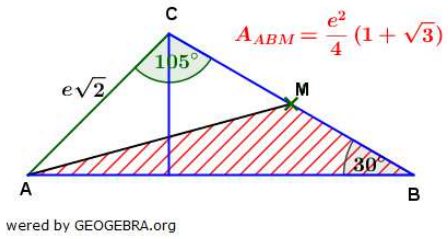
α: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 29{,}73° + 29{,}73° = 59{,}46°$

Der Winkel α hat $59{,}5°$.

Lösung W1b/2008

Lösungslogik

Die Fläche des Dreiecks A_{BM} errechnet sich aus der trigonometrischen Flächenformel für Dreiecke über die Seite $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$ und dem $sin30°$.
Berechnung von $\overline{CD}$ über den $sin45°$.
Berechnung von $\overline{AD}$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{BM}$.
Berechnung von $\overline{AB}$.
Berechnung von A_{ABM} über die trigonometrische Flächenformel des Dreiecks.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot sin30°$

$\overline{CD}$: $sin45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}$

$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot sin45° = e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = e$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = \overline{CD} = e$ | Wegen 45°

$\overline{BD}$: $tan30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD}$; $: tan30°$

$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{tan30°} = \frac{e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$ | $\cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)

$\overline{BD} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3e\sqrt{3}}{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{BC}$: $cos30° = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$; $: cos30°$

$\overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{cos30°} = \frac{\frac{3e}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{6e}{3} = 2e$

$\overline{BM}$: $\overline{BM} = 0{,}5 \cdot \overline{BC} = 0{,}5 \cdot 2e = e$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = e + e\sqrt{3} = e(1 + \sqrt{3})$

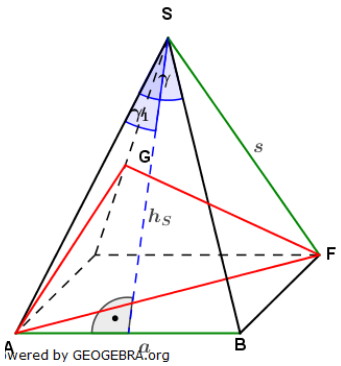
A_{ABM}: $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot e(1 + \sqrt{3}) \cdot e \cdot sin30° = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$

$A_{ABM} = \frac{1}{4} e^2 (1 + \sqrt{3})$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2008

Lösungslogik

Wegen „G halbiert die Seitenkante s„ ist $\overline{AG} = \overline{FG}$ und $\overline{GS} = 0{,}5 \cdot s$.
Berechnung von γ_1 über den sin.
Berechnung von γ.
Berechnung des Neigungswinkels $\overline{AF}$ über die Flächendiagonale der Grundfläche.
Berechnung von $\overline{AG} = \overline{FG}$ über den Kosinussatz.
Berechnung des Umfangs des Dreiecks AFG.



Klausuraufschrieb

$u_{AFG} = \overline{AF} + \overline{AG} + \overline{GF} = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{AG}$

γ_1 $sin\gamma_1 = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{s} = \frac{3{,}8}{10{,}2} = 0{,}3725$

$\gamma_1 = sin^{-1}(0{,}3725) = 21{,}87°$

γ: $\gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 43{,}74°$

$\overline{AF}$: $\overline{AF} = a \cdot \sqrt{2} = 7.6 \cdot \sqrt{2} = 10{,}75$

$\overline{AG}$: $\overline{AG}^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$= 10{,}2^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 10{,}2 \cdot 5{,}1 \cdot cos43{,}74°$ | $\sqrt{}$

$\overline{AG} = \sqrt{54{,}88} = 7{,}41$

u_{AFG}: $u_{AFG} = 10{,}75 + 2 \cdot 7{,}41 = 25{,}57$

Der Umfang des Dreiecks AFG beträgt $25{,}6\ cm$.

β: $cos\beta = \frac{h_a}{h_S} = \frac{4{,}13}{8{,}4} = 0{,}49166666$

$\beta = cos^{-1}(0{,}49166666) = 60{,}55°$

$\overline{AF}$: $\overline{AF} = r + h_a = 5{,}1 + 4{,}13 = 9{,}23$

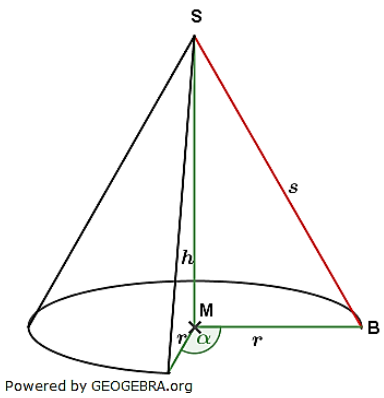
A_{AFS}: $A_{AFS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot \overline{AF} \cdot sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4 \cdot 9{,}23 \cdot sin60{,}55° = 33{,}76$

Das Dreieck AFS hat einen Flächeninhalt von $33{,}8\ cm^2$.

Lösung W2b/2008

Lösungslogik

Berechnung von s des Kegels über den Satz des Pytha
Berechnung der Oberfläche O_{Keg} des Kegels über die Oberflächenformel.
Durch den Ausschnittwinkel von $120°$ ist die Fläche nur noch $\frac{2}{3}$ der Fläche des ganzen Kegels ($\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$).
Hinzu kommen jetzt aber noch zweimal das Dreieck MBS, welches durch den Schnitt entsteht.
Berechnung der zwei Dreiecksflächen.
Berechnung der Oberfläche O_{Neu} des neu entstanden Körpers.
Berechnung der Differenz aus O_{Neu} und O_{Keg}.



Klausuraufschrieb

s: $s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(4e)^2 + (3e)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{25e^2} = 5e$

O_{Keg}: $O_{Keg} = \pi \cdot r \cdot (r + s) = \pi \cdot 3e \cdot (3e + 5e) = 24\pi e^2$

A_{MBS}: $A_{MBS} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3e \cdot 4e = 6e^2$

O_{Neu}: $O_{Neu} = \frac{2}{3} \cdot O_{Keg} + 2 \cdot A_{MBS} = \frac{2}{3} \cdot 24\pi e^2 + 2 \cdot 6e^2 = 16\pi e^2 + 12e^2$

O_{Diff}: $O_{Diff} = O_{Keg} - O_{Neu} = 24\pi e^2 - 16\pi e^2 - 12e^2 = 8\pi e^2 - 12e^2$

$O_{Diff} = 4e^2(2\pi - 3)$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über deren Scheitelpunkt.
Berechnung der Schnittpunkte von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Geradengleichung g durch die Schnittpunkte von p_1 mit p_2.
Berechnung des Schnittwinkels der Geraden g mit der x-Achse über $tan(\alpha) = m$.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = -x^2 + 5$ | gegeben

Funktionsgleichungen p_2 über Scheitelpunkt:

p_2: $y = (x-2)^2 - 5$ | Scheitelpunktgleichung

$y = x^2 - 4x - 1$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$-x^2 + 5 = x^2 - 4x - 1$ | $+x^2;\ -5$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$x_1 = 3;\ x_2 = -1$

$x_1 \longrightarrow p_1$

$y_1 = -x_1^2 + 5 = -3^2 + 5 = -4$

$x_2 \longrightarrow p_1$

$y_2 = -x_2^2 + 5 = -(-1)^2 + 5 = 4$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $P(3|-4)$ und $Q(-1|4)$.

Geradengleichung g durch P und Q:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-4)}{-1-3} = -2$

$y = -2x + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$-4 = -2 \cdot 3 + b$

$b = 2$

g: $y = -2x + 2$

Schnittwinkel von g mit der x-Achse:

Es gilt: $m = tan(\alpha)$

$tan(\alpha_1) = -2 \Longrightarrow \alpha = |tan^{-1}(-2)| = 63{,}4°$

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$=180°-63,4°=116,36°

Die beiden Schnittwinkel sind $\alpha_1 = 63{,}4°$ und $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 116{,}6°$

Lösung W3b/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte N_1 und N_2.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Aufstellen der Geradengleichung g durch den Scheitelpunkt S_1 mit $m = -1$.
Berechnung des Schnittpunktes von g mit der x–Achse ergibt Scheitelpunkt S_2.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch N_1 und N_2:

p_1: $y = (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$

$y = (x-1) \cdot (x-5) = x^2 - 6x + 5$

alternativ:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $0 = 1^2 + p + q$ | Punktprobe mit $N_1(1|0)$

(2) $0 = 25 + 5p + q$ | Punktprobe mit $N_2(5|0)$

(2)-(1) $0 = 24 + 4q$

$b = -6$

$b \longrightarrow (1)$

$0 = 1 - 6 + q$

$q = 5$

p_1: $y = x^2 - 6x + 5$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-3)^2 - 4$ | quadratische Ergänzung

$S_1(3|-4)$

Geradengleichung g durch S_1 mit $m = -1$:

g: $y = -x + b$ | $m = -1$.

$-4 = -3 + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$b = -1$

g: $y = -x - 1$

Schnittpunkt von g mit der x-Achse:

$0 = -x - 1$

$x_0 = -1$

Scheitelpunkt von p_2 (nach Aufgabenstellung „Berührpunkt mit der x–Achse):

$S_2(-1|0)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+1)^2$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 2x + 1$ | allgemeine Parabelgleichung von p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$ | $-x^2;\ +6x;\ -5$

$8x - 4 = 0$

$x_S = 0{,}5$

$x_S \longrightarrow p_1$

$y_s = 0{,}5^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 5 = 2{,}25$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(0{,}5|2{,}25)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe genau 30.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe größer als 12.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe kleiner als 30.

Klausuraufschrieb

$P(6) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(10) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(20) = \frac{1}{6}$

$P(Summe = 30) = P\{(10;20),(20;10)\}$

$P(10;20) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ $\qquad P(20;10) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P(Summe = 30) = P(10;20) + P(20;10) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\ \%$

Die Summe größer als 12 hat das Gegenereignis Summe gleich 12.

$P(Summe > 12) = 1 - P(Summe = 12)$

$P(6;6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(Summe > 12) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 75\ \%$

Die Summe kleiner als 30 hat das Gegenereignis Summe größer gleich 30.

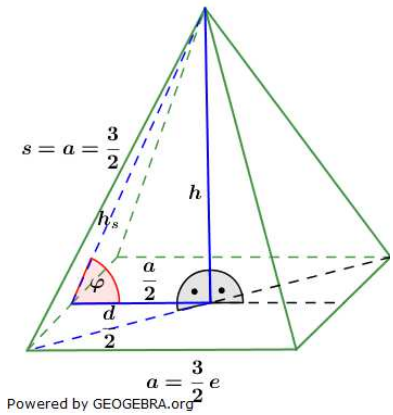
$P(Summe < 30) = 1 - \big(P(Summe = 30) + P(Summe = 40)\big)$

$P(Summe < 30) = 1 - \frac{2}{18} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\ \%$

Lösung W4b/2008

Lösungslogik

Wegen des regelmäßigen Sechsecks sind die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge $s = a = \frac{3}{2}e$. Für das Volumen der Pyramide benötigen wir die Pyramidenhöhe h.
Berechnung von $\frac{d}{2}$ über die Diagonale der quadratischen Grundfläche.
Berechnung von h übe den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens und Aufstellung von $tan\alpha$.



Klausuraufschrieb

$\frac{d}{2}$: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}e \cdot \sqrt{2}$ $\quad |$ Diagonale im Quadrat

$\frac{d}{2} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$

h: $\quad h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}e\right)^2 - \left(\frac{3}{4}e\sqrt{2}\right)^2}$ $\quad |$ Satz des Pythagoras

$= \sqrt{\frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{16}e^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{18}{8}e^2 - \frac{9}{8}e^2} = \sqrt{\frac{9}{8}e^2}$ $\quad | \ \sqrt{\ }$

$h = \frac{3e}{\sqrt{8}} = \frac{3e}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \frac{3e}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3e \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}e\right)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2} = \frac{27}{48}e^3\sqrt{2} = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$ $\quad$ **q.e.d.**

$tan\varphi$: $\quad tan\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{4}e} = \sqrt{2}$ $\quad$ **q.e.d.**

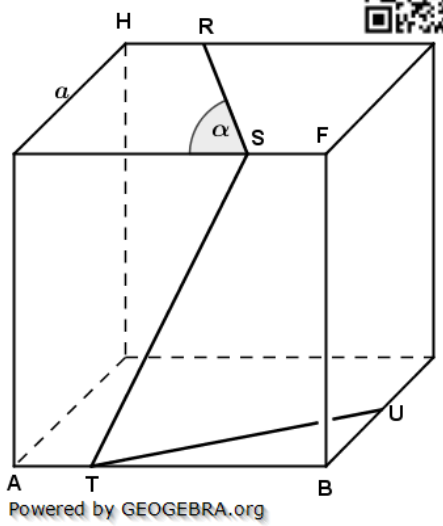
Aufgabe W1a/2009

Auf einem Würfel liegt der Streckenzug $RSTU$ mit der Länge $21{,}7\ cm$.
Es gilt:

$a = 6{,}4\ cm$
$\alpha = 55{,}5°$
$\overline{AT} = \overline{FS} = \overline{HR}$

Berechnen Sie die Länge von $\overline{BU}$.

Lösung: $\overline{BU} = 3{,}0\ cm$



Aufgabe W1b/2009

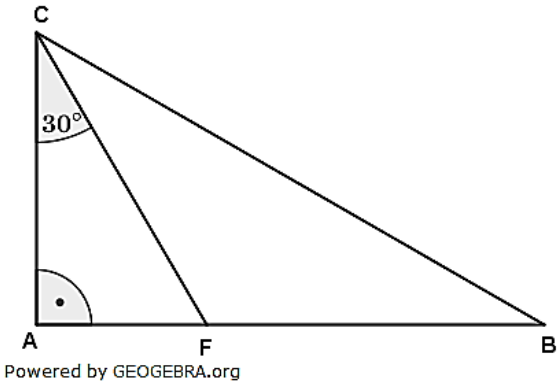
Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC.
Es gilt:

$\overline{AC} = e\sqrt{6}$
$\overline{CF} = \overline{FB}$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Dreiecks ABC mit der Formel

$$u = 3e\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

berechnet werden kann.



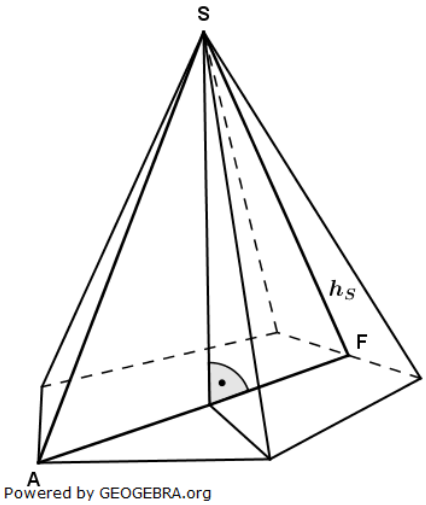
Aufgabe W2a/2009

Von einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind gegeben:

$M = 126\ cm^2$ (Mantelfläche)
$h_S = 8{,}4\ cm$ (Höhe der Seitenfläche)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AFS.

Lösung: $A_{AFS} = 33{,}8\ cm^2$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W2b/2009

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel.
Es gilt:

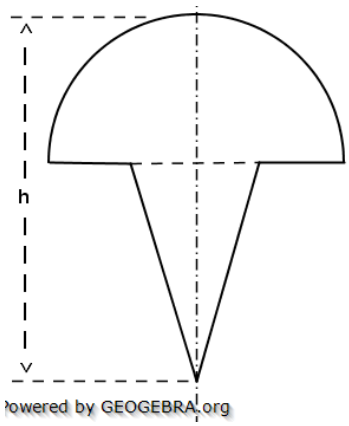
$A_{Ges} = 60{,}0\ cm^2$ (Flächeninhalt der gesamten Achsenschnittfläche)

$r = 5{,}4\ cm$ (Radius der Halbkugel)

$h = 13{,}6\ cm$

Berechnen Sie die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $O = 311{,}0\ cm^2$



Aufgabe W3a/2009

Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(3|6)$ und $B(4|11)$.
Diese Parabel wird um 5 Einheiten nach links und um 5 Einheiten nach unten verschoben. Dadurch entsteht die Parabel p_2 mit dem Scheitelpunkt S_2.
Die beiden Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt P. Berechnen Sie die Entfernung der Punkte P und S_2.

Lösung: $\overline{PS_2} = 9{,}5\ LE$

Aufgabe W3b/2009

Der Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Normalparabel hat die Koordinaten $S(4|-2)$.
Der Punkt $P(2|y_P)$ liegt auf der Parabel. Er bildet mit den Punkten $A(-3|0)$ und $B(1|0)$ ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABP.
Der Punkt P wird auf der Parabel verschoben.
Es gibt zwei Dreiecke ABP_1 und ABP_2, deren Flächeninhalt jeweils $20{,}5\ FE$ (Flächeneinheiten) beträgt.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2.

Lösung: $A_{ABP} = 4\ FE$; $P_1(0{,}5|10{,}25)$; $P_2(7{,}5|10{,}25)$

Aufgabe W4a/2009

Zwei Spielwürfel werden geworfen.
Die beiden gewürfelten Augenzahlen werden addiert (Augensumme).
Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "Augensumme kleiner als 5"? Lösung: $p = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$

Bei einem Pasch sind die Augenzahlen gleich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Pasch zu werfen?
Lösung: $p = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\,\%$

Nennen Sie zwei Ereignisse, für die sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ ergibt.
Lösung (z.B.): $P(Augensumme < 4) = \frac{1}{12}$; $P(Augensumme > 10) = \frac{1}{12}$

Aufgabe W4b/2009

Aus einem Würfel wurde eine quadratische Pyramide herausgearbeitet.
Es gilt:

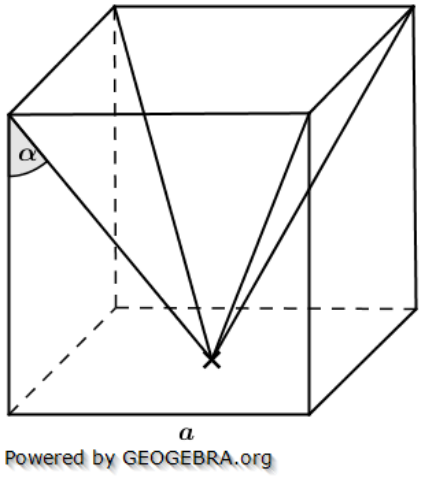
$a = 2e$

Zeigen Sie, dass die Oberfläche des Restkörpers mit der Formel

$O = 4e^2\left(5 + \sqrt{5}\right)$

berechnet werden kann.
Weisen Sie nach, dass gilt:

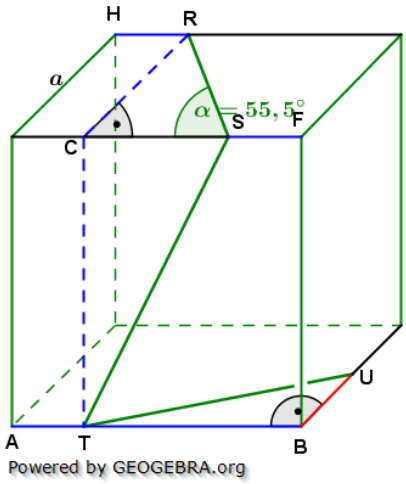
$cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{6}$



Lösung W1a/2009

Lösungslogik

Die Strecke $\overline{BU}$ lässt sich über den Satz des Pythagoras aus den Strecken $\overline{TB}$ und $\overline{TU}$ bestimmen.
Die Strecke $\overline{TU}$ berechnet sich aus der Differenz der Länge des Streckenzuges $RSTU$ und den Längen der Strecken $\overline{RS}$ und $\overline{ST}$.
Da die beiden Dreiecke SRC und STC kongruent sind, ist $\overline{RS} = \overline{ST}$.
$\overline{RS} = \overline{ST}$ errechnet sich über den $sin\alpha$.
$\overline{TB}$ errechnet sich der Differenz von a und $\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$.
$\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$ errechnet sich aus der Differenz von a und $\overline{CS}$ geteilt durch 2.
$\overline{CS}$ errechnet sich über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{RS}$: $sin\alpha = \frac{a}{\overline{RS}}$ | $\cdot \overline{RS};\ : sin\alpha$

$\overline{RS} = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{6{,}4}{sin55{,}5°} = 7{,}77$

$\overline{CS}$: $\overline{CS} = \sqrt{\overline{RS}^2 - a^2} = \sqrt{7{,}77^2 - 6{,}4^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{CS} = \sqrt{19{,}4129} = 4{,}40$

$\overline{AT}$: $\overline{AT} = \frac{a - \overline{CS}}{2} = \frac{6{,}4 - 4{,}4}{2} = 1$

$\overline{TB}$: $\overline{TB} = a - \overline{AT} = 6{,}4 - 1 = 5{,}4$

$\overline{TU}$: $\overline{TU} = \overline{RSTU} - 2 \cdot \overline{RS} = 21{,}7 - 2 \cdot 7{,}77 = 6{,}16$

$\overline{BU}$: $\overline{BU} = \sqrt{\overline{TU}^2 - \overline{TB}^2} = \sqrt{6{,}16^2 - 5{,}4^2}$ | Satz des Pythagoras

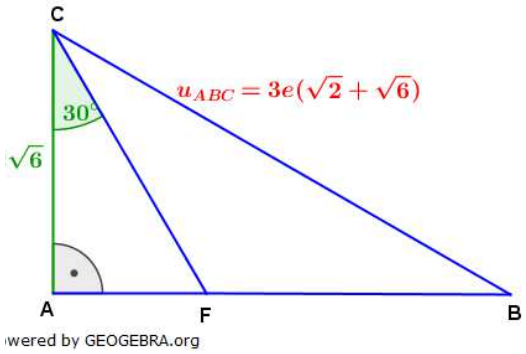
$\overline{BU} = \sqrt{8{,}7856} = 2{,}96$

Die Strecke $\overline{BU}$ ist $3\ cm$ lang.

Lösung W1b/2009

Lösungslogik

Der Umfang des Dreiecks ABC errechnet sich der Summe der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{CF} = \overline{FB}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{AB}$ aus der Summe von $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von u_{ABC}.



Klausuraufschrieb

$u_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

$\overline{AF}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{AF} = \overline{AC} \cdot tan30° = e\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{e\sqrt{18}}{3} = e\sqrt{2}$

$\overline{CF}$: $\quad cos30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} \quad | \quad \cdot \overline{CF};\ : cos30°$

$\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{cos30°} = \frac{e\sqrt{6}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = 2e\sqrt{2}$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{CF} = e\sqrt{2} + 2e\sqrt{2} = 3e\sqrt{2}$

$\overline{BC}$: $\quad \overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(e\sqrt{6}\right)^2 + \left(3e\sqrt{2}\right)^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

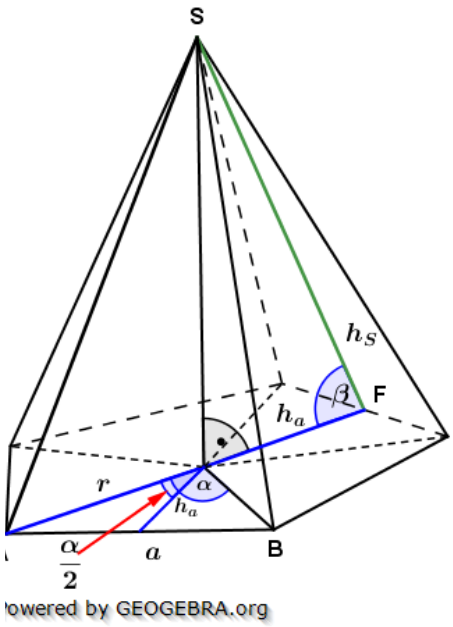
$\overline{BC} = \sqrt{6e^2 + 18e^2} = \sqrt{24e^2} = e\sqrt{4 \cdot 6} = 2e\sqrt{6}$

u_{ABC}: $\quad u_{ABC} = 3e\sqrt{2} + 2e\sqrt{6} + e\sqrt{6} = 3e\sqrt{2} + 3e\sqrt{6} = 3e\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2009

Lösungslogik

Berechnung des Flächeninhalts eines Seitendreiecks über den gegebenen Mantel M.
Berechnung der Grundkante a aus der Flächenformel für Dreiecke und daraus $\frac{a}{2}$.
Berechnung des Spitzenwinkels α und daraus $\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von h_a über den $tan\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von r über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Winkels β über den cos.
Berechnung der Strecke $\overline{AF}$ als Summe von r und h_a.
Berechnung der Fläche des Dreiecks AFS über die trigonometrische Flächenformel.



Klausuraufschrieb

A_{ABS}: $\quad A_{ABS} = \frac{1}{5} \cdot M = \frac{1}{5} \cdot 126 = 25{,}2$

a: $\quad A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S \quad | \quad \cdot 2;\ : h_S$

$a = \frac{2 \cdot A_{ABS}}{h_S} = \frac{2 \cdot 25{,}2}{8{,}4} = 6$ hieraus $\frac{a}{2} = 3$

α: $\quad \alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$

h_a: $\quad tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \quad | \quad \cdot h_a;\ : tan\frac{\alpha}{2}$

$h_a = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{tan36°} = 4{,}13$

r: $\quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2} = \sqrt{3^2 + 4{,}13^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$r = \sqrt{26{,}0569} = 5{,}1$

β: $\cos\beta = \frac{h_a}{h_S} = \frac{4{,}13}{8{,}4} = 0{,}49166666$

$\beta = \cos^{-1}(0{,}49166666) = 60{,}55°$

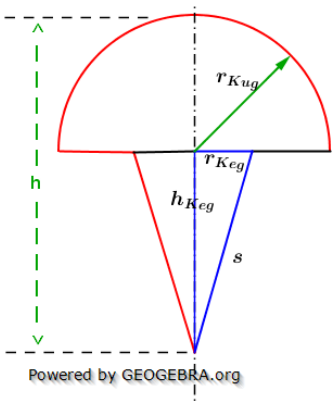
$\overline{AF}$: $\overline{AF} = r + h_a = 5{,}1 + 4{,}13 = 9{,}23$

A_{AFS}: $A_{AFS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot \overline{AF} \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4 \cdot 9{,}23 \cdot \sin 60{,}55° = 33{,}76$

Das Dreieck AFS hat einen Flächeninhalt von $33{,}8\ cm^2$.

Lösung W2b/2009

Lösungslogik



Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus der Oberfläche der Halbkugel, dem Mantel des Kegels sowie einem Kreisring mit dem äußeren Radius r_{Kug} und dem inneren Radius r_{Keg}.

Die Skizze ist ein „Achsenschnitt", der gegebene Flächeninhalt A_{Ges} ist also die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius r_{Kug} und einem Dreieck mit der Grundseite $2 \cdot r_{Keg}$ und der Höhe h_{Keg}.

Berechnung von h_{Keg}.

Berechnung von $A_{Halbkreis}$ mit Radius r_{Kug}.

Berechnung von h_{Keg} aus der Differenz von h und r_{Kug}.

Berechnung von $A_{Dreieck}$.über die Differenz aus A_{Ges} und $A_{Halbkreis}$.

Berechnung von r_{Kug} über die Flächenformel des Dreiecks.

Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.

Berechnung der Oberfläche der Halbkugel.

Berechnung der Mantelfläche des Kegels.

Berechnung der Fläche des Kreisrings.

Berechnung der Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Klausuraufschrieb

A_{HK}: $A_{HK} = \frac{1}{2}\pi r_{Kug}^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 5{,}4^2 = 45{,}80$

h_{Keg}: $h_{Keg} = h - r_{Kug} = 13{,}6 - 5{,}4 = 8{,}2$

$A_{Dreieck}$: $A_{Dreieck} = A_{Ges} - A_{HK} = 60 - 45{,}80 = 14{,}2$

r_{Keg}: $A_{Dreieck} = r_{Kug} \cdot h_{Kug}$ | $: h_{Kug}$

$r_{Keg} = \frac{A_{Dreieck}}{h_{Keg}} = \frac{14{,}2}{8{,}2} = 1{,}73$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2} = \sqrt{8{,}2^2 + 1{,}73^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{70{,}2329} = 8{,}38$

O_{HK}: $O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_{Kug}^2 = 2\pi \cdot 5{,}4^2 = 183{,}22$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi r_{keg} s = \pi \cdot 1{,}73 \cdot 8{,}38 = 45{,}55$

$O_{Kreisring}$: $O_{Kreisring} = \pi(r_{kug}^2 - r_{keg}^2) = \pi \cdot (5{,}4^2 - 1{,}73^2) = 82{,}21$

$O_{Körper}$: $O_{Körper} = O_{HK} + M_{Keg} + O_{Kreisring} = 183{,}22 + 45{,}55 + 82{,}21 = 310{,}98$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $311\ cm^2$.

Lösung W3a/2009

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte A und B.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Berechnung des Scheitelpunkts S_2 von p_2 durch die angegebene Verschiebung.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.
Berechnung der Entfernung $\overline{PS_2}$ mit dem Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch A und B:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $6 = 9 + 3p + q$ | Punktprobe mit $A(3|6)$

(2) $11 = 16 + 4p + q$ | Punktprobe mit $B(4|11)$

(2)-(1) $5 = 7 + p$

$p = -2$

$p \longrightarrow (1)$

$6 = 9 + 3 \cdot (-2) + q$

$q = 3$

p_1: $y = x^2 - 2x + 3$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-1)^2 + 2$ | quadratische Ergänzung

$S_1(1|2)$

Verschiebung von S_1 nach S_2:

S_2: $S_2(1-5|2-5)$

$S_2(-4|-3)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+4)^2 - 3$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 8x + 13$ | allgemeine Parabelgleichung p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 2x + 3 = x^2 + 8x + 13$ | $-x^2;\ -2x;\ -3$

$10x + 10 = 0$

$x_S = -1$

$x_S \longrightarrow p_1$

$y_s = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(-1|6)$.

Länge der Strecke $\overline{PS_2}$:

$\overline{PS_2}$: $\overline{PS_2} = \sqrt{\left(x_p - x_{S_2}\right)^2 + \left(y_p - y_{S_2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{\left(-1-(-4)\right)^2 + \left(6-(-3)\right)^2}$

$\overline{PS_2} = \sqrt{3^2+9^2} = \sqrt{90} = 9{,}54$

Die Länge der Strecke $\overline{PS_2}$ beträgt $9{,}5\ LE$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3b/2009

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p über die Scheitelpunktgleichung.
Berechnung der y–Koordinate von Punkt P.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ABP.
Bestimmung der Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel, die zusammen mit den Punkten A und B ein Dreieck mit Flächeninhalt $20{,}5\ FE$ bilden.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p über Scheitel $S(4|-2)$:

p: $y = (x-4)^2 - 2$ | Scheitelpunktgleichung p

$y = x^2 - 8x + 14$ | allgemeine Parabelgleichung p

y-Koordinate von P:

y_P: $y_P = 2^2 - 8 \cdot 2 + 14 = 2$

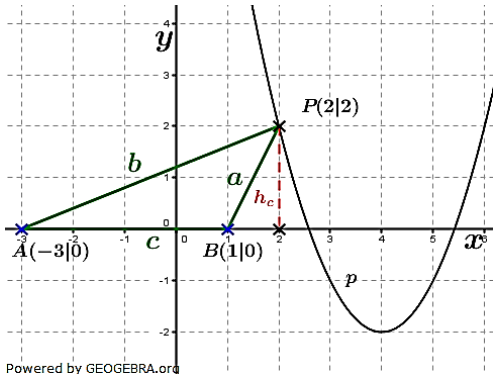
Dreieck ABP:

A_{ABP}: $A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 4;\ h_c = 2$

$A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\ FE$

Das Dreieck ABP hat einen Flächeninhalt von $4\ FE$.



$P_1; P_2$: Der Flächeninhalt soll $20{,}5\ FE$ sein. Die Grundseite c des Dreiecks bleibt unverändert, folglich muss sich h_c ändern. h_c^* ist jedoch die y–Koordinate der Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel.

$20{,}5 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c^*$

$h_c^* = x^2 - 8x + 14$

$20{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (x^2 - 8x + 14)$ | $:2$

$10{,}25 = x^2 - 8x + 14$ | $-10{,}25$

$x^2 - 8x + 3{,}75 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 3{,}75}$

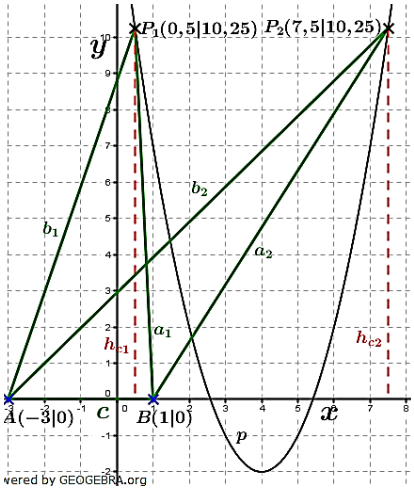
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12{,}25} = 4 \pm 3{,}5$

$x_1 = 7{,}5;\ x_2 = 0{,}5$

$y_1 = 7{,}5^2 - 8 \cdot 7{,}5 + 14 = 10{,}25$

$y_2 = 0{,}5^2 - 8 \cdot 0{,}5 + 14 = 10{,}25$

$P_1(0{,}5|10{,}25)$; $P_2(7{,}5|10{,}25)$



Die Punkte $P_1(0{,}5|10{,}25)$ und $P_2(7{,}5|10{,}25)$ bilden zusammen mit den Punkten A und B ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $20{,}5\ FE$.

Lösung W4a/2009

Lösungslogik

Aufstellung einer 6-Zeilen-6-Spaltentabelle mit Eintragung der Elementarereignisse in die einzelnen Tabellenelemente.
Ermittlung der gefragten Wahrscheinlichkeiten aus der Anzahl möglicher Elementarereignisse in der Tabelle.

Klausuraufschrieb

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$P(Augensumme < 5) = P\{(1;1),(1:2),(2;1),(2,2);(1,3),(3,1)\}$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Einzelelements der Tabelle beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, somit ist

$$P(Augensumme < 5) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$$

$$P(kein\ Pasch) = 1 - P(Pasch) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$$

$$p = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

$$P(Augensumme < 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

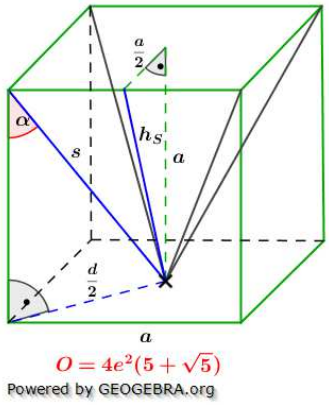
$$P(Augensumme > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4b/2009

Lösungslogik

Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus fünf Seitenflächen des Würfels (die sechste Seitenfläche oben ist offen und damit nicht vorhanden) sowie dem Mantel der „ausgearbeiteten" Pyramide).
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels der Pyramide.
Berechnung der 5 Seitenflächen des Würfels.
Berechnung der Oberfläche des Körpers.
Berechnung der Diagonalen des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.
Bestimmung von s über den Satz des Pythagoras.
Bestimmung von $cos\alpha$.



Klausuraufschrieb

h_S: $h_S = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + e^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{5e^2} = e\sqrt{5}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 2e \cdot e\sqrt{5} = 4e^2\sqrt{5}$

$O_{Würfel}$: $O_{Würfel} = 5a^2 = 5 \cdot (2e)^2 = 20e^2$

O: $O = O_{Würfel} + M_{Pyr} = 20e^2 + 4e^2\sqrt{5} = 4e^2(5+\sqrt{5})$ **q.e.d.**

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 2e\sqrt{2} \implies \frac{d}{2} = e\sqrt{2}$

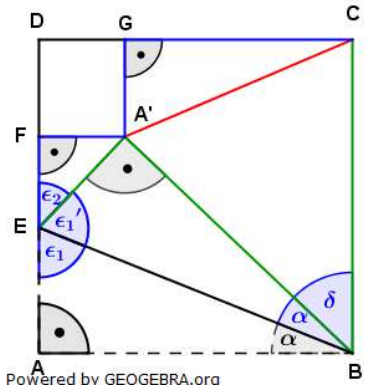
s: $s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + \left(e\sqrt{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{4e^2 + 2e^2} = \sqrt{6e^2} = e\sqrt{6}$

$cos\alpha$: $cos\alpha = \frac{a}{s} = \frac{2e}{e\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ **q.e.d.**

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von ϵ_1 über den tan. Durch das Umklappen ist $\epsilon_1 = \epsilon_1{}'$.
Berechnung von ϵ_2 über $180° - 2 \cdot \epsilon_1$.
Berechnung von $\overline{A'F}$ über den $sin\epsilon_2$, $\overline{DG}$ ist gleich lang wie $\overline{A'F}$.
Berechnung von $\overline{FE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{DF}$ über $\overline{DA} - (\overline{AE} + \overline{FE})$, die Strecke $\overline{GA'}$ ist gleich lang wie $\overline{DF}$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

ϵ_1: $tan\epsilon_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{10{,}0}{4{,}0}$

$\epsilon_1 = tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}2°$

ϵ_2: $\epsilon_1' = \epsilon_1 \implies \epsilon_2 = 180° - 2 \cdot \epsilon_1$

$\epsilon_2 = 180° - 136{,}4° = 43{,}6°$

$\overline{A'F}$: $\quad sin\epsilon_2 = \frac{\overline{A'F}}{\overline{EA'}} \quad | \quad \cdot \overline{EA'}$

$\overline{A'F} = \overline{EA'} \cdot sin\epsilon_2 = 4{,}0 \cdot sin(43{,}6°) = 2{,}76$

$\overline{GD}$: $\quad \overline{GD} = \overline{A'F} = 2{,}76$

$\overline{CG}$: $\quad \overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD} = 10 - 2{,}76 = 7{,}24$

$\overline{FE}$: $\quad \overline{FE} = \sqrt{\overline{A'E}^2 - \overline{A'F}^2} = \sqrt{4^2 - 2{,}76^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{FE} = \sqrt{8{,}3824} = 2{,}8952$

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \overline{DA} - \left(\overline{AE} + \overline{FE}\right) = 10 - (4 + 2{,}8952) = 3{,}1048$

$\overline{GA'} = \overline{DF} = 3{,}1048$

$\overline{A'C}$: $\quad \overline{A'C} = \sqrt{\overline{GA'}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{3{,}1048^2 + 7{,}24^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{A'C} = \sqrt{62{,}0574} = 7{,}8777$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2010

Im Quadrat $ABCD$ gilt:

$\delta = 66{,}0°$

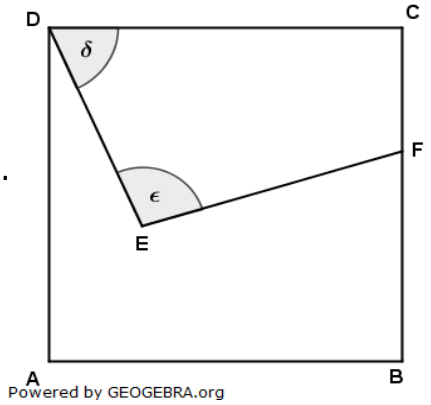
$\epsilon = 97{,}0°$

$\overline{AD} = 6{,}3\ cm$

$\overline{DE} = 4{,}1\ cm$

Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $DEFC$.

Lösung: $u_{DEFC} = 17{,}6\ cm$.



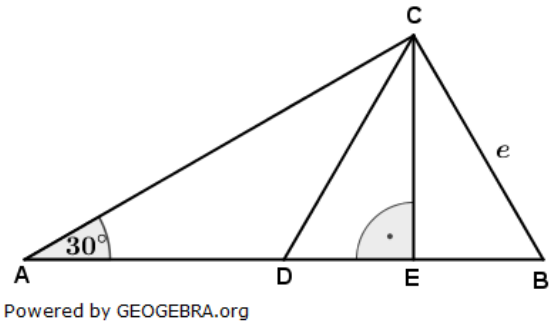
Aufgabe W1b/2010

Im Dreieck ABC liegt das gleichseitige Dreieck DBC.

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ wird mit M bezeichnet.

Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass gilt:

$$\overline{MB} = \frac{e}{2}\sqrt{7}$$



Aufgabe W2a/2010

Ein zylinderförmiger Behälter hat eine kegelförmige Vertiefung. Er liegt waagrecht und ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt.

Die Maße sind:

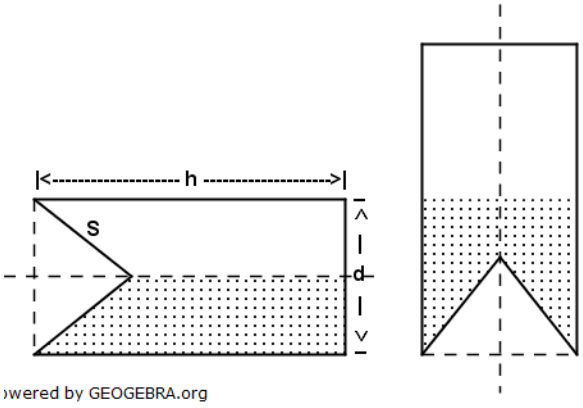
$s = 8{,}0\ cm$

$d = 10{,}0\ cm$

$h = 20{,}0\ cm$

Der Behälter wird senkrecht aufgestellt (siehe Skizze). Wie hoch steht das Wasser im aufgestellten Behälter?

Lösung: $h_W = 11{,}0\ cm$.

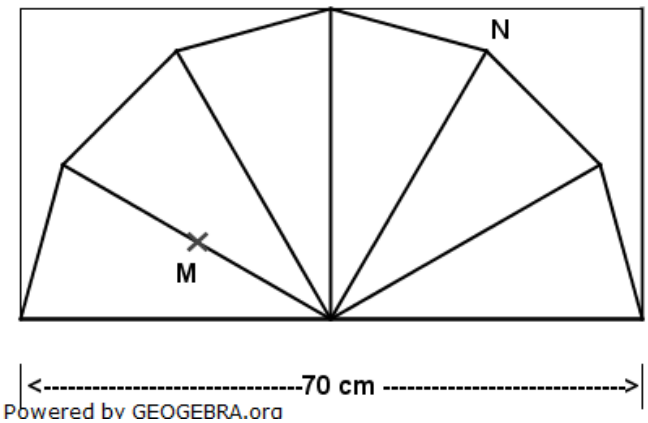


Aufgabe W2b/2010

Aus einem rechteckigen Stück Papier wird der Mantel einer sechsseitigen Pyramide gefertigt.
Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seitenkante.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{MN}$ in der Pyramide.

Tipp: Strecke $\overline{MN}$ über den Kosinussatz.

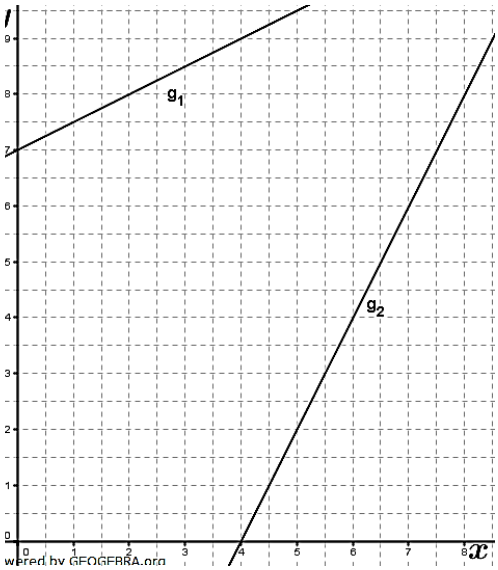
Lösung: $\overline{MN} = 31{,}0\ cm$



Aufgabe W3a/2010

Im Schaubild sind die Geraden g_1 und g_2 dargestellt.
Entnehmen Sie zur Bestimmung ihrer Gleichungen geeignete Werte.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P von g_1 und g_2.
Die Punkte P und $Q(2|-4)$ liegen auf einer nach oben geöffneten Normalparabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel.

Lösung: $P(10|12)$; $S(5|-13)$



Aufgabe W3b/2010

Gegeben sind die beiden Parabeln:

p_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

p_2: $y = x^2 - 1$

Die beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten P und Q.
Die Punkte P und Q bilden zusammen mit den Scheitelpunkten S_1 und S_2 das Viereck S_1PS_2Q.
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
Begründen Sie, weshalb das Viereck S_1PS_2Q ein Drachenviereck ist.

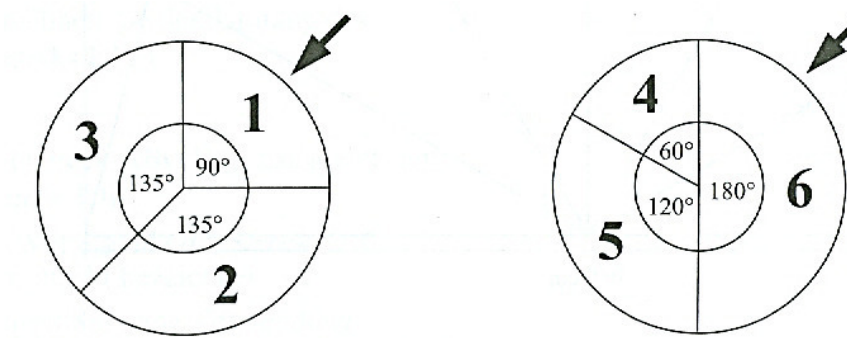
Lösung: $A = 12\ FE$

Begründung siehe Lösungsteil

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2010

Die beiden Glücksräder werden gedreht. Die Ergebnisse beider Glücksräder werden addiert. Es werden zwei Gewinnsituationen angeboten:



Gewinnsituation A:	„Summe **8** oder **9**„
Gewinnsituation B:	„alle anderen Summen„

Für welche würden Sie sich entscheiden? Lösung: $p_A = 50\,\%$; $p_B = 50\,\%$

Anschließend wird das rechte Glücksrad so verändert, dass die Sektoren der Zahlen 4 und 5 jeweils den Mittelpunktswinkel $90\,°$ erhalten.

Für welche Gewinnsituation würden Sie sich jetzt entscheiden?

Lösung: $p_A = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\,\%$; $p_B = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\,\%$

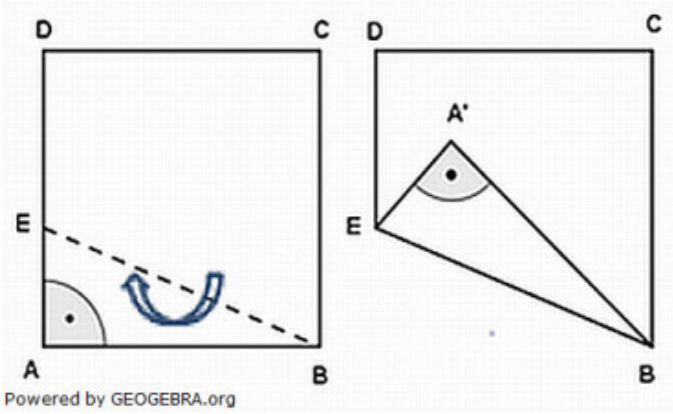
Aufgabe W4b/2010

Ein quadratisches Blatt Papier (Format $10\,cm$ X $10\,cm$) wird entlang von $\overline{EB}$ gefaltet. Die Strecke $\overline{AE}$ hat eine Länge von $4{,}0\,cm$.

Berechnen Sie die Länge $\overline{A'C}$ nach der Faltung.

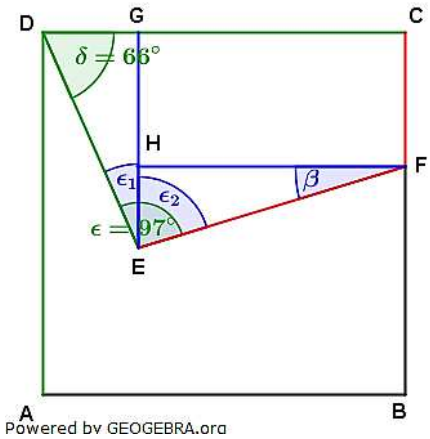
Lösung: $\overline{A'C} = 7{,}9\,cm$.

Tipp: $\overline{A'C}$ über den Kosinussatz



Lösung W1a/2010

Lösungslogik



Berechnung von ϵ_1 als Ergänzungswinkel im Dreieck EDG.
Berechnung von ϵ_2 aus der Differenz von ϵ und ϵ_1.
Berechnung von β als Ergänzungswinkel im Dreieck EFH.
Berechnung von $\overline{DG}$ über den $cos\delta$.
Berechnung von $\overline{EG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{EH}$ über den $tan\beta$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{CF}$ aus der Differenz von $\overline{EG}$ und $\overline{EH}$.
Berechnung von u_{DEFC}.

Klausuraufschrieb

ϵ_1: $\epsilon_1 = 90° - \delta = 90° - 66° = 24°$

ϵ_2: $\epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1 = 97° - 24° = 73°$

β: $\beta = 90° - \epsilon_2 = 90° - 73° = 17°$

$\overline{DG}$: $cos\delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$ | $\cdot \overline{ED}$

$\overline{DG} = \overline{DE} \cdot cos\delta = 4{,}1 \cdot cos66° = 1{,}67$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{4{,}1^2 - 1{,}67^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{EG} = \sqrt{14{,}0211} = 3{,}74$

$\overline{EH}$: $tan\beta = \frac{\overline{EH}}{\overline{DC} - \overline{DG}}$ | $\cdot (\overline{DC} - \overline{DG})$

$\overline{EH} = (\overline{DC} - \overline{DG}) \cdot tan\beta = (6{,}3 - 1{,}67) \cdot tan17° = 1{,}42$

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = \sqrt{(\overline{DC} - \overline{DG})^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{(6{,}3 - 1{,}67)^2 + 1{,}42^2}$

$\overline{EF} = \sqrt{23{,}435} = 4{,}84$ | Satz des Pythagoras

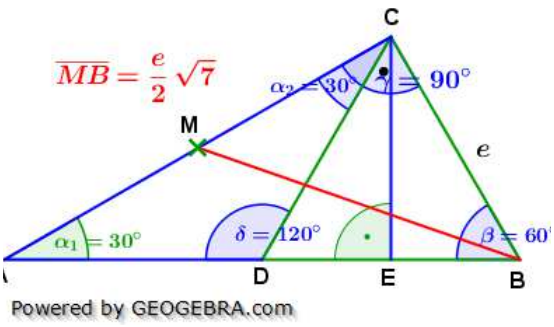
$\overline{CF}$: $\overline{CF} = \overline{EG} - \overline{EH} = 3{,}74 - 1{,}42 = 2{,}32$

u_{DEFC}: $u_{DEFC} = \overline{DE} + \overline{DC} + \overline{CF} + \overline{EF} = 4{,}1 + 6{,}3 + 2{,}32 + 4{,}84 = 17{,}56$

Der Umfang des Vierecks $DEFC$ beträgt $17{,}6\ cm$.

Lösung W1b/2010

Lösungslogik



Das Dreieck DBC ist gleichseitig, somit sind alle Winkel $60°$ groß. Dadurch ergibt sich der Winkel ADC als Ergänzungswinkel zu $180°$ mit $\delta = 120°$.
Wegen $\delta = 120°$ ist $\alpha_2 = 30°$ und damit wiederum $\gamma = 90°$. Das Dreieck MBC ist also rechtwinklig und die Strecke $\overline{MB}$ ist dessen Hypothenuse.
Berechnung von $\overline{CE}$ als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge e.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den $sin30°$.

Berechnung von $\overline{MC}$.
Berechnung von $\overline{MB}$ über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

β: $\beta = 60°$ wegen gleichseitigem Dreieck DBC

δ : $\delta = 180° - 60° = 120°$

α_2 : $\alpha_2 = 180° - 120° - 30° = 30°$

γ : $\gamma = 30° + 60° = 90°$ das Dreieck MBC ist rechtwinklig

$\overline{CE}$: $\overline{CE} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \left(\frac{\overline{CB}}{2}\right)^2} = \sqrt{e^2 - \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}e^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{CE} = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

$\overline{AC}$: $sin30° = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}; : sin30°$

$\overline{AC} = \frac{\overline{CE}}{sin30°} = \frac{\frac{e}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = e\sqrt{3}$

$\overline{MC}$: $\overline{MC} = 0{,}5 \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}e\sqrt{3}$

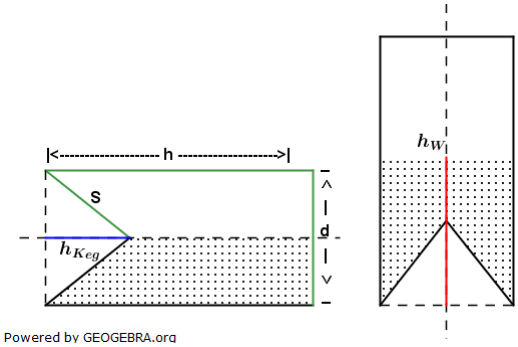
$\overline{MB}$: $\overline{MB} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}e\sqrt{3}\right)^2 + e^2} = \sqrt{\frac{3}{4}e^2 + e^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{MB} = \sqrt{\frac{7}{4}e^2} = \frac{e}{2}\sqrt{7}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2010

Lösungslogik

Berechnung von h_{Keg} der kegelförmigen Vertiefung über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Volumens V_{Zyl} des Zylinders.
Berechnung der Volumens V_{Keg} der kegelförmigen Vertiefung.
Berechnung des Volumens des Körpers $V_{Körper}$ aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{Keg}.
Halbierung von $V_{Körper}$.
Berechnung der Höhe h_W des Wasserstandes im senkrecht aufgestellten Zylinder über die Volumenformel des Körpers.



Klausuraufschrieb

k_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 - 5^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{39} = 6{,}24$

V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 1570{,}80$

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}40$

$V_{Körper}$: $V_{Körper} = V_{Zyl} - V_{Keg} = 1570{,}80 - 163{,}40 = 1407{,}40$

V_{Wasser}: $V_{Wasser} = \frac{1}{2} \cdot V_{Körper} = 0{,}5 \cdot 1407{,}40 = 703{,}70$

h_W: $V_{Wasser} = \pi r^2 \cdot h_W - V_{Keg}$ | $+V_{Keg}; : (\pi r^2)$

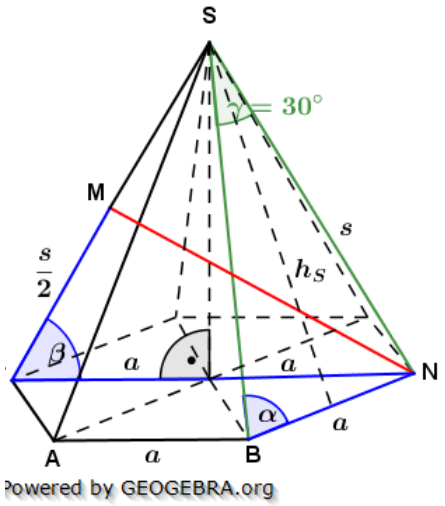
$h_W = \frac{V_{Wasser} + V_{Keg}}{\pi \cdot r^2} = \frac{703{,}70 + 163{,}40}{\pi \cdot 5^2} = 11{,}04$

Im aufgestellten Behälter steht das Wasser $11\ cm$ *hoch.*

Lösung W2b/2010

Lösungslogik

Die Abwicklung in der Skizze der Aufgabenstellung zeigt die sechs Seitendreiecke der Pyramide. Daraus ergibt sich der Spitzenwinkel γ. Wegen der angegebenen waagrechten Strecke von $70\,cm$ ist die Seitenkante s der Pyramide $35\,cm$ lang und daraus $\frac{s}{2}$.



Berechnung des Basiswinkels α der Seitendreiecke über die Winkelsumme im Dreieck.

Berechnung von $\frac{a}{2}$ über den $cos\alpha$ und daraus der Seitenkante a.

Die Grundfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a aufteilen.

Berechnung von $\overline{FN}$ aus zweimal der Strecke a.

Berechnung des Winkels β über den cos.

Berechnung der Strecke $\overline{MN}$ über den Kosinussatz.

Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = \frac{180°}{6} = 30°$

s: $s = \frac{70}{2} = 35$ daraus $\frac{s}{2} = 17{,}5$

α: $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = \frac{180°-30°}{2} = 75°$

$\frac{a}{2}$: $cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{s}$ | $\cdot s$

$\frac{a}{2} = s \cdot cos\alpha = 35 \cdot cos75° = 9{,}06$ daraus $a = 18{,}12$

$\overline{FN}$: $\overline{FN} = 2 \cdot a = 2 \cdot 18{,}12 = 36{,}24$

β: $cos\beta = \frac{a}{s} = \frac{18{,}12}{35} = 0{,}51771$

$\beta = cos^{-1}(0{,}51771) = 58{,}82°$

$\overline{MN}$: $\overline{MN}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \overline{FN}^2 - 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \overline{FN} \cdot cos\beta$ | Kosinussatz

$= 17{,}5^2 + 36{,}24^{2^2} - 2 \cdot 17{,}5 \cdot 36{,}24 \cdot cos58{,}82° = 962{,}90$

$\overline{MN} = \sqrt{962{,}90} = 31{,}03$

Die Strecke $\overline{MN}$ ist $31\,cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Geradengleichungen g_1 und g_2.
Schnittpunktberechnung von P durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Parabelgleichung p durch die Punkte P und Q.
Umstellung der allgemeinen Parabelgleichung in die Scheitelpunktgleichung.

Klausuraufschrieb

Geradengleichung g_1:

g_1: $y = mx + b$

$m = 0{,}5;\ \ b = 7$ | aus Zeichnung abgelesen

$y = 0{,}5x + 7$

Geradengleichung g_2:

g_2: $y = m(x - x_0)$

$m = 2;\ \ x_0 = 4$ | aus Zeichnung

$y = 2(x - 4)$

Schnittpunkt von g_1 mit g_2:

$g_1 \cap g_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$0{,}5x + 7 = 2x - 8$ | $-0{,}5x\ -7$

$1{,}5x = 15$ | $:1{,}5$

$x = 10$

$x \longrightarrow g_1$

$y = 0{,}5 \cdot 10 + 7 = 12$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $P(10|12)$.

Funktionsgleichung von p durch P und Q:

p: $y = x^2 + px + q$

(1) $12 = 10^2 + 10p + q$ | Punktprobe mit $P(10|12)$

(2) $-4 = 2^2 + 2p + q$ | Punktprobe mit $Q(2|-4)$

(1)-(2) $16 = 96 + 8p$ | $-96;\ :8$

$p = -10$

$p \longrightarrow (2)$

$-4 = 4 - 20 + q$

$q = 12$

p: $y = x^2 - 10x + 12$ | allgemeine Parabelgleichung

$y = (x - 5)^2 - 13$ | Scheitelpunktgleichung

Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $S(5|-13)$.

Lösung W3b/2010

Lösungslogik

Berechnung der Schnittpunkte durch Gleichsetzung.
Bestimmung der Scheitelpunkte von p_1 und p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung der Fläche des Vierecks S_1PS_2Q.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

p_2: $y = x^2 - 1$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 + 5 = x^2 - 1$ | $+\frac{1}{2}x^2;\ -5$

$1{,}5x^2 = 6$ | $:1{,}5$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

$y_1 = 2^2 - 1 = 3$

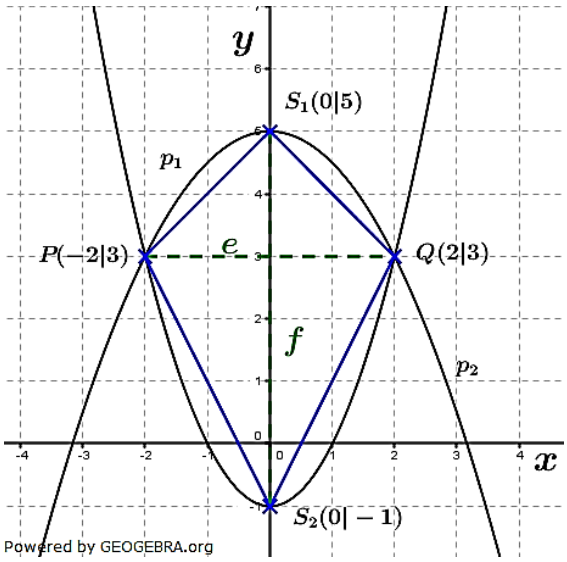
$y_2 = (-2)^2 - 1 = 3$

Die Schnittpunkte von p_1 mit p_2 sind $P(-2|3)$ und $Q(2|3)$.

Scheitelpunkte von p_1 und p_2:

S_1: $S_1(0|5)$ (in x–Richtung unverschoben)

S_2: $S_2(0|-1)$ (in x–Richtung unverschoben)



Fläche Viereck S_1PS_2Q:

$A_{S_1PS_2Q}$: $A_{S_1PS_2Q} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$e = 4;\ f = 6$

$A_{S_1PS_2Q} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12\ FE$

Das Viereck hat eine Fläche von $12\ FE$.

Begründung für Drachenviereck:

p_1 und p_2 sind in x–Richtung nicht verschoben. Dadurch ist die y–Achse Symmetrieachse und die Strecke $\overline{S_1S_2} = f$ eine Diagonale des Vierecks. Infolge der Symmetrie sind die Strecken $\overline{PS_1}$ und $\overline{QS_1}$ sowie $\overline{PS_2}$ und $\overline{QS_2}$ gleich lang. Weiterhin ist $\overline{PQ} = e$ senkrecht f die andere Diagonale des Vierecks. Das Viereck ist also ein Drachenviereck.

Lösung W4a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen über die angegebenen Mittelpunktswinkel.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.

Neuberechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahlen 4 und 5 über die neuen Mittelpunktswinkel.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$P(1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(2) = \frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ $\quad P(3) = \frac{3}{8}$

$P(4) = \frac{1}{6}$ $\quad P(5) = \frac{1}{3}$ $\quad P(6) = \frac{1}{2}$

$P(A) = \{(3;5),(2;6),(3;6)\}$

$P(B) = 1 - P(A)$

$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad P(2;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad P(3;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{24} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} = 50\ \%$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$

Es ist gleichgültig, für welche Gewinnsituation man sich entscheidet.

Geänderter Mittelpunktswinkel für die 4 und die 5.

$P(4) = \frac{1}{4}$ $\quad P(5) = \frac{1}{4}$

$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$

$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\ \%$

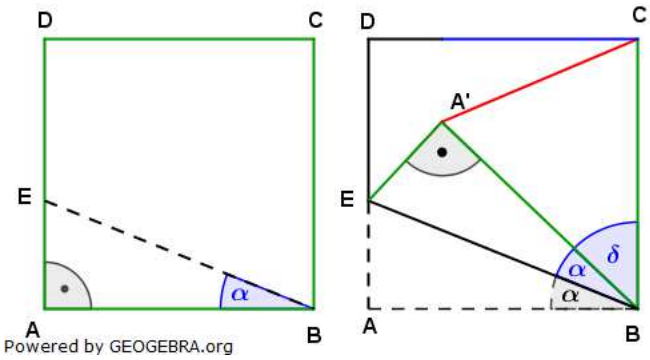
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\ \%$

Man wird sich jetzt für Gewinnsituation B entscheiden.

Lösung W4b/2010

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von α über den tan.
Berechnung von δ als Ergänzungswinkel zu $90°$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Kosinussatz.



Klausuraufschrieb

α: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$\alpha = tan^{-1}(0{,}4) = 21{,}8°$

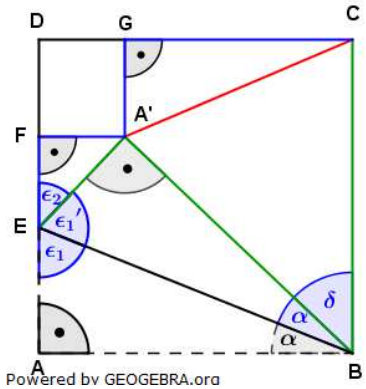
δ: $\quad \delta = 90° - 2 \cdot \alpha = 90° - 43{,}6° = 46{,}4°$

$\overline{A'C}$: $\quad \overline{A'C}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{A'B} \cdot \overline{BC} \cdot cos\delta$ $\quad |$ Kosinussatz

$\overline{A'C}^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot cos46{,}4° = 62{,}0761$ $\quad | \sqrt{\ }$

$\overline{A'C} = 7{,}87$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.



Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von ϵ_1 über den tan. Durch das Umklappen ist $\epsilon_1 = \epsilon_1{}'$.
Berechnung von ϵ_2 über $180° - 2 \cdot \epsilon_1$.
Berechnung von $\overline{A'F}$ über den $sin\epsilon_2$, $\overline{DG}$ ist gleich lang wie $\overline{A'F}$.
Berechnung von $\overline{FE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{DF}$ über $\overline{DA} - (\overline{AE} + \overline{FE})$, die Strecke $\overline{GA'}$ ist gleich lang wie $\overline{DF}$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

ϵ_1: $tan\epsilon_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{10{,}0}{4{,}0}$

$\epsilon_1 = tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}2°$

ϵ_2: $\epsilon_1' = \epsilon_1 \Longrightarrow \epsilon_2 = 180° - 2 \cdot \epsilon_1$

$\epsilon_2 = 180° - 136{,}4° = 43{,}6°$

$\overline{A'F}$: $sin\epsilon_2 = \frac{\overline{A'F}}{\overline{EA'}}$ | $\cdot \overline{EA'}$

$\overline{A'F} = \overline{EA'} \cdot sin\epsilon_2 = 4{,}0 \cdot sin(43{,}6°) = 2{,}76$

$\overline{GD}$: $\overline{GD} = \overline{A'F} = 2{,}76$

$\overline{CG}$: $\overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD} = 10 - 2{,}76 = 7{,}24$

$\overline{FE}$: $\overline{FE} = \sqrt{\overline{A'E}^2 - \overline{A'F}^2} = \sqrt{4^2 - 2{,}76^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{FE} = \sqrt{8{,}3824} = 2{,}8952$

$\overline{DF}$: $\overline{DF} = \overline{DA} - \left(\overline{AE} + \overline{FE}\right) = 10 - (4 + 2{,}8952) = 3{,}1048$

$\overline{GA'} = \overline{DF} = 3{,}1048$

$\overline{A'C}$: $\overline{A'C} = \sqrt{\overline{GA'}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{3{,}1048^2 + 7{,}24^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{A'C} = \sqrt{62{,}0574} = 7{,}8777$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2011

Im Dreieck ABC gilt:

$\overline{AB} = 10{,}8\ cm$

$\alpha = 40{,}0°$

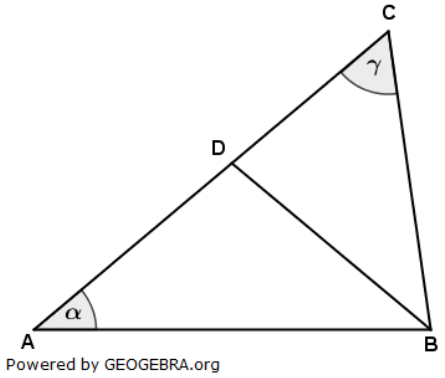
$\gamma = 58{,}0°$

$\overline{AD} = \overline{BD}$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD.

Lösung: $A_{BCD} = 19{,}3\ cm^2$.

Tipp: Zweimal Sinussatz für $\overline{BD}$ und $\overline{BC}$ dann trigonometrischen Flächeninhalt.



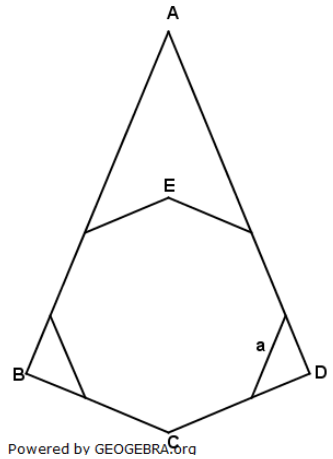
Aufgabe W1b/2011

Die Figur besteht aus dem Viereck $ABCD$ und einem regelmäßigen Achteck.
Außer dem Punkt E liegen alle Eckpunkte des regelmäßigen Achtecks auf den Seiten des Vierecks $ABCD$.
Weisen Sie nach, dass der Winkel CDA ein rechter Winkel ist.
Es gilt:

$a = 6{,}2\ cm$

Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $ABCD$.

Lösung: $u_{ABCD} = 72{,}2\ cm$.



Aufgabe W2a/2011

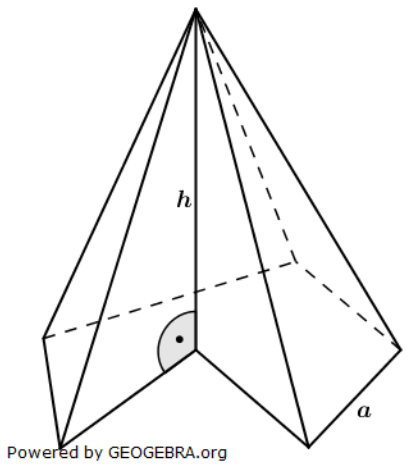
Von einer massiven regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind bekannt:

$V = 329\ cm^3$ (Volumen der Pyramide)

$a = 7{,}0\ cm$

Ein Teil der Pyramide wird ausgeschnitten (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Oberfläche des entstandenen Körpers.

Lösung: $O_{Neu} = 314{,}6\ cm^2$

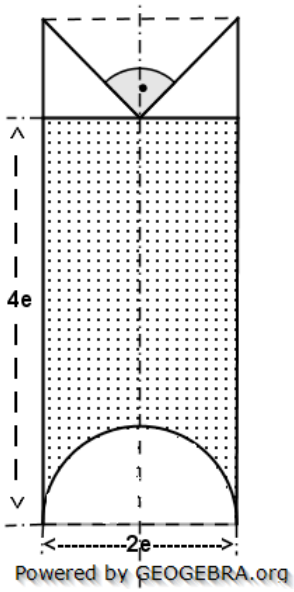


Aufgabe W2b/2011

Ein zylinderförmiges Gefäß hat eine kegelförmige und eine halbkugelförmige Vertiefung.
Das Wasser reicht genau bis zur Spitze der kegelförmigen Vertiefung (siehe Achsenschnitt).
Das Gefäß wird gedreht und auf die kegelförmige Vertiefung gestellt.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Höhe des Wasserspiegels danach

$$h_W = \frac{11}{3}e.$$

beträgt.



Aufgabe W3a/2011

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(1|5)$ und $B(6|10)$. Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 + 2$.
Besitzen die beiden Parabeln gemeinsame Punkte? Überprüfen Sie durch Rechnung.
Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat.

Lösung: keine gemeinsamen Punkte z. B.:
g: $y = -x + 3$ (andere Lösungen möglich)

Aufgabe W3b/2011

Die Parabel p mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2. Die Gerade g verläuft durch den rechten Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse und hat die Steigung $m = -2$.
Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Parabel p.
Die Punkte N_1 und N_2 sowie der Punkt Q bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
Der Punkt Q bewegt sich jetzt oberhalb der x-Achse auf der Parabel p. Für welche Lage von Q wird der Flächeninhalt des Dreiecks am größten?

Lösung: $Q(1|4)$; $A = 12\,FE$; $Q(0|4{,}5)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2011

Die Abschlussklassen der Linden-Realschule organisieren zugunsten eines sozialen Projekts eine Tombola. Die Tabelle zeigt die Losverteilung und die damit jeweils verbundenen Gewinne.

Anzahl der Lose	Wert des Gewinns
150 Nieten	Kein Gewinn
40 Kleingewinne	Je 4,00 €
10 Hauptgewinne	Je 20,00 €

Ein Los kostet 2,00 €.

Berechnen Sie den Erwartungswert. Lösung: $E(X) = -0{,}20\,€$

Um den Gewinn für das soziale Projekt zu erhöhen, geben die Klassen 50 weitere Nieten in die Lostrommel.

Welchen Betrag können die Abschlussklassen spenden, wenn alle Lose verkauft werden?

Lösung: $E(X) = -0{,}56\,€$; $G = 140\,€$

Aufgabe W4b/2011

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(-3|-2)$.

Die Parabel mit dem Scheitelpunkt S_2 hat die Gleichung $y = x^2 - 4x + 7$. Der Schnittpunkte der beiden Parabeln heißt R.

Günter behauptet: „Einer der beiden Winkel des Dreiecks S_1S_2R ist stumpf.

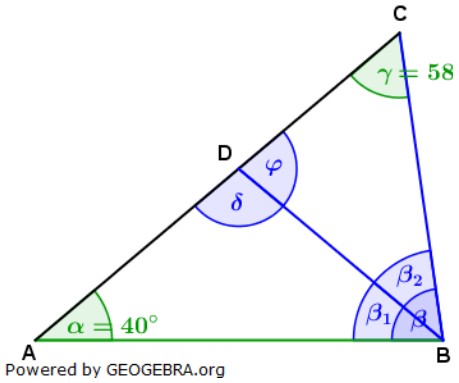
Hat er recht? Begründen Sie.

Lösung: Der Winkel S_1S_2R hat $108{,}43\,°$, ist also stumpf.

Lösung W1a/2011

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Bestimmung von β_1, δ, φ und β_2.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Sinussatz.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den Sinussatz.
Berechnung von A_{BCD} über den trigonometrischen Flächeninhalt.



<u>Klausuraufschrieb</u>

β_1: $\beta_1 = \alpha = 40°$ (gleichschenkliges Dreieck)

δ: $\delta = 180° - 40° - 40° = 100°$

φ: $\varphi = 180° - \delta = 180° - 100° = 80°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \gamma - \varphi = 180° - 58° - 80°$

$\beta_2 = 42°$

$\overline{BD}$: $\frac{\overline{BD}}{sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{sin\delta}$ | $\cdot sin\alpha$ | Sinussatz

$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{sin\delta} \cdot sin\alpha$

$\overline{BD} = \frac{10{,}8}{sin100°} \cdot sin40° = 7{,}05$

$\overline{BC}$: $\frac{\overline{BC}}{sin\varphi} = \frac{\overline{BD}}{sin\gamma}$ | $\cdot sin\varphi$ | Sinussatz

$\overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{sin\gamma} \cdot sin\varphi$

$\overline{BC} = \frac{7{,}05}{sin58°} \cdot sin80° = 8{,}19$

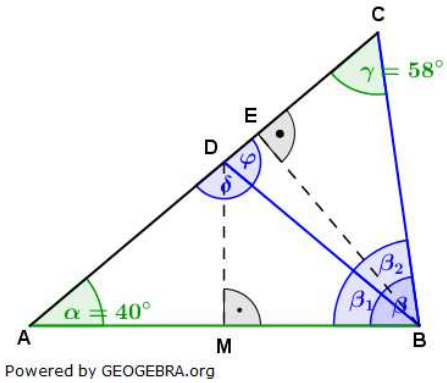
A_{BCD}: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}05 \cdot 8{,}19 \cdot sin42° = 19{,}32$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCD beträgt $19{,}3\ cm^2$.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)

Berechnung von $\overline{BD}$ über den $cos\beta_1$. Hierzu
Berechnung von β_1 über gleichschenkliges Dreieck ABD und $\overline{MB}$ als halbe Strecke $\overline{AB}$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den $sin\varphi$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu φ und γ im Dreieck BCD.
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks BCD über den trigonometrischen Flächeninhalt.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{BD}$: $cos\beta_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD};\ cos\beta_1$

$\overline{BD} = \frac{\overline{MB}}{cos\beta_1}$

β_1: $\beta_1 = \alpha = 40°$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{MB}$: $\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = 5{,}4$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

$\overline{BD} = \frac{5{,}4}{cos40°} = 7{,}05$

$\overline{BE}$: $sin\varphi = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD}$

$\overline{BE} = \overline{BD} \cdot sin\varphi$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 80° = 100°$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

φ: $\varphi = 180° - \delta = 180° - 100° = 80°$

$\overline{BE} = 7{,}05 \cdot sin80° = 6{,}94$

$\overline{BC}$: $sin\gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC};\ : sin\gamma$

$\overline{BC} = \frac{\overline{BE}}{sin\gamma} = \frac{6{,}94}{sin58°} = 8{,}18$

β_2: $\beta_2 = 180° - \gamma - \varphi = 180° - 58° - 80°$

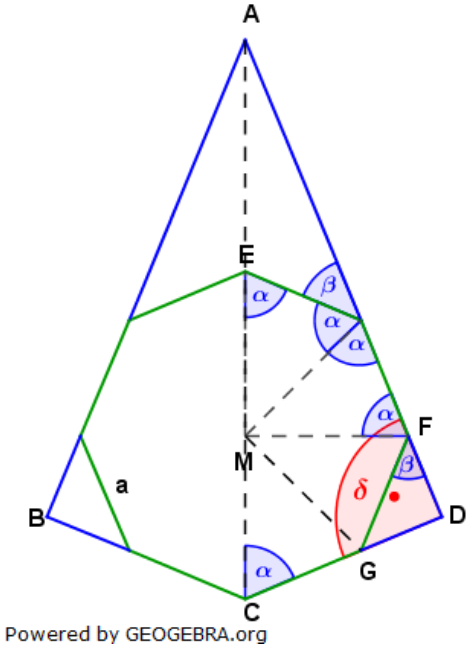
$\beta_2 = 42°$

A_{BCD}: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}05 \cdot 8{,}18 \cdot sin42° = 19{,}29$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCD beträgt $19{,}3\ cm^2$.

Lösung W1b/2011



Lösungslogik

Bestimmung von α über die Eckwinkel im Achteck.
Bestimmung von β als Ergänzungswinkel zu $180°$.
Berechnung von $\overline{GD}$ über $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{CD}$ aus der Summe von a und $\overline{GD}$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von u_{ABCD}.

Klausuraufschrieb

α: $2 \cdot n \cdot \alpha = n \cdot 180° - 360°$ (Winkelsumme im n-Eck)

$2 \cdot 8 \cdot \alpha = 8 \cdot 180° - 360° = 1080$

$\alpha = \frac{1080}{16} = 67{,}5°$

β: $\beta = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 135° = 45°$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \beta = 90°$ q.e.d.

$\overline{GD}$: $sin\beta = \frac{\overline{GD}}{a}$ | $\cdot a$

$\overline{GD} = a \cdot sin\beta = 6{,}2 \cdot sin45° = 4{,}38$

$\overline{CD}$: $\overline{CD} = a + \overline{GD} = 6{,}2 + 4{,}38 = 10{,}58$

$\overline{AD}$: $tan\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ | $\cdot \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{CD} \cdot tan\alpha = 10{,}58 \cdot tan67{,}5° = 25{,}54$

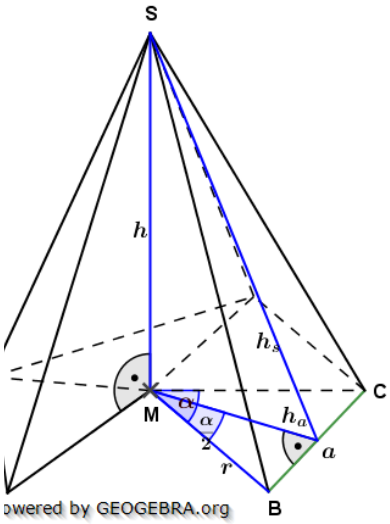
u_{ABCD}: $u_{ABCD} = 2 \cdot (\overline{AD} + \overline{CD}) = 2 \cdot 36{,}12 = 72{,}24$

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ beträgt $72{,}2\ cm$.

Lösung W2a/2011

Lösungslogik

Wir berechnen zunächst die Oberfläche der massiven Pyramide mit $O_{Pyr} = G + M$. Die Grundfläche (regelmäßiges Fünfeck) ergibt sich aus $G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\alpha$ (siehe Formelsammlung).
Hierzu berechnen wir α, $\frac{\alpha}{2}$ und r über den $sin\frac{\alpha}{2}$ Wir berechnen dann h über die Volumenformel der Pyramide.
Für den Mantel benötigen wir h_S.
Berechnung von h_a über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M über 5 mal den Flächeninhalt eines Seitendreiecks.
Berechnung von O_{Pyr} aus der Summe von G und M.



Der ausgeschnittene Teil nimmt $\frac{1}{5}$ von O_{Pyr} weg, hinzu kommt jedoch zweimal der Flächeninhalt des Dreiecks BMS.
Berechnung von A_{BMS} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von O_{Neu}.

Klausuraufschrieb

$O_{Pyr} = G + M$

α: $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$

r: $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ | $\cdot r;\ :sin\frac{\alpha}{2}$

$r = \frac{\frac{a}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3{,}5}{sin36°} = 5{,}95$

G: $G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\alpha = 2{,}5 \cdot 5{,}95^2 \cdot sin72°$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 84{,}17$

h: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ | $\cdot 3;\ :G$

$h = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{G} = \frac{3 \cdot 329}{84{,}17} = 11{,}73$

h_a: $h_a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5{,}95^2 - 3{,}5^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_a = \sqrt{23{,}1525} = 4{,}81$

h_s: $h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2} = \sqrt{11{,}73^2 + 4{,}81^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{160{,}729} = 12{,}68$

A_{BCS}: $A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 12{,}68 = 44{,}83$

M: $M = 5 \cdot A_{BCS} = 5 \cdot 44{,}83 = 221{,}9$

O_{Pyr}: $O_{Pyr} = 84{,}17 + 221{,}9 = 306{,}07$

A_{BMS}: $A_{BMS} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5{,}95 \cdot 11{,}73 = 34{,}90$

O_{Neu}: $O_{Neu} = \frac{4}{5} \cdot O_{Pyr} + 2 \cdot A_{BMS} = \frac{4}{5} \cdot 306 + 2 \cdot 34{,}9 = 314{,}60$

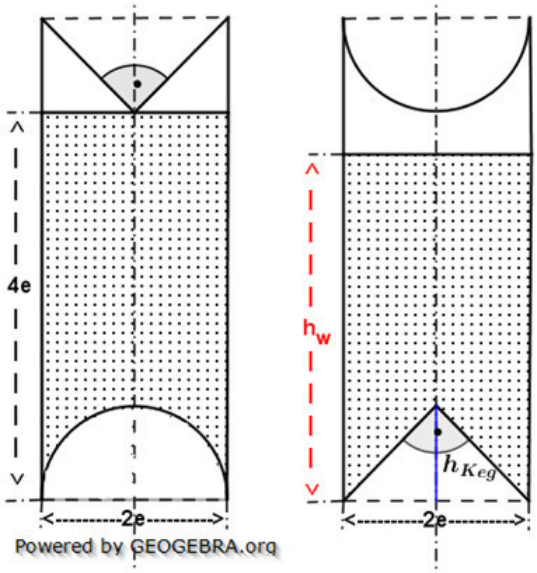
Die Oberfläche des entstandenen Körpers beträgt $314{,}6\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W2b/2011

Lösungslogik

Benötigt wird zunächst das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand. Dieses Volumen ist dann gleichzusetzen mit dem Volumen, welches sich im gedrehten Zustand bei einer Wasserhöhe h_W ergibt.



Für das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand berechnen wir:

- Volumen des Zylinders V_{Zyl} bis zur Füllhöhe $4e$.
- Volumen der Halbkugel V_{HK} mit Radius e.
- Volumen des Wassers V_W aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{HK}.

Für den gedrehten Zustand berechnen wir:

- Volumen des Zylinders V_{Zyl_g} bis zur Füllhöhe h_W.
- Berechnung von h_{keg}.
- Berechnung des Volumens des Kegels V_{Keg} mit Radius e und Höhe h_{Keg} .
- Berechnung des Volumens des Wassers V_{W_g}.
- Gleichsetzung von V_{W_g} und V_W.
- Berechnung der Höhe des Wasserstandes h_W im gedrehten Zustand.

Klausuraufschrieb

V_{Zyl}:	$V_{Zyl} = \pi r^2 h = \pi \cdot e^2 \cdot 4e = 4\pi e^3$		
V_{HK}:	$V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot e^3$		
V_W:	$V_W = V_{Zyl} - V_{HK} = 4\pi e^3 - \frac{2}{3}\pi e^2 = \frac{12}{3}\pi e^3 - \frac{2}{32}\pi e^3 = \frac{10}{3}\pi e^3$		
V_{Zyl_g}:	$V_{Zyl_g} = \pi r^2 \cdot h_w = \pi e^2 h_w$		
h_{Keg}:	$h_{Keg} = r_{Keg} = e$	|	Wegen 90° Spitzenwinkel des Kegels
V_{Keg}:	$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot e \cdot e = \frac{1}{3}\pi e^3$		
V_{W_g}:	$V_{W_g} = V_W = V_{Zyl_g} - V_{Keg}$		
	$\frac{10}{3}\pi e^3 = \pi e^2 h_w - \frac{1}{3}\pi e^3$	|	$+\frac{1}{3}\pi e^3$
	$\frac{11}{3}\pi e^3 = \pi e^2 h_w$	|	$:\pi e^2$
	$h_w = \frac{11}{3} e$		**q.e.d.**

Lösung W3a/2011

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die Punkte A und B.
Untersuchung auf Schnittpunkte durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Aufstellung einer Geradengleichung g, die weder p_1 noch p_2 schneidet.

Klausuraufschrieb

p_2: $y = -x^2 + 2$

Funktionsgleichung von p_1 durch A und B:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1)	$5 = 1 + p + q$	|	Punktprobe mit $A(1\|5)$
(2)	$10 = 36 + 6p + q$	|	Punktprobe mit $B(6\|10)$
(1)-(2)	$-5 = -35 - 5p$		
	$5p = -30$	|	$:5$
	$p = -6$		

$p \longrightarrow (1)$

$5 = 1 - 6 + q$	|	$+5$
$q = 10$		

p_1: $y = x^2 - 6x + 10$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 2$	|	$+x^2;\ -2$
$2x^2 - 6x + 8 = 0$	|	$:2$
$x^2 - 3x + 4 = 0$	|	p/q-Formel
$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75}$		

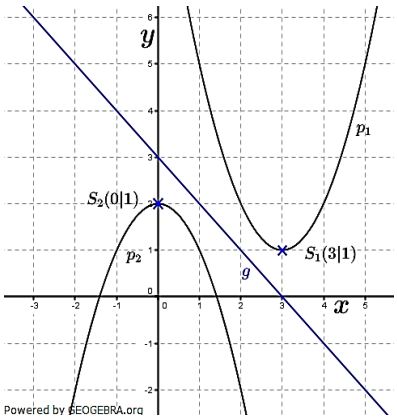
Wegen $\sqrt{-1{,}75}$ ist die Gleichung nicht lösbar, p_1 und p_2 haben keine gemeinsamen Punkte.

Geradengleichung g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Wie aus der Graphik ersichtlich, muss die Gerade zwischen den beiden Parabeln hindurch verlaufen. Dies ist beispielsweise für $m = -1$ und $b = 3$ der Fall.

g: $y = -x + 3$ *(andere Lösungen denkbar)*



Lösung W3b/2011

Lösungslogik

Berechnung der Koordinaten von N_1 und N_2 als Nullstellen von p durch Setzen von y auf 0.
Aufstellung der Geradengleichung g mit $m = -2$ durch die rechte Nullstelle von p.
Berechnung von Q durch Gleichsetzung von p mit g.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks N_1N_2Q.
Untersuchung und Bestimmung der Lage von Q für maximalen Inhalt des Dreiecks N_1N_2Q.

Klausuraufschrieb

Nullstellen von p:

p: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ | Schnittpunkte mit der x–Achse über $y = 0$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5.$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

$N_1(-3|0)$; $N_2(3|0)$ | N_2 somit rechte Nullstelle

Geradengleichung g durch N_2 mit $m = -2$:

g: $y = -2x + b$

$0 = -2 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $N_2(3|0)$

$b = 6$

g: $y = -2x + 6$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5 = -2x + 6$ | $+2x$; -6

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1{,}5 = 0$ | $\cdot(-2)$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ | p/q-Formel

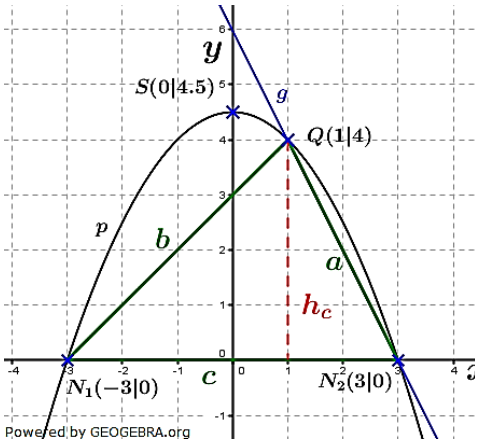
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 3$; $x_2 = 1$

$x_2 \longrightarrow g$:

$y_2 = -2 \cdot 1 + 6 = 4$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $Q(1|4)$.



Fläche des Dreiecks N_1N_2Q:

$A_{N_1N_2Q}$: $A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 6$; $h_c = 4$

$A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\ FE$

Das Dreieck N_1N_2Q hat einen Flächeninhalt von $12\ FE$.

Lage von Q für maximalen Flächeninhalt:

Die Basis c des Dreiecks bleibt unverändert. Sein Flächeninhalt wird somit durch die Länge der Höhe h_c bestimmt. h_c ist dann am größten, wenn Q in den Scheitel S wandert.

Für $Q(0|4{,}5)$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2Q maximal.

Lösung W4a/2011

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, die ersten zwei Spalten für die Gewinnsituationen, die dritte Spalte für die Niete.
Eintragung der jeweiligen Gewinne **abzüglich** Lospreis in die ersten beiden Spalten der ersten Zeile. Eintragung des Lospreises mit negativem Vorzeichen in die dritte Spalte der ersten Zeile.
Eintragung der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne in die ersten beiden Spalten der zweiten Zeile, Wahrscheinlichkeit für die Nieten in der dritten Spalte der zweiten Zeile.
Spalten der Zeile eins und zwei vorzeichengerecht multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen.
Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Neuberechnung des Erwartungswertes mit erhöhter Losanzahl.
Berechnung des Betrages, der gespendet werden kann über die Multiplikation von Anzahl der Lose mit dem Betrag des Erwartungswertes.

Klausuraufschrieb

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $\quad P(4\text{ €}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $\quad P(-2\text{ €}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

Berechnung der Erwartungswerte:

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$0{,}90\text{ €}$	$0{,}40\text{ €}$	$-1{,}50\text{ €}$

$EX = 0{,}9 + 0{,}40 - 1{,}50 = -0{,}20\text{ €}$

Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$ $\quad P(4\text{ €}) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25}$ $\quad P(-2\text{ €}) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$

Berechnung der Erwartungswerte

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$0{,}72\text{ €}$	$0{,}32\text{ €}$	$-1{,}60\text{ €}$

$EX = 0{,}72 + 0{,}32 - 1{,}60 = -0{,}56\text{ €}$

Verkauf aller Lose:

$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0{,}56 = 140\text{ €}$

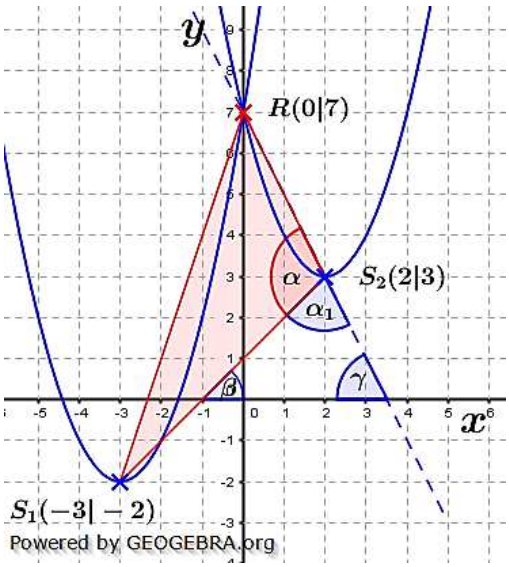
Die Schüler der Abschlussklasse können 140 € *spenden, wenn alle Lose verkauft werden.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4b/2011

Lösungslogik

Wir stellen die Scheitelpunktgleichung der Parabel p_1 auf und formen diese um in die allgemeine Form der Parabel.
Wir bestimmen den Scheitelpunkt von p_2.
Wir zeichnen die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem und verbinden die Punkte S_1, S_2 und R zu einem Dreieck.
Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass der stumpfe Winkel bei S_2 liegt.
Wir berechnen β über den tan.
Wir berechnen γ über den tan.
Wir berechnen α_1 über die Winkelsumme im Dreieck.
Wir berechnen α über $180° - \alpha_1$.



Klausuraufschrieb

Parabelgleichung von p_1:

p_1: $y = (x+3)^2 - 2$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_1(-3|-2)$

$y = x^2 + 6x + 7$ | allgemeine Gleichung von p_1

Scheitelpunkt von p_2:

S_2: $y = x^2 - 4x + 7$

$y = (x-2)^2 - 4 + 7$ | quadratische Ergänzung

$y = (x-2)^2 + 3$

$S_2(2|3)$

Winkelberechnungen:

β: $tan\beta = m_{S_1S_2} = \frac{3-(-2)}{2-(-3)} = 1$

$\beta = \tan^{-1}(1) = 45°$

γ: $tan\gamma^* = m_{RS_2} = \frac{3-7}{2-0} = -2$

$\gamma^* = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43°$ | dies ist der nach unten geöffnete spitze Winkel, den die Gerade durch R und S_2 mit der x–Achse bildet.

$\gamma = |\gamma^*| = 63{,}43\,°$

α_1: $\alpha_1 = 180° - 45° - 63{,}43° = 71{,}57°$

α: $\alpha = 180° - \alpha_1 = 180° - 71{,}57° = 108{,}43°$

Der Winkel S_1S_2R hat $108{,}43\,°$, ist also stumpf.

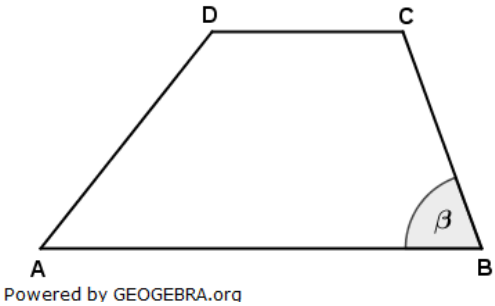
Aufgabe W1a/2012

Vom Trapez $ABCD$ sind bekannt:

$\overline{AB} = 9{,}2\ cm$
$\overline{BC} = 4{,}8\ cm$
$\overline{CD} = 4{,}0\ cm$
$\beta = 70°$

Ein Punkt P liegt auf $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{DP}$ halbiert die Trapezfläche.
Berechnen Sie die Länge $\overline{DP}$.

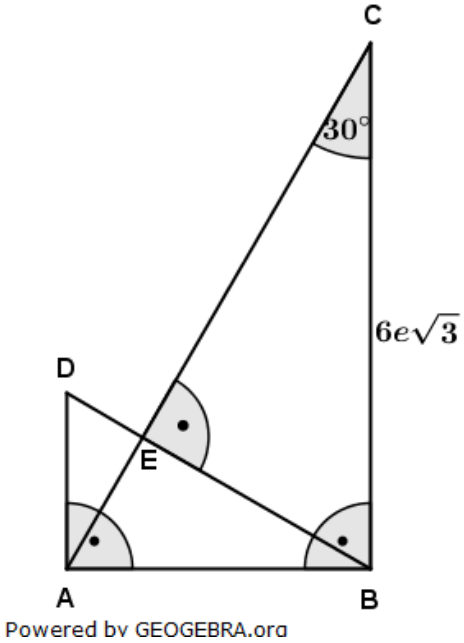
Lösung: $\overline{DP} = 5{,}4\ cm$



Aufgabe W1b/2012

Das Dreieck ABC und ABD haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass gilt:

$$\overline{CD} = 2e\sqrt{21}$$

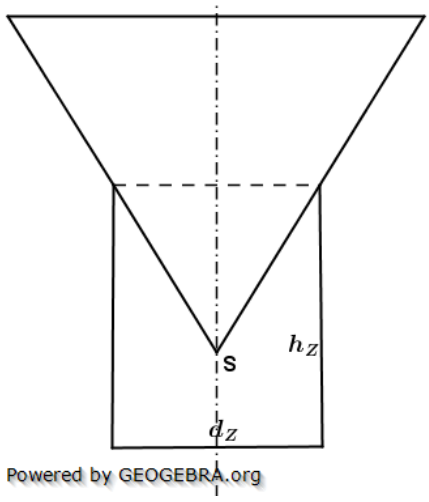


Aufgabe W2a/2012

Ein oben offener Zylinder ist bis zum Rande mit Wasser gefüllt.
Ein Kegel wird in das Wasser getaucht.
Er steckt dann bis zu seiner halben Höhe im Zylinder (siehe Achsenschnitt).
Bei diesem Vorgang laufen $210\ cm^3$ Wasser aus.
Es gilt:

$d_Z = 10{,}0\ cm$ (Innendurchmesser des Zylinders)
$h_Z = 12\ cm$ (Höhe des Zylinders)

Berechnen Sie den Abstand der Kegelspitze S zur Grundfläche des Zylinders.
Wie viel Prozent des Kegelmantels stehen im Wasser?



Lösung: Abstand $a = 4{,}0\ cm$
Prozentualer Anteil des Mantels im Wasser: $p\% = 25{,}0\%$

Aufgabe W2b/2012

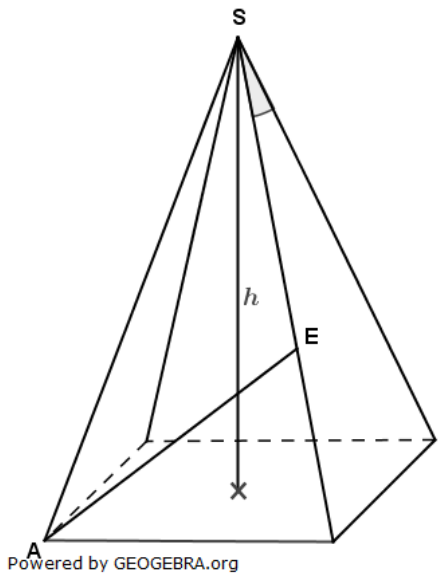
Gegeben ist eine quadratische Pyramide.
Es gilt:

$V = 400\ cm^3$ (Volumen der Pyramide)
$h = 12\ cm$
$\overline{AE} = \overline{ES}$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes E von der Grundfläche.

Lösung: $d = 3{,}9\ cm$

Tipp: Sinussatz für die Strecke $\overline{ES}$.



Aufgabe W3a/2012

Die Parabel p_1 mit dem Scheitel S_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 7{,}5$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -x + 1{,}5$.
Durch die beiden Schnittpunkte P und Q von p_1 und g verläuft die verschobene und nach oben geöffnete Normalparabel p_2.
Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck S_1PS_2Q ein Parallelogramm ist.

Lösung: $S_1(0|7{,}5)$; $S_2(1|-5{,}5)$; $P(-2|3{,}5)$; $Q(3|-1{,}5)$
$\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$; $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$ damit S_1PS_2Q ist ein Parallelogramm

Aufgabe W3b/2012

Der Punkt $P(3|12)$ liegt auf einer nach oben geöffneten Normalparabel p. Die Parabel hat als Symmetrieachse die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $A(-1|0)$.
Sie schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 (mit $x < 0$) und N_2.
Der Parabelpunkt $R(0|y_R)$ sowie die Punkte P und N_1 bilden das Dreieck RPN_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks RPN_1.

Lösung: $A_{RPN_1} = 27\ FE$

Aufgabe W4a/2012

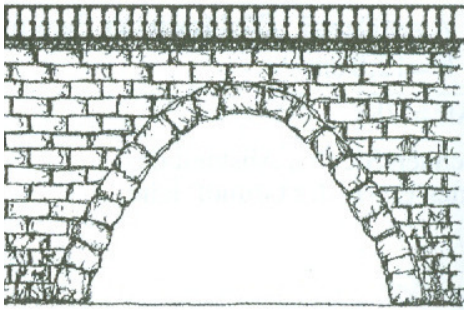
Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung führt die Klasse $10a$ der Neckar-Realschule ein Glücksspiel durch.
Die Sektoren des dafür verwendeten Glücksrades sind rot, gelb und blau gefärbt.
Die Wahrscheinlichkeit für Rot beträgt $25\,\%$, für Gelb $\frac{1}{3}$.
Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Folgender Gewinnplan ist vorgesehen:

Farbe	Gewinn
Rot	$4{,}00\,€$
Gelb	$1{,}50\,€$
Blau	$0{,}60\,€$

Pro Spiel werden $2{,}00\,€$ Einsatz verlangt.
Berechnen Sie den Erwartungswert. Lösung: $E(X) = 0{,}25\,€$
Die Klasse möchte ihren zu erwartenden Gewinn pro Spiel verdoppeln. Dabei soll das Glücksrad und der Einsatz pro Spiel nicht verändert werden. Stellen Sie einen möglichen Gewinnplan auf.
Lösung: Der Gewinnplan für Rot muss von $4\,€$ auf $3\,€$ geändert werden.

Aufgabe W4b/2012

Ein Brückenbogen überspannt eine Fahrbahn und hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$.
Die Höhe des Bogens beträgt $5{,}80\,m$. Auf Fahrbahnhöhe ist der Brückenbogen $8{,}80\,m$ breit.
Erstellen Sie die Gleichung der zugehörigen Parabel.
Ein landwirtschaftliches Fahrzeug ist $3{,}20\,m$ breit und $4{,}60\,m$ hoch. Kann das Fahrzeug durchfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.



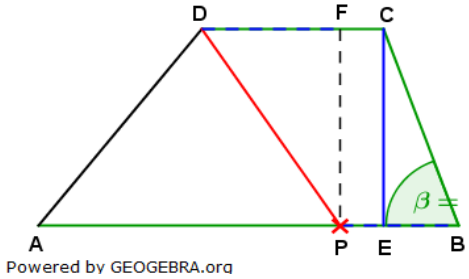
Lösung: $p\colon\ y = -0{,}3x^2 + 5{,}8$
Das Fahrzeug kann durchfahren.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2012

Lösungslogik

Berechnung von $\overline{CE}$ über $sin\beta$.
Berechnung von A_{ABCD} über die Flächenformel des Trapezes.
Bestimmung von A_{PBCD}.
Berechnung von $\overline{PB}$ über die Flächenformel des Trapezes.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{PE}$ als Differenz von $\overline{PB}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{DF}$ als Differenz von $\overline{CD}$ und $\overline{PE}$.
Berechnung von $\overline{DP}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{CE}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot sin\beta$

$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot sin\beta = 4{,}8 \cdot sin70° = 4{,}51$

A_{ABCD}: $\quad A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot (9{,}2 + 4{,}1) \cdot 4{,}51 = 30{,}0$

A_{PBCD}: $\quad A_{PBCD} = \frac{A_{ABCD}}{2} = 15{,}0$

$\overline{PB}$: $\quad A_{PBCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{PB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CE} = 15{,}0 \quad | \quad \cdot \overline{CD}$

$30 = (\overline{PB} + 4{,}0) \cdot 4{,}51 \quad | \quad : 4{,}51;\ -4{,}0$

$\overline{PB} = \frac{30}{4{,}51} - 4{,}0 = 2{,}65$

$\overline{EB}$: $\quad \overline{EB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{4{,}8^2 - 4{,}51^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{EB} = \sqrt{2{,}6999} = 1{,}64$

$\overline{PE}$: $\quad \overline{PE} = \overline{PB} - \overline{EB} = 2{,}65 - 1{,}64 = 1{,}01$

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \overline{CD} - \overline{PE} = 4{,}0 - 1{,}01 = 2{,}99$

$\overline{DP}$: $\quad \overline{DP} = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{2{,}99^2 + 4{,}51^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

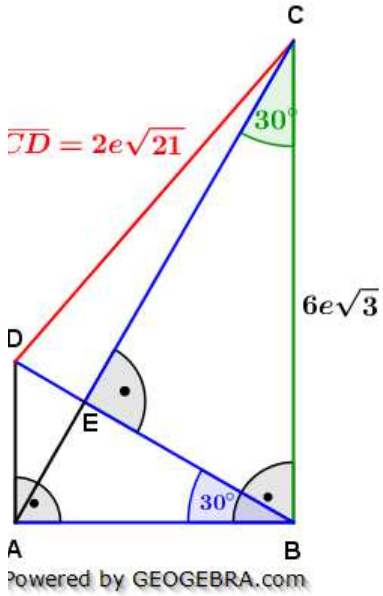
$\overline{DP} = \sqrt{29{,}2802} = 5{,}41$

Die Strecke $\overline{DP}$ ist $5{,}4\ cm$ lang.

Lösung W1b/2012

Lösungslogik

Berechnung von $\overline{AB}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den $sin30°$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{ED}$.
Berechnung von $\overline{CD}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{AB}$: $tan30° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot tan30° = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 6e$

$\overline{BE}$: $sin30° = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{BE} = \overline{BC} \cdot sin30° = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3e\sqrt{3}$

$\overline{CE}$: $cos30° = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot cos30° = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 9e$

$\overline{BD}$: $cos30° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD}$; $: cos30°$

$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{cos30°} = \frac{6e}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{12e}{\sqrt{3}}$ | $\cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)

$\overline{BD} = \frac{12e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 4e\sqrt{3}$

$\overline{ED}$: $\overline{ED} = \overline{BD} - \overline{BE} = 4e\sqrt{3} - 3e\sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{CD}$: $\overline{CD} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{ED}^2} = \sqrt{(9e)^2 + (e\sqrt{3})^2}$ | Satz des Pythagoras

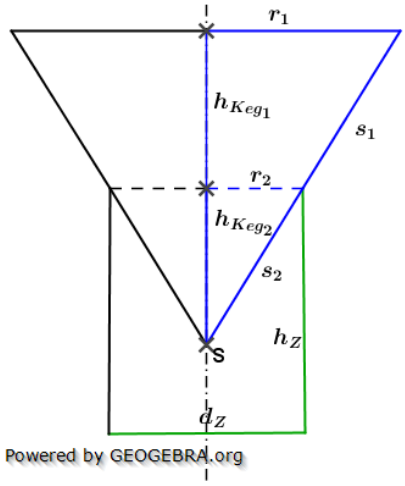
$\overline{CD} = \sqrt{81e^2 + 3e^2 = 84e^2} = \sqrt{84e^2} = e\sqrt{4 \cdot 21} = 2e\sqrt{21}$

$\overline{CD} = 2e\sqrt{21}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2012

Lösungslogik

Durch das Eintauchen der Kegelspitze gehen $210\ cm^3$ Wasser verloren, also muss das Volumen der eingetauchten Kegelspitze gleich groß sein.
Berechnung von r_2.
Berechnung von h_{Keg_2} über die Volumenformel des Kegels.
Berechnung des Abstandes der Kegelspitze a zur Grundfläche aus der Differenz von h_Z und h_{Keg_2}.
Berechnung von s_2 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels der eingetauchten Kegelspitze über die Mantelformel des Zylinders.
Berechnung von h_{Keg_1}.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Berechnung von r_1 über den 2. Strahlensatz.
Berechnung von s_1 über den 1. Strahlensatz.
Berechnung des Mantels des gesamten Kegels über die Mantelformel des Kegels.
Berechnung des Anteils der Mantelfläche des eingetauchten Kegels zur Gesamtmantelfläche.

Klausuraufschrieb

r_2: $r_2 = \frac{1}{2} \cdot d_Z = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

h_{Keg_2}: $V_{Keg_2} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg_2}^2 \cdot h_{Keg_2}$ | $\cdot 3;\ :(\pi \cdot r_{Keg_2}^2)$

$h_{Keg_2} = \frac{3 \cdot V_{Keg_2}}{\pi \cdot r_{Keg_2}^2} = \frac{3 \cdot 210}{\pi \cdot 5^2} = 8{,}0$

a: $a = h_Z - h_{Keg_2} = 12 - 8{,}0 = 4$

Der Abstand der Kegelspitze S zur Grundfläche beträgt $4\ cm$.

s_2: $s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_{Keg_2}^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$ | Satz des Pythagoras

$s_2 = 9{,}43$

M_{Keg_2}: $M_{Keg_2} = \pi r_{Keg_2} \cdot s_2 = \pi \cdot 5 \cdot 9{,}43 = 148{,}13$

h_{Keg_1}: $h_{Keg_1} = h_{Keg_2} = 8$ | gemäß Aufgabenstellung

r_1: $\frac{r_1}{h_{Keg_1} + h_{Keg_2}} = \frac{r_2}{h_{Keg_2}}$ | $\cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2})$

$r_1 = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2}) = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10$

s_1: $\frac{s_1}{h_{Keg_1}} = \frac{s_2}{h_{Keg_2}}$ | $\cdot h_{Keg_1}$

$s_1 = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \cdot h_{Keg_1} = \frac{9{,}43}{8} \cdot 8 = 9{,}43$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg_1} \cdot (s_1 + s_2) = \pi \cdot 10 \cdot 18{,}86 = 592{,}50$

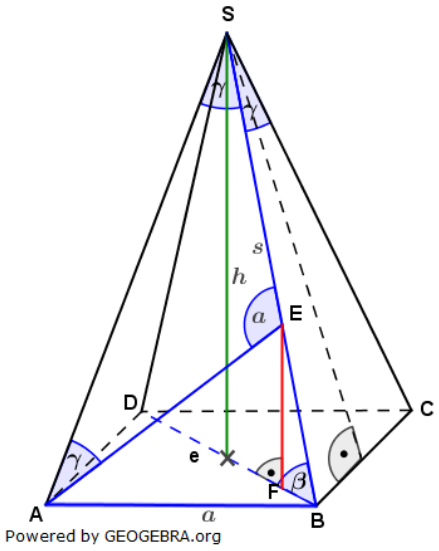
$p\ \%$: $p\ \% = \frac{m_{Keg_2}}{M_{Keg}} \cdot 100 = \frac{148{,}13}{592{,}50} \cdot 100 = 25\ \%$

Der prozentuale Anteil des Mantels im Wasser von der Gesamtmantelfläche des Kegels beträgt $25\ \%$.

Lösung W2b/2012

Lösungslogik

Berechnung von a über das gegebene Volumen.
Berechnung der Diagonalen e der Grundfläche.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\frac{\gamma}{2}$ über den sin.
Berechnung von γ.
Berechnung von α als Ergänzungswinkel im Dreieck AES.
Berechnung von $\overline{ES}$ über den Sinussatz.
Berechnung von $\overline{BE}$ als Differenz von s und $\overline{ES}$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den 2. Strahlensatz.
Alternativ:
Berechnung von β über den tan.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den sin.



Klausuraufschrieb

a: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$ | $\cdot 3;\ :h;\ \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 400}{12}} = 10$

e: $e = a\sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14{,}14$

s: $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 7{,}07^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = 13{,}93$

$\frac{\gamma}{2}$: $sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{5}{13{,}93} = 0{,}3589$

$\frac{\gamma}{2} = sin^{-1}(0{,}3589) = 21{,}03°$

γ: $\gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 2 \cdot 21{,}03° = 42{,}06°$

α: $\alpha = 180° - 2 \cdot \gamma = 180° - 2 \cdot 42{,}06° = 95{,}88°$

$\overline{ES}$: $\frac{\overline{ES}}{sin\gamma} = \frac{s}{sin\alpha}$ | Sinussatz

$\overline{ES} = \frac{s}{sin\alpha} \cdot sin\gamma = \frac{13{,}93}{sin96°} \cdot sin42° = 9{,}37$

$\overline{BE}$: $\overline{BE} = s - \overline{ES} = 13{,}93 - 9{,}37 = 4{,}56$

$\overline{EF}$: $\frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} = \frac{h}{s}$ | 2. Strahlensatz

$\overline{EF} = \frac{h}{s} \cdot \overline{BE} = \frac{12}{13{,}93} \cdot 4{,}56 = 3{,}93$

Der Abstand des Punktes E von der Grundfläche beträgt $3{,}9\ cm$.

Alternativ:

β: $tan\beta = \frac{h}{\frac{e}{2}} = \frac{12}{7{,}07} = 1{,}6973$

$\beta = tan^{-1}(1{,}6973) = 59{,}5°$

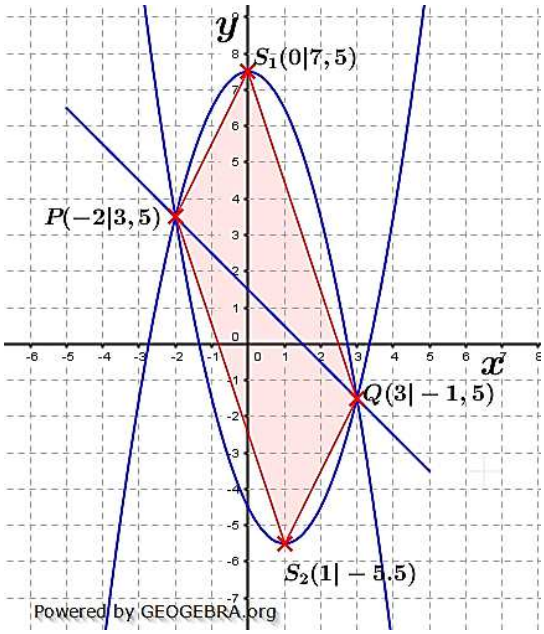
$\overline{EF}$: $sin\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$ | $\cdot \overline{BE}$

$\overline{EF} = \overline{BE} \cdot sin\beta = 4{,}56 \cdot sin59{,}5° = 3{,}92$

Lösung W3a/2012

Lösungslogik

Berechnung der Schnittpunkte P und Q durch Gleichsetzung von p_1 mit g.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über Punktproben mit P und Q.
Berechnung der Scheitelpunkte von p_1 und p_2.
Ermittlung der Steigungen der Geraden durch S_1 und P, S_2 und Q sowie P und S_2 und Q und S_1.
Das Viereck S_1PS_2Q ist dann ein Parallelogramm, wenn $\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$ und $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$ ist.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte von p_1 mit g:

$p_1 \cap g$: (1) $y = -x^2 + 7{,}5$

(2) $\underline{y = -x + 1{,}5}$

(1)-(2) $0 = -x^2 + x + 6$ | $\cdot -1$

$x^2 - x - 6 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -2$

$x_1 \longrightarrow g$: $y_1 = -3 + 1{,}5 = -1{,}5$

$x_2 \longrightarrow g$: $y_2 = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$

$P(-2|3{,}5);\ \ Q(3|-1{,}5)$

Parabelgleichung p_2

p_2: $y = x^2 + bx + c$ | allgemeine Parabelgleichung

(1) $3{,}5 = 4 - 2b + c$ | Punktprobe mit $P(-2|3{,}5)$

(2) $\underline{-1{,}5 = 9 + 3b + c}$ | Punktprobe mit $P(3|-1{,}5)$

(1)-(2) $5 = -5 - 5b$

$b = -2$

$b \longrightarrow (1)$: $3{,}5 = 4 - 2 \cdot (-2) + c$

$3{,}5 = 4 + 4 + c$

$c = -4{,}5$

p_2: $y = x^2 - 2x - 4{,}5$

Scheitelpunkte p_1 und p_2:

S_1: $S_1(0|7{,}5)$ | aus p_1 abgelesen

S_2: $y = x^2 - 2x - 4{,}5$

$y = (x-1)^2 - 1^2 - 4{,}5$ | quadratische Ergänzung

$y = (x-1)^2 - 5{,}5$ | Scheitelpunktgleichung

$S_2(1|-5{,}5)$

Steigungen $\overline{S_2Q}$ und $\overline{S_1P}$:

$$m_{\overline{S_2Q}} = \frac{y_Q - y_{S_2}}{x_Q - x_{S_2}} = \frac{-1{,}5-(-5{,}5)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{S_1P}} = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_P - x_{S_1}} = \frac{3{,}5-7{,}5}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Steigungen $\overline{PS_2}$ und $\overline{QS_1}$:

$$m_{\overline{PS_2}} = \frac{y_{S_2} - y_P}{x_{S_2} - x_P} = \frac{-5{,}5-3{,}5}{1-(-2)} = \frac{-9}{3} = -3$$

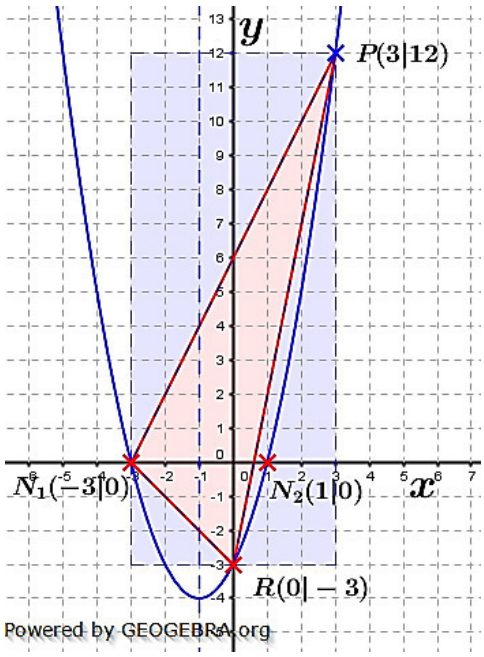
$$m_{\overline{QS_1}} = \frac{y_{S_1} - y_Q}{x_{S_1} - x_Q} = \frac{7{,}5-(-1{,}5)}{0-3} = \frac{9}{-3} = -3$$

Wegen $\overline{S_2Q} \| \overline{S_1P}$ und $\overline{PS_2} \| \overline{QS_1}$, ist das Viereck S_1PS_2Q ein Parallelogramm.

Lösung W3b/2012

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung von p:
Durch die Angabe, dass die Symmetrieachse eine Parallele zur y–Achse durch den Punkt $A(-1|0)$ ist, wissen wir, dass die x–Koordinate des Scheitels -1 sein muss. Mithilfe einer Punktprobe mit dem Punkt $P(3|12)$ in der Scheitelpunktgleichung lässt sich die y–Koordinate des Scheitels berechnen. Wir erhalten somit die vollständige Scheitelpunktgleichung und den Scheitelpunkt der Parabel.



Nullstellenberechnung:
Wir berechnen die Nullstellen von p, indem wir y der Scheitelpunktgleichung auf 0 setzen und die Gleichung dann nach x auflösen.

Fläche des Dreiecks RPN_1:
Nachdem die Eckpunkte des Dreiecks bekannt sind, erkennen wir aus der Grafik, dass das Dreieck kein rechtwinkliges Dreieck ist.
Wir müssen somit zunächst die Fläche des Rechtecks berechnen, welches das Dreieck umschließt (siehe Grafik). Von der Fläche dieses Rechtecks müssen wir dann die Flächen der seitlichen drei Dreiecke abziehen und erhalten damit die Fläche des Dreiecks RPN_1.

Klausuraufschrieb

Aufstellung der Parabelgleichung von p:

p:	$y = (x - x_S)^2 + y_S$	|	Scheitelpunktgleichung
	$x_S = -1$	|	Symmetrieachse durch $A(-1\|0)$
	$y = (x+1)^2 + y_S$		
	$12 = (3+1)^2 + y_S$	|	Punktprobe mit $P(3\|12)$
	$12 = 16 + y_S$		
	$y_S = -4$		
	$y = (x+1)^2 - 4$		

Nullstellenberechnung:

$0 = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4}$

$x_{1,2} = -1 \pm 2$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -3$

$N_1(1|0);\ \ N_2(-3|0)$

Fläche des Dreiecks RPN_1:

A_{RPN_1}: $A_{RPN_1} = A_{ABPC} - A_{N_1AR} - A_{RBP} - A_{PCN}$

A_{ABPC}: $A_{ABPC} = 6 \cdot 15 = 90$

A_{N_1AR}: $A_{N_1AR} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

A_{RBP}: $A_{RBP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 = 22{,}5$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

A_{PCN}: $A_{PCN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$

A_{RPN_1}: $A_{RPN_1} = 90 - 4{,}5 - 22{,}5 - 36 = 27$

Der Flächeninhalt des Dreiecks RPN_1 beträgt $27\ FE$.

Lösung W4a/2012

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, ähnlich Aufgabe W4a/2012. Da jedoch alle Farben gewinnen, wird keine Spalte für den Spieleinsatz eingetragen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Farbe Blau über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit „Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementereignisse eines Zufallsexperiments ist stets 1„.
Spalten der Zeile eins und zwei multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen. Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Berechnung der Veränderung des Gewinnplans, damit der Gewinn pro Spiel verdoppelt wird.

Klausuraufschrieb

$P(rot) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(gelb) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(blau) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Berechnung der Erwartungswerte

4 €	1,50 €	0,60 €
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
1,00 €	0,50 €	0,25 €

$EX = 1{,}00 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}75$ €

Gewinn pro Spiel:

$Gewinn = Einsatz - EX = 2{,}00 - 1{,}75 = 0{,}25$ €

Verdoppelung des Gewinns:

$2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50 = 2{,}00 - EX \Longrightarrow \ EX = 1{,}50$

Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:

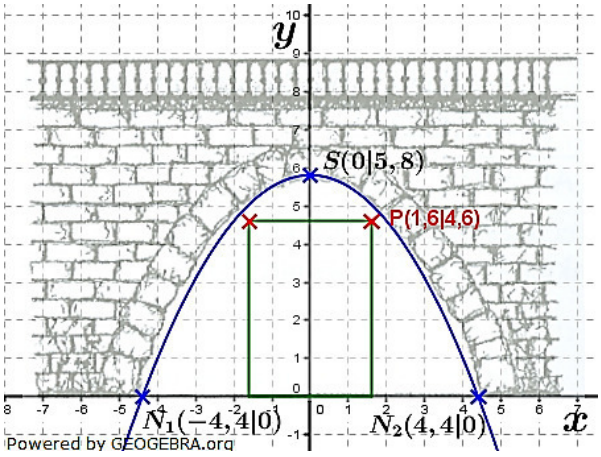
$EX = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}50 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}60 \cdot \frac{5}{12} = 0{,}75 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}50$ €

Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

Lösung W4b/2012

Lösungslogik

Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels S sowie der Nullstellen N_1 und N_2.
Aufstellung der Parabelgleichung.
Prüfung, ob der Punkt $P(1{,}6|4{,}6)$ unterhalb oder oberhalb der Parabel liegt.



Klausuraufschrieb

Scheitelpunkt der Parabel: $S(0|5{,}8)$.
Nullstellen $N_1(-4{,}4|0)$ und $N_2(4{,}4|0)$.
p: $y = ax^2 + 5{,}8$
Punktprobe mit N_1:

$$0 = a \cdot 4{,}4^2 + 5{,}8 \quad | \quad -5{,}8$$
$$-5{,}8 = 19{,}36a \quad | \quad :19{,}36$$
$$a = -0{,}3$$

Die Gleichung der Parabel lautet $y = -0{,}3x^2 + 5{,}8$.
Prüfung, ob der Punkt P oberhalb oder unterhalb der Parabel liegt:

$$y = -0{,}3 \cdot 1{,}6^2 + 5{,}8 = 5{,}03$$

An der Stelle $x_0 = 1{,}6$ bzw. $x_1 = -1{,}6$ ist der Brückenbogen etwa $5\,m$ hoch. Da das landwirtschaftliche Fahrzeug eine Höhe von nur $4{,}60\,m$ hat, kann es unter der Brücke durchfahren.

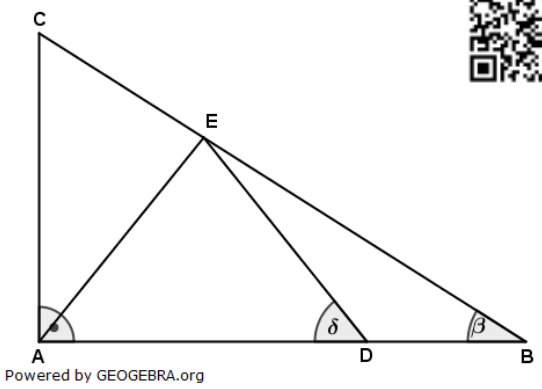
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2013

Im rechtwinkligen Dreieck ABC liegt das gleichschenklige Dreieck ADE.
Es gilt:

$\overline{AB} = 6{,}5\ cm$
$\delta = 51{,}2\,°$
$\overline{DE} = \overline{AE} = 3{,}5\ cm$

Berechnen Sie den Winkel β.
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AEC.
Tipp: Sinussatz für $\overline{CE}$



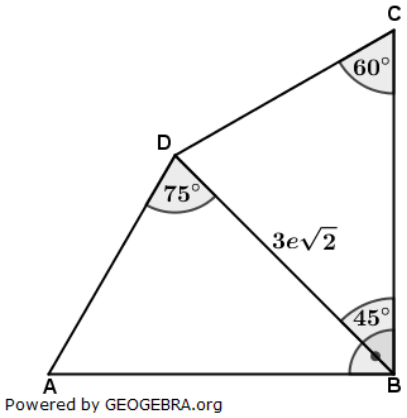
Lösung: $\beta = 32{,}4°$
$u_{AEC} = 10{,}2\ cm$

Aufgabe W1b/2013

Gegeben ist das Viereck $ABCD$. Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ mit der Formel

$$A = 3e^2(3 + \sqrt{3})$$

berechnet werden kann.



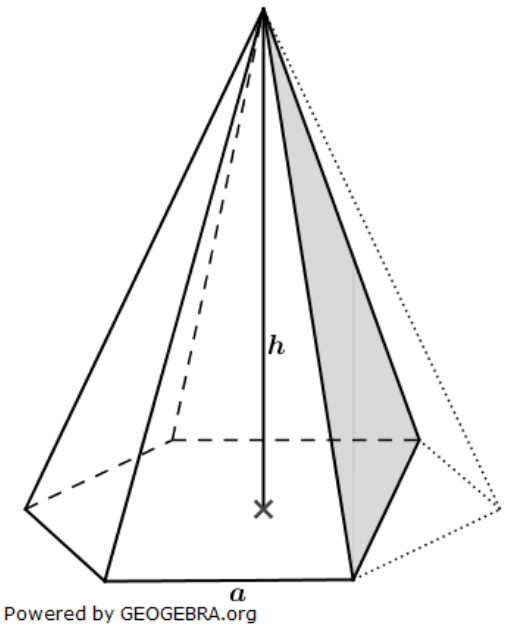
Aufgabe W2a/2013

Von einer massiven regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sind bekannt:

$a = 3{,}4\ cm$
$h = 6{,}7\ cm$

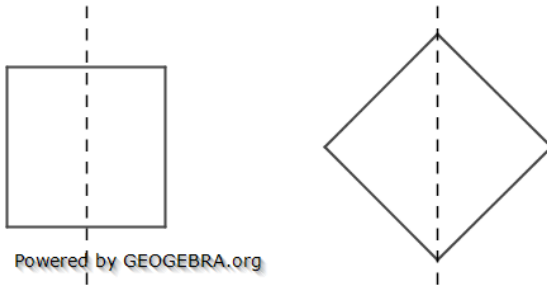
Ein Teil der Pyramide wird abgeschnitten (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Mantelfläche des neu entstandenen Körpers.

Lösung: $M = 70{,}1\ cm^2$



Aufgabe W2b/2013

Die Skizze zeigt die Achsenschnitte eines Zylinders und eines Doppelkegels (zwei gleich große Kegel mit gemeinsamer Grundfläche).
Die Schnittflächen der beiden Körper sind gleich große Quadrate mit einem Flächeninhalt von jeweils $36{,}0\ cm^2$.
Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Oberflächen der beiden Körper?



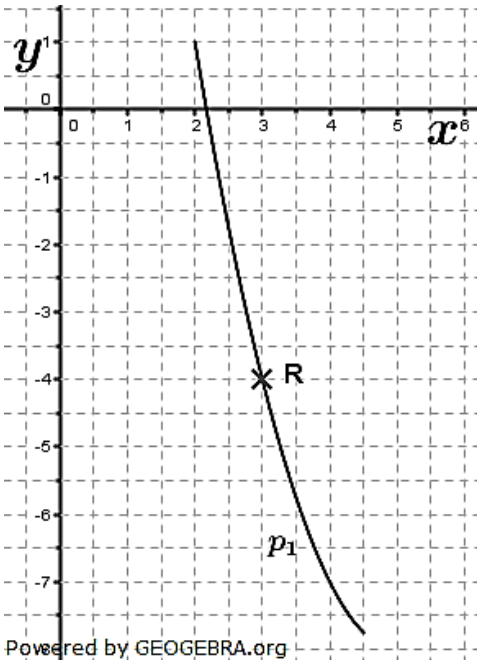
Lösung: $p\,\% = 5{,}8\,\%\ (6{,}1\%)$

Aufgabe W3a/2013

Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p_1.
Der Punkt R liegt auf p_1.
Die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle gehört zur Normalparabel p_1.

x	3	4	5	6	7	8	9
y					-4		

Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an und füllen Sie die Wertetabelle vollständig aus.
Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 - 4$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die beiden Parabeln keinen gemeinsamen Punkt haben.
Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die keinen gemeinsamen Punkt mit beiden Parabeln hat.



Lösung: p_1: $y = x^2 - 10x + 17$
g: $y = -2x$ (andere möglich)

Aufgabe W3b/2013

Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete und verschobenen Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(3|-4)$.
Der Scheitel S_1 von p_1 sowie die Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_2 mit der x–Achse bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$.
Eine Gerade g geht durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln und teilt somit die Fläche des Dreiecks.
Überprüfen Sie, ob die Gerade g die Fläche des Dreiecks $N_1N_2S_1$ halbiert.

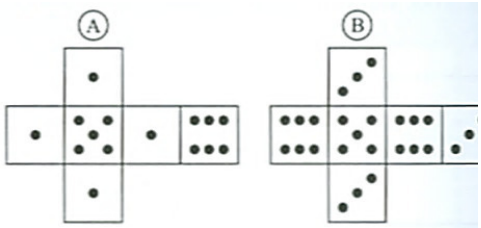
Lösung: $A_{S_1N_1N_2} = 10\ FE$
Die Gerade halbiert die Fläche nicht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2013

Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel.
Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs" zu werfen?

Lösung: $p = 44{,}44\ \%$



Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Lösung: $EX = -0{,}25$

Wurfergebnisse	Gewinn
gleiche Augenzahlen (Pasch)	9,00 €
verschiedene Augenzahlen	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 1,00 €	

Der Veranstalter möchte beim Würfelnetz **A** die „Fünf" durch eine „Sechs" ersetzen.
Der Gewinnplan soll gleich bleiben. Wäre dies für ihn vorteilhaft?
Begründen Sie.

Lösung: nicht vorteilhaft, da sich $EX = 0$ ergibt.

Aufgabe W4b/2013

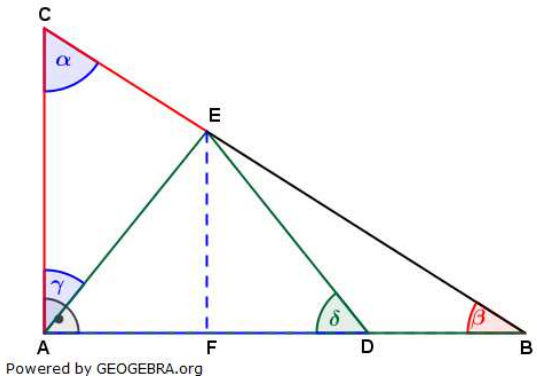
Die Grafik zeigt die Lanxess Arena in Köln.
Sie wird von einem parabelförmigen Bogen überspannt. Dieser lässt sich mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben.
Der Bogen hat am Boden eine Spannweite von $190\,m$. Die maximale Höhe des Bogens beträgt $76\,m$ über dem Boden. Geben Sie eine Gleichung der zugehörigen Parabel an.

An einem Punkt P des Bogens, der sich in $50\,m$ Höhe befindet, soll eine Befestigung angebracht werden.
Wie weit ist dieser Punkt P vom höchsten Punkt des Bogens entfernt?

Lösung: $p\colon\ y = -\frac{4}{475}x^2 + 76;\quad \overline{PS} = 61{,}35\,m$

Lösung W1a/2013

Lösungslogik



Berechnung $\overline{FD}$ im Dreieck FDE über $cos\delta$.
Berechnung von $\overline{FE}$ im Dreieck FDE über $sin\delta$.
Das Dreieck AED ist gleichschenklig, damit ist $\overline{AF} = \overline{FD}$.
Berechnung von $\overline{FB}$ über $\overline{AB} - \overline{AF}$ (identisch mit $\overline{AB} - \overline{FD}$)
Berechnung von β im Dreieck FBE über den tan.
Berechnung von α als Ergänzungswinkel zu $180\,°$ im Dreieck ABC.
Berechnung von γ als Differenzwinkel von $90\,°$ und δ.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den $tan\beta$ im Dreieck ABC.
Berechnung von $\overline{CE}$ mit dem Sinussatz über γ, $\overline{AE}$ und α.
Berechnung des Umfangs Dreiecks AEC über $\overline{AE} + \overline{EC} + \overline{AC}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{FD}$: $\frac{\overline{FD}}{\overline{DE}} = cos\delta \implies \overline{FD} = \overline{DE} \cdot cos\delta = 3{,}5 \cdot cos51{,}2\,° = 2{,}1931$

$\overline{FE}$: $\frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} = sin\delta \implies \overline{FE} = \overline{DE} \cdot sin\delta = 3{,}5 \cdot sin51{,}2\,° = 2{,}7277$

$\overline{FB}$: $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{FD} = 6{,}5 - 2{,}1931 = 4{,}3069$

β: $tan\beta = \frac{\overline{FE}}{\overline{FB}} = \frac{2{,}7277}{4{,}3069} = 0{,}6333$

$\beta = tan^{-1}(0{,}6333) = 32{,}35\,°$

α: $\alpha = 90\,° - \beta = 90° - 32{,}35\,° = 57{,}65\,°$

γ: $\gamma = 90\,° - \delta = 90° - 51{,}2\,° = 38{,}8\,°$

$\overline{AC}$: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = tan\beta \implies \overline{AC} = \overline{AB} \cdot tan\beta = 6{,}5 \cdot tan32{,}35\,° = 4{,}1165$

$\overline{CE}$: $\frac{\overline{CE}}{sin\gamma} = \frac{\overline{AE}}{sin\alpha}$ | Sinussatz

$\overline{CE} = \overline{AE} \cdot \frac{sin\gamma}{sin\alpha} = 3{,}5 \cdot \frac{sin38{,}8°}{sin57{,}65°} = 2{,}596$

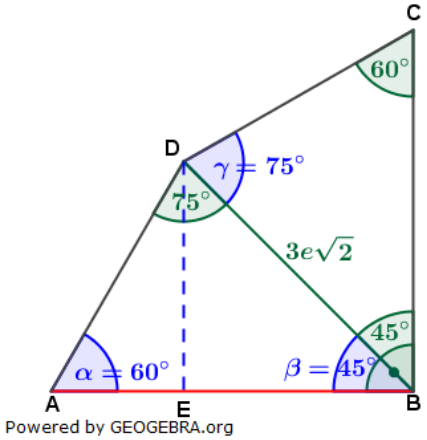
u_{AED}: $u_{AED} = \overline{AE} + \overline{CE} + \overline{AC} = 3{,}5 + 2{,}596 + 4{,}1165 = 10{,}2125$

Der Winkel β ist $32{,}4\,°$ groß, der Umfang des Dreiecks AEC beträgt $10{,}2\ cm$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2013

Lösungslogik



Berechnung γ als Ergänzungswinkel zu $180°$ im Dreieck BDC.
Berechnung von β als Nebenwinkel zu Winkel DBC.
Berechnung α als Ergänzungswinkel zu $180°$ im Dreieck ABD.
Wegen $\alpha = 60° = \sphericalangle DCB$ und $\beta = 45° = \sphericalangle DBC$ sind die beiden Dreiecke ABD und BDC kongruent.
Damit ist $\overline{AB} = \overline{BC}$ und $\overline{AD} = \overline{DC}$.
Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist somit doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks ABD.
Berechnung von $\overline{ED}$ als Höhe des Dreiecks ABD über $sin\beta$ im Dreieck EBD.
Berechnung von $\overline{AB}$ über die Summe der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über $tan\alpha$ im Dreieck AED.
Berechnung von $\overline{EB}$ über $cos\beta$ im Dreieck EBD.
Berechnung von A_{ABCD} aus $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED}$.

Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = 180° - 45° - 60° = 75°$

β: $\beta = 90° - 45° = 45°$

α: $\alpha = 180° - 75° - \beta = 105° - 45° = 60°$

Wegen $\alpha = 60° = \sphericalangle DCB$ und $\beta = 45° = \sphericalangle DBC$ und $\overline{BD}$ als gemeinsamer Seite der beiden Dreiecke ABD und BDC sind diese beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD}$

$\overline{ED}$: $\frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = sin\beta$

$\overline{ED} = \overline{BD} \cdot sin\beta = 3e\sqrt{2} \cdot sin45° = 3e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3e$

$\overline{AE}$: $\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} = tan\alpha$

$\overline{AE} = \frac{\overline{ED}}{tan\alpha} = \frac{3e}{tan60°} = \frac{3e}{\sqrt{3}} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = e\sqrt{3}$

$\overline{EB}$: $\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} = cos\beta$

$\overline{EB} = \overline{BD} \cdot cos\beta = 3e\sqrt{2} \cdot cos45° = 3e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3e$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = e\sqrt{3} + 3e = e(3 + \sqrt{3})$

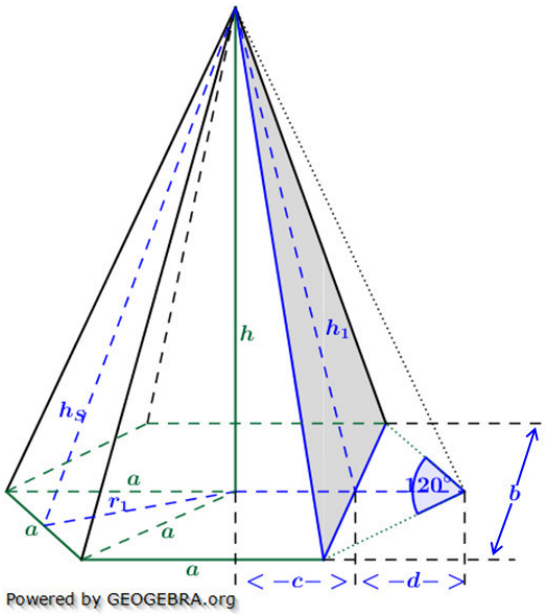
A_{ABCD}: $A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED} = e(3 + \sqrt{3}) \cdot 3e$

$A_{ABCD} = 3e^2(3 + \sqrt{3})$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2013

Lösungslogik

Der Mantel einer regelmäßigen sechseckigen Pyramide berechnet sich nach $M = 3 \cdot a \cdot h_S$. Von dem gesamten Mantel ist $\frac{1}{3}$ der Mantelfläche abgeschnitten, somit Mantelrest: $M_{Rest} = 2 \cdot a \cdot h_S$.



Berechnung von h_S über den Satz des Pythagoras. Hierzu benötigen wir allerdings r_1. Die sechseckige Grundfläche der Pyramide besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenkante a. r_1 ist die Höhe eines solchen gleichseitigen Dreiecks. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck berechnet sich aus $r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung).

Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit für h_S: $h_S = \sqrt{h^2 + r_1^2}$

Nachdem h_S bestimmt ist, Berechnung von M_{Rest}.

Durch den Abschnitt kommt die Fläche des grau gekennzeichneten Dreiecks auf der rechten Seite der Skizze zur Mantelfläche hinzu.

Diese Fläche berechnet sich aus $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$. Hierzu benötigen wir sowohl b als auch h_1.

b ist die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Schenkellänge a und dem Spitzenwinkel $120\,°$. Hierrüber ermittelt sich $\frac{b}{2}$ über den $sin60°$.

h_1 lässt sich mit dem Satz des Pythagoras errechnen mit $h_1 = \sqrt{h^2 + c^2}$. Hierzu benötigen wir zunächst die Strecke c.

c errechnet sich: $c = a - d$, wobei d sich über den $cos60°$ errechnen lässt.

Nach Berechnung aller Zwischenwerte kann $A_{Dreieck}$ bestimmt werden und damit auch die Mantelfläche des Restkörpers mit $M_{Körper} = M_{Rest} + A_{Dreieck}$.

Klausuraufschrieb

Der Mantel des Restkörpers besteht aus vier Seitendreiecken der Pyramide (M_{Rest}) zuzüglich der Fläche des grau gekennzeichneten Dreiecks auf der rechten Seite der Skizze ($A_{Dreieck}$).

M_{Rest}: $\quad M_{Pyr} = 3 \cdot a \cdot h_S$

h_S: $\quad h_S = \sqrt{h^2 + r_1^2}$

r_1: $\quad r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3{,}4}{2}\sqrt{3} = 2{,}94$

$h_S = \sqrt{6{,}7^2 + 2{,}94^2} = 7{,}3167$

$M_{Pyr} = 3 \cdot 3{,}4 \cdot 7{,}3167 = 74{,}63$

$M_{Rest} = \frac{2}{3} \cdot M_{Pyr} = \frac{2}{3} \cdot 74{,}63 = 49{,}75$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$A_{Dreieck}$: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$

b: $\frac{\frac{b}{2}}{a} = sin60°$

$b = 2 \cdot a \cdot sin60° = 2 \cdot 3{,}4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3{,}4 \cdot \sqrt{3} = 5{,}889$

h_1: $h_1 = \sqrt{h^2 + c^2}$

c: $c = a - d$

d: $\frac{d}{a} = cos60°$

$d = a \cdot cos60° = 3{,}4 \cdot 0{,}5 = 1{,}7$

$c = 3{,}4 - 1{,}7 = 1{,}7$

$h_1 = \sqrt{6,7^2 + 1,7^2} = 6{,}9123$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}889 \cdot 6{,}9123 = 20{,}3533$

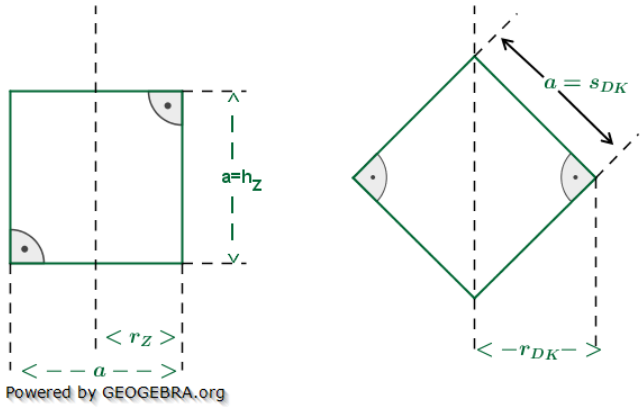
$M_{Körper}$: $M_{Körper} = M_{Rest} + A_{Dreieck} = 49{,}75 + 20{,}3533 = 70{,}10$

Der Mantel des Körpers ist etwa $70{,}1\ cm^2$ *groß.*

Lösung W2b/2013

Lösungslogik

Die nebenstehende Skizze zeigt links den Achsenschnitt durch den Zylinder und rechts den durch den Doppelkegel.
Die Schnittflächen sind nach Aufgabenstellung ein Quadrat mit $36\ cm^2$ Fläche, somit sind alle Kanten der beiden Schnittflächen $6\ cm$ lang.
Die Oberfläche des Zylinders errechnen wir über die Formel $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z$.



Die Oberfläche des Doppelkegels entspricht zweimal der Mantelfläche eines Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels errechnet sich über $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$. Hierzu benötigen wir noch r_K, welches über den Satz des Pythagoras errechnet werden kann. Nach Berechnung der beiden Oberflächen bilden wir das prozentuale Verhältnis. Da aus der Aufgabenstellung nicht klar hervorgeht, welche der beiden Oberflächen als Grundwert genommen werden soll, berechnen wir sowohl als auch.

Klausuraufschrieb

a: $A_{Querschnitt} = 36 = a^2 \implies a = 6\ cm$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$

$O_{Zyl} = \frac{3}{2}\pi \cdot 36 = 169{,}65\ cm^2$

M_{DK}: $M_{DK} = 2 \cdot M_{Kegel}$

M_{Kegel}: $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$

r_k: $a^2 = r_K^2 + r_K^2 = 2r_k^2$

$r_K^2 = \frac{a^2}{2}$

$r_K = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = 4{,}2426$

$M_{Kegel} = \pi \cdot 4{,}2426 \cdot 6 = 79{,}97$

$M_{DK} = 2 \cdot 79{,}97 = 159{,}94\ cm^2$

Oberfläche Zylinder als Grundwert:

$p\,\% = \frac{M_{DK}}{O_{Zyl}} = \frac{159{,}94}{169{,}65} \cdot 100 = 94{,}28\,\%$

Die Oberfläche des Doppelkegels ist etwa $5{,}8\,\%$ *kleiner als die des Zylinders.*

Oberfläche Doppelkegel als Grundwert:

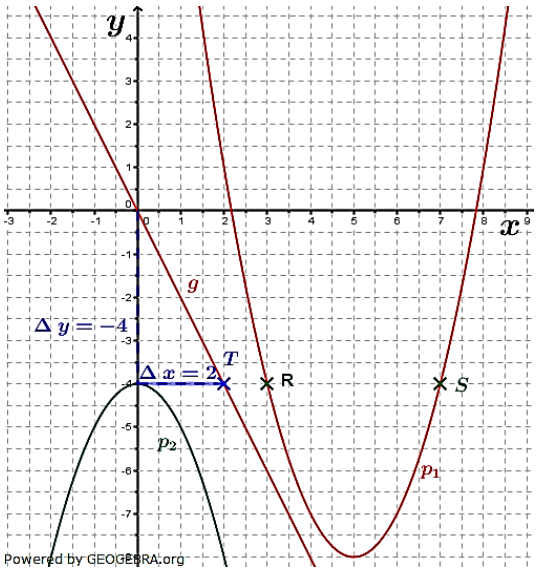
$p\,\% = \frac{O_{Zyl}}{M_{DK}} = \frac{169{,}65}{159{,}94} \cdot 100 = 106{,}1\,\%$

Die Oberfläche des Zylinders ist etwa $6{,}1\,\%$ *größer als die des Doppelkegels.*

Lösung W3a/2013

Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.



Funktionsgleichung für p_1*:*

Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + px + q$ (siehe Formelsammlung). Wir lesen den Punkt R im Koordinatensystem mit $R(3|4)$ ab. In der Wertetabelle ist eine weiterer Punkt S mit $S(7|-4)$ gegeben. Wir machen eine Punktprobe mit R und S und errechnen daraus die Koeffizienten p und q.

Jetzt können wir über die gefundene Funktionsgleichung die Wertetabelle vollständig ausfüllen.

Schnittpunkte von p_1 *und* p_2*:*

Wir setzen die beiden Gleichungen von p_1 und p_2 gleich, formen diese um in eine quadratische Gleichung und ermitteln daraus c.

Dabei stellen wir fest, dass die Lösungsmenge leer ist, was bedeutet, dass die beiden Parabeln sich in keinem Punkt schneiden.

Gleichung einer Geraden g*:*

Wir haben p_1 und p_2 in das Koordinatensystem eingezeichnet und ziehen eine Gerade durch den Ursprung, die zwischen den beiden Parabeln verläuft. Wir suchen einen weiteren leicht ablesbaren Punkt auf der Geraden und bilden über diesen Punkt das Steigungsdreieck und bestimmen daraus die Steigung der Ursprungsgeraden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung für p_1:

p_1: $y = x^2 + px + q$

$R(3|-4)$ (abgelesen) $R(7|-4)$ (aus Tabelle)

(1) $-4 = 9 + 3p + q$ | Punktprobe mit R

(2) $-4 = 49 + 7p + q$ | Punktprobe mit S

(1)-(2) $0 = -40 - 4p \implies p = -10$

$p \longrightarrow (1)$

$-4 = 9 + 3 \cdot (-10) + q$

$30 - 13 = q$

$q = 17$

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 - 10x + 17$.

Wertetabelle:

x	3	4	5	6	7	8	9
y	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 10x + 17 = -x^2 - 4$ | $+x^2; +4$

$2x^2 - 10x + 21 = 0$ | $:2$

$x^2 - 5x + \frac{21}{2} = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 10{,}5} = 2{,}5 \pm \sqrt{-4{,}25}$

Wegen $D < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$, d.h., die beiden Parabeln haben keine gemeinsamen Punkte.

Ursprungsgerade g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Ursprungsgerade durch $O(0|0)$: $y = mx$

$T(2|-4)$ (abgelesen nach Einzeichnung einer geeigneten Geraden)

$m = \frac{-4}{2} = -2$

g: $y = -2x$

Die Gerade g mit $y = -2x$ hat keine Schnittpunkte mit $y = p_1$ und p_2.

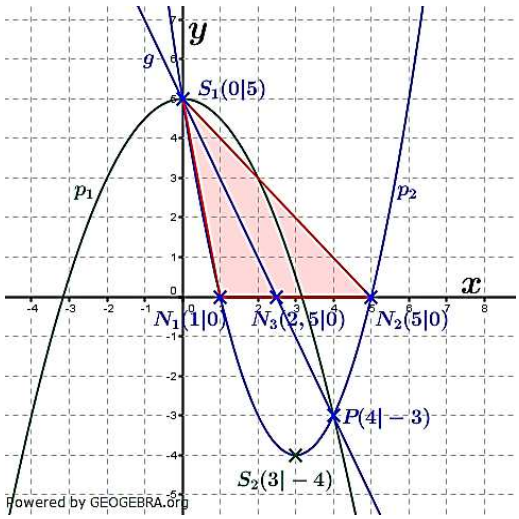
Hinweis:

Es sind natürlich noch andere Geradengleichungen denkbar.

Lösung W3b/2013

Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.
Blaue Linien und Punkte sind erforderliche Zwischenwerte.
Zur Flächenberechnung des Dreiecks $S_1N_1N_2$ benötigen wir die Koordinaten der Punkte. S_1 ist der Scheitelpunkt der in x–Richtung unverschobenen Parabel p_1. Seine Koordinaten lesen wir unmittelbar aus der Funktionsgleichung ab.



N_1 und N_2 sind die Schnittpunkte von p_2 mit der x-Achse. Zur Bestimmung stellen wir die Parabelgleichung in Scheitelpunktform über den gegebenen Scheitelpunkt S_2 auf und lösen die entstehende quadratische
Gleichung über die p/q–Formel nach x auf.
Im Dreieck $S_1N_1N_2$ ist die Strecke $\overline{N_1N_2}$ die Basis und die Strecke $\overline{OS_1}$ die Höhe auf die Basis (Höhe liegt außerhalb des Dreiecks wegen des stumpfen Winkels bei N_1). Die Fläche des Dreiecks ergibt sich aus der Formel $A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2}\overline{N_1N_2} \cdot \overline{OS_1}$ (siehe Formelsammlung).
Zur Bestimmung der Geraden g benötigen wir die Schnittpunkte von p_1 und p_2. Schnittpunktbestimmung erfolgt durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2. Ein Schnittpunkt ist bereits bekannt, sowohl p_1 als auch p_2 haben den y–Achsenabschnitt $c = 5$. Somit ist $S_1(0|5)$ der eine Schnittpunkt. Der zweite Schnittpunkt ergibt sich zu $P(4|-3)$. Über die Punkte S_1 und P bestimmen wir die Steigung m der Geraden g. Auch der y–Achsenabschnitt der Geraden ist $b = 5$.
Zur Prüfung, ob die Gerade g das Dreieck $S_1N_1N_2$ halbiert, benötigen wir den Schnittpunkt der Geraden mit der x–Achse, der sich zu $N_3(2{,}5|0)$ ergibt. Wir berechnen nun die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$ mit $\overline{N_1N_2}$ als Basis und $\overline{OS_1}$ als Höhe. Der Vergleich der beiden Flächen zeigt, ob die Gerade g die Fläche $S_1N_1N_2$ halbiert.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$:

S_1: $S_1(0|5)$ | y-Achsenabschnitt von p_1.

p_2: $y = (x-3)^2 - 4$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_2(3|4)$

$y = x^2 - 6x + 5$

N_1 und N_2:

$x^2 - 6x + 5 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$

$x_1 = 5; \quad x_2 = 1$

$N_1(1|0); \quad N_2(5|0)$

$A_{S_1N_1N_2}$:

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

g: $g = \overline{N_1N_2} = (x_{N_2} - x_{N_1}) = 5 - 1 = 4$

h_g: $h_g = \overline{OS_1} = (y_{S_1} - y_O) = 5 - 0 = 5$

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10\ FE$

Die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$ ist $10\ FE$ groß.

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ | $+\frac{1}{2}x^2;\ -5$

$x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 6x = 02$

$\frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$

$x\left(\frac{3}{2}x - 6\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\frac{3}{2}x - 6 = 0 \quad | \quad \cdot 2$
$3x - 12 = 0 \quad | \quad +12$
$3x = 12 \quad | \quad :3$
$x_2 = 4$
$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 5 = 5$
$S_1(0|5)$
$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 5 = -8 + 5 = -3$
$P(4|-3)$

Geradengleichung g durch S_1 und P:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_p - x_{S_1}} = \frac{-3-5}{4-0} = \frac{-8}{4} = -2$

b: Wegen $S_1(0|5)$ ist $b = 5$.
$y = -2x + 5$

Schnittpunkt von g mit der x–Achse:

N_3: $0 = -2x + 5$
$2x = 5$
$x_3 = 2{,}5$
$N_3(2{,}5|0)$

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$:

$A_{S_1N_1N_3}$: $A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
$g = \overline{N_1N_3} = (x_{N_3} - x_{N_1}) = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$
$h_g = \overline{OS_1} = (y_{S_1} - y_O) = 5 - 0 = 5$
$A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 3{,}75 \ FE$
$\frac{A_{S_1N_1N_3}}{A_{S_1N_1N_2}} = \frac{3{,}75}{10} \neq \frac{1}{2}$

Die Gerade g halbiert die Fläche $A_{S_1N_1N_2}$ nicht.

Lösung W4a/2013

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs":

Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf. Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also $P(6_B) = \frac{2}{6}$.

Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens" erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, den „mindestens eine Sechs" ist dasselbe wir $1 -$ „keine Sechs". Keine Sechs bei Würfel A ist $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$.

Erwartungswert:

Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch" bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5;5\}$ und $\{6;6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.

Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A durch eine „Sechs":
Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5–er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6–er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

<u>Klausuraufschrieb</u>

$P(6_A) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$

$P(6_B) = \frac{2}{6}$ $\qquad P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$

$P(mindestens\ 1\ Sechs) = 1 - P(keine\ Sechs)$

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $44{,}4\ \%$.

Erwartungswert:

$P(Pasch) = P\{(5;5),(6;6)\} = P(5;5) + P(6;6)$

$P(5;5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\qquad P(6;6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(Pasch) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(Gewinn)$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{12}$ €	$-\frac{11}{12}$ €
EX	$\frac{8}{12}$ € $- \frac{11}{12}$ € $= -\frac{3}{12}$ € $= -0{,}25$ €	

Der Erwartungswert ist $EX = -0{,}25$.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A

Es ist nur noch das Ereignis $\{6;6\}$ möglich.

$P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Gewinn) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{9}$ €	$-\frac{8}{9}$ €
EX	$\frac{8}{9}$ € $- \frac{8}{9}$ € $= 0$ €	

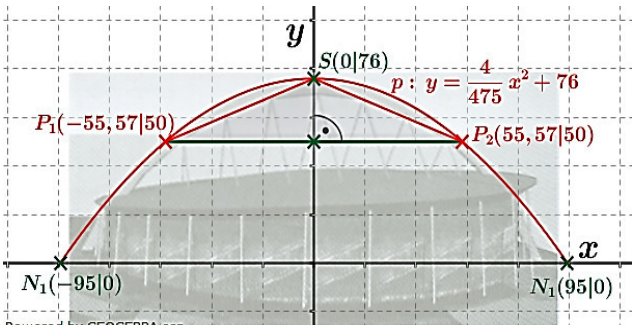
Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf" bei Würfel A ist 0, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4b/2013

Lösungslogik

Grüne Linie und Punkte sind gegeben.
Rote Linien sind gesucht.
Der Bogen der Arena entspricht einer nach unten geöffneten, in x–Richtung nicht verschobenen Parabel. Die allgemeine Gleichung dieser Parabel lautet $y = ax^2 + c$.



Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Scheitel dieser Parabel bei $S(0|76)$ liegt, also ist $c = 76$. Weiterhin geht aus der Aufgabenstellung hervor, dass diese Parabel die x–Achse in $N_1(-95|0)$ und $N_2(95|0)$ schneidet.
Wir machen eine Punktprobe mit N_2 (alternativ N_1) und bestimmen damit den Koeffizienten a der Parabelgleichung.
Die Koordinaten des Punktes P ermitteln wir, indem wir die Gerade g mit $y = 50$ mit der Parabel schneiden. Die Entfernung von P bis zum höchsten Punkt S (=Scheitelpunkt) berechnen wir dann über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p:

p: $y = ax^2 + c$

$c = 76$	|	wegen $S(0\|76)$ höchster Punkt
$N_1 = (-95\|0)\ \ N_2 = (95\|0)$	|	wegen unterer Breite
$0 = a \cdot 95^2 + 76$	|	Punktprobe mit N_2
$a = -\frac{76}{95^2} = -\frac{4}{475}$		

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet $y = -\frac{4}{475}x^2 + 76$

Entfernung des Punktes P vom höchsten Punkt des Bogens:

P: $y_p = 50$

$-\frac{4}{475}x^2 + 76 = 50$	|	$\cdot 475$
$-4x^2 + 475 \cdot 76 = 475 \cdot 50$	|	$-475 \cdot 60$
$-4x^2 = 475 \cdot (50 - 76) = 475 \cdot (-26)$	|	$:(-4)$
$x^2 = \frac{475 \cdot 26}{4}$	|	$\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 55{,}57$		
$P_1(-55{,}57\|50);\quad P_2(55{,}57\|50)$		

$\overline{P_2S}$: $\overline{P_2S} = \sqrt{\left(x_{P_2} - x_S\right)^2 + \left(y_{P_2} - y_S\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{(55{,}57 - 0)^2 + (50 - 76)^2} \approx 61{,}35$

Der Punkt P ist $61{,}35\,m$ vom höchsten Punkt des Bogens entfernt.

Aufgabe W1a/2014

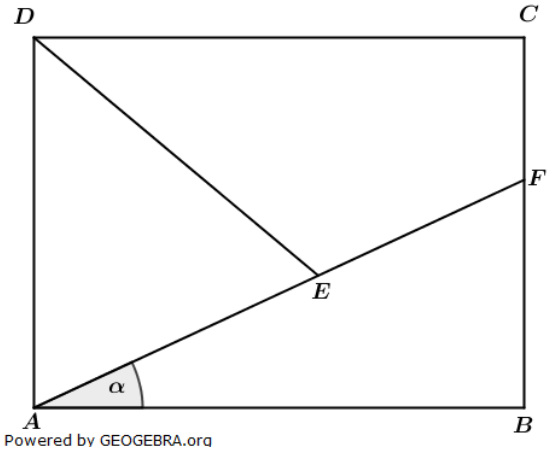
Im Rechteck $ABCD$ sind gegeben:

$\overline{AD} = 6{,}8\ cm$
$\overline{BF} = 4{,}2\ cm$
$\alpha = 25{,}0°$
$\overline{AD} = \overline{DE}$

Berechnen Sie die Länge $\overline{CE}$.

Lösung: $\overline{CE} = 5{,}8\ cm$

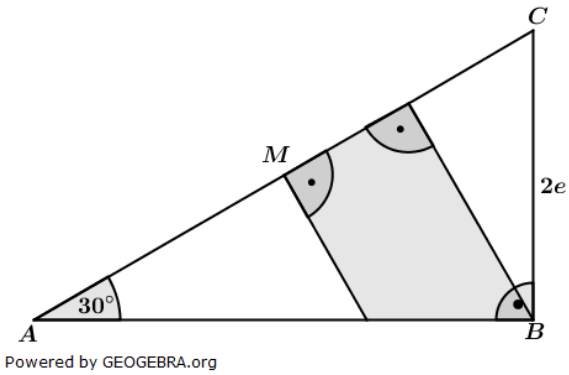
Tipp: Kosinussatz für $\overline{CE}$.



Aufgabe W1b/2014

Gegeben ist das Dreieck ABC. M ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$.
Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass für den Flächeninhalt des eingefärbten Vierecks gilt:

$$A = \frac{5}{6}e^2\sqrt{3}.$$

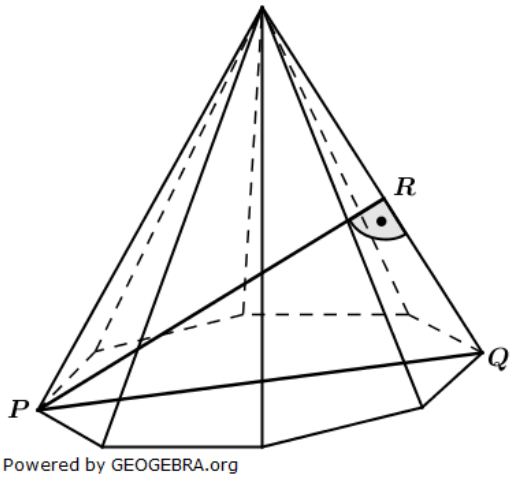


Aufgabe W2a/2014

Eine regelmäßige achtseitige Pyramide hat die Grundkante $a = 12{,}0\ cm$
Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.
Diese Pyramide hat das Volumen $V = 836\ cm^3$. Berechnen Sie die Länge $\overline{PR}$.

Tipp: Kosinussatz für Seitenkante der acht gleichseitigen Dreiecke der Grundfläche, trigonometrischer Flächeninhalt eines Dreiecks für Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide.

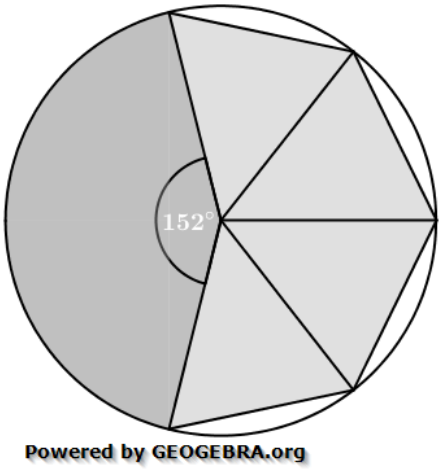
Lösung: $\overline{PQ} = 31{,}4\ cm$
$\overline{PR} = 28{,}8\ cm$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W2b/2014

Aus einer Kreisfläche werden die Mantelflächen einer quadratischen Pyramide und eines Kegels ausgeschnitten. Der Kreis hat den Radius $r = 20\ cm$.
Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.



Lösung: $h_{Pyr} = 15{,}7\ cm$
$h_{Keg} = 18{,}1\ cm$
$\Delta h = 2{,}4 cm$

Tipp: Kosinussatz für Pyramidenkante a.

Aufgabe W3a/2014

Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p_1 gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		3		3		

Geben Sie die Gleichung der Parabel p_1 an und vervollständigen Sie die Wertetabelle.
Eine Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$. Zeichnen Sie die beiden Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Eine Parabel p_3 hat die Gleichung $y = ax^2$. Geben Sie einen möglichen Wert für den Faktor a an, sodass p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat. Überprüfen Sie durch Rechnung.

Lösung: p_1: $y = x^2 + 2x + 3$
$p_3 = \frac{1}{2}x^2$ (andere Lösungen möglich)

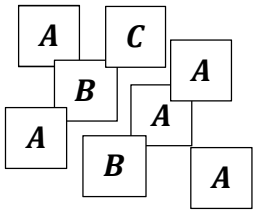
Aufgabe W3b/2014

Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 + px - 1$ geht durch den Punkt $A(-1|2)$.
Eine weitere Parabel p_2 mit der Gleichung $y = -x^2 + c$ verläuft ebenfalls durch den Punkt A.
Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt B der beiden Parabeln.
Die Parabel p_1 hat den Scheitel S_1, die Parabel p_2 hat den Scheitel S_2.
Luca behauptet: „Die Gerade S_1B ist parallel zur Geraden S_2A."
Hat Luca Recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Lösung: p_1: $y = x^2 - 2x - 1$
p_2: $y = -x^2 + 3$
$B(2|-1)$

Aufgabe W4a/2014

Acht gleich große Karten sind mit den Buchstaben A, B und C beschriftet. Die Karten liegen so auf dem Tisch, dass die Buchstaben nicht sichtbar sind. Es werden zwei Karten gleichzeitig gezogen.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen?
- Die Karten sollen für ein Glücksspiel verwendet werden. Untenstehende Gewinnpläne werden geprüft. Für welchen Gewinnplan soll sich der Betreiber entscheiden? Begründen Sie Ihre Aussage.

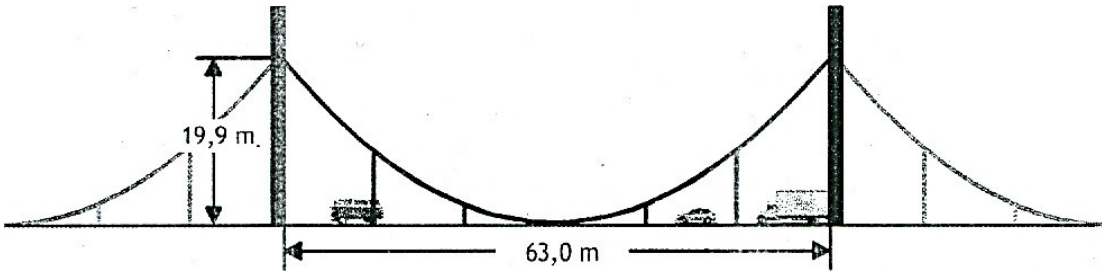
Ergebnis der Ziehung	***Gewinnplan 1***	***Gewinnplan 2***
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	5,00 €
De Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	3,00 €
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 2,50 €		

Lösung: $P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 *entscheiden.*

Aufgabe W4b/2014

Die Abbildung zeigt eine Brücke, deren Tragseile annähernd die Form einer Parabel haben.



a) Erstellen Sie die Gleichung der zugehörigen Parabel.

b) Zwischen den Säulen (Pylonen) im mittleren Bereich der Brücke befinden sich acht Stahlseile (vier auf jeder Fahrbahnseite). Sie verlaufen in gleich großen Abständen senkrecht zur Fahrbahn. Berechnen Sie die Gesamtlänge dieser acht Stahlseile im mittleren Brückenabschnitt.

Lösungen: p: $y = 0{,}02x^2$

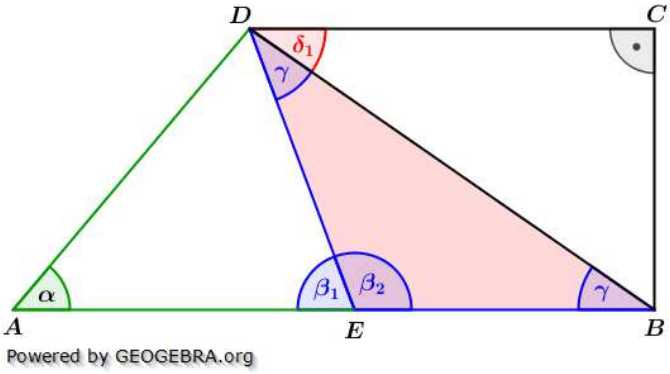
Seillänge $l = 44{,}1\ m$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2014

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{ED} = \overline{EB}$ über den Kosinussatz.
Berechnung von β_1 über den Sinussatz.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\gamma = \delta_1$ im gleichschenkligen Dreieck EBD (δ_1.und γ sind Wechselwinkel).



Berechnung der Fläche des Dreiecks EBD über den trigonometrischen Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$\overline{ED}$: $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot cos\alpha$ | Kosinussatz

$\overline{ED} = \sqrt{7{,}8^2 + 8{,}4^2 - 2 \cdot 7{,}8 \cdot 8{,}4 \cdot cos50°} = 6{,}868$

β_1: $\frac{sin\beta_1}{\overline{AD}} = \frac{sin\alpha}{\overline{ED}}$ | Sinussatz

$sin\beta_1 = \frac{\overline{AD} \cdot sin\alpha}{\overline{ED}} = \frac{8{,}4 \cdot sin50°}{6{,}868} = 0{,}93692$

$\beta_1 = sin^{-1}(0{,}93692) = 69{,}54\,°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 69{,}54° = 110{,}46°$

γ: $\gamma = \frac{180° - \beta_2}{2} = \frac{180\,° - 110{,}46°}{2} = 34{,}77\,°$

δ_1: $\delta_1 = \gamma = 34{,}77$

A_{EBD}: $A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED}^2 \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

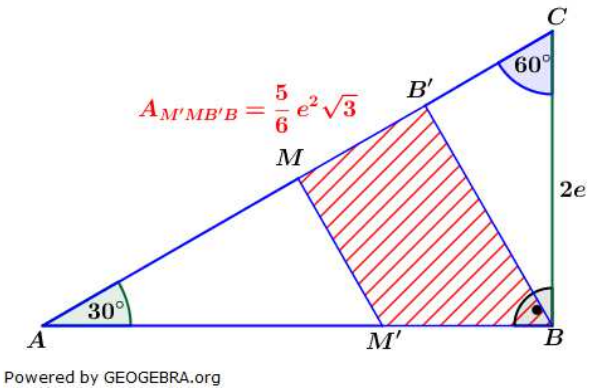
$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}868^2 \cdot sin110{,}46° = 22{,}096$

Der Winkel δ_1 hat $34{,}8\,°$, die Fläche des Dreiecks EBD beträgt $22{,}1\ cm^2$.

Lösung W1b/2014

Lösungslogik

Berechnung $\sphericalangle ACB$ als Ergänzungswinkel zu $90\,°$ im Dreieck ABC.
Berechnung von $\overline{AC}$ über $sin30°$, daraus $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Berechnung $\overline{MM'}$ über $tan\,30°$.
Berechnung $\overline{BB'}$ über $sin\,60°$.
Berechnung $\overline{AB}$ über $tan\,30°$.
Berechnung der Fläche der Dreiecke ABC, $AM'M$ und BCB'.
Fläche des Vierecks $M'MB'B$ ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC abzüglich der Fläche der Dreiecke $AM'M$ und BCB'.



Klausuraufschrieb

$A_{Viereck} = A_{ABC} - A_{BCB'} - A_{AM'M}$

$\overline{AC}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = sin30° \Longrightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{sin30°} = \frac{2e}{0{,}5} = 4e$

$\overline{AM}$: $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 2e$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = tan30° \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan30°} = \frac{2e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = 2e\sqrt{3}$

$\overline{MM'}$: $\frac{\overline{MM'}}{\overline{AM}} = tan30° \Longrightarrow \overline{MM'} = \overline{AM} \cdot tan30° = 2e \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$

$\overline{BB'}$: $\frac{\overline{BB'}}{\overline{BC}} = sin60° \Longrightarrow \overline{BB'} = \overline{BC} \cdot sin60° = 2e \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{B'C}$: $\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}} = cos60° \Longrightarrow \overline{B'C} = \overline{BC} \cdot cos60° = 2e \cdot \frac{1}{2} = e$

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2e\sqrt{3} \cdot 2e = 2e^2\sqrt{3}$

$A_{AM'M}$: $A_{AM'M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MM'} = \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{2}{3}e\sqrt{3} = \frac{2}{3}e^2\sqrt{3}$

$A_{BCB'}$: $A_{BCB'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{B'C} = \frac{1}{2} \cdot e\sqrt{3} \cdot e = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3}$

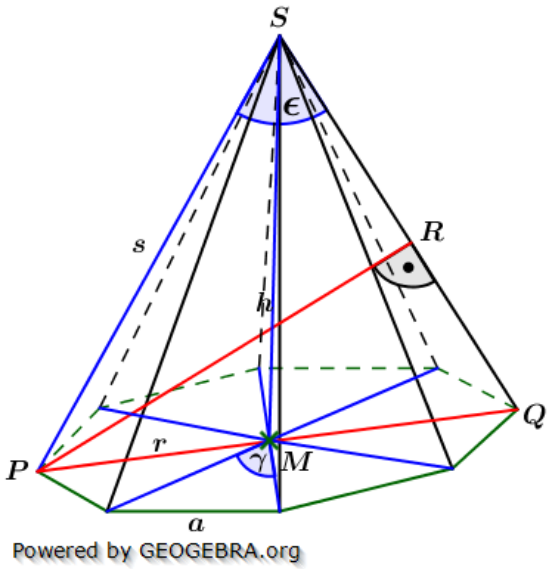
$A_{Viereck} = 2e^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} - \frac{2}{3}e^2\sqrt{3} = \frac{5}{6}e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W2a/2014

Lösungslogik

Die Grundfläche der regelmäßigen achteckigen Pyramide lässt sich in acht gleichschenklige Dreiecke unterteilen mit der Grundseite a und den Seitenkanten r (siehe Formelsammlung). Hieraus bestimmt sich der Scheitelwinkel γ dieser Dreiecke aus $\gamma = \frac{360°}{8} = 45°$. Über den Kosinussatz lässt sich nun die Seitenlänge r eines solchen Dreiecks berechnen. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist dann $2r$ lang.
Zur Berechnung der Strecke $\overline{PR}$ benötigen wir zuerst die Höhe h und die Seitenkante s der Pyramide sowie den Spitzenwinkel ϵ.



Für die Berechnung von h benötigen wir den Flächeninhalt der Grundfläche aus acht gleichseitigen Dreiecken. Die Dreiecksfläche errechnet sich mithilfe des trigonometrischen Flächeninhalts.
Mithilfe der nun bekannten Höhe h der Pyramide und Seitenkante r des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche lässt sich s über den Satz des Pythagoras und der halbe Winkel ϵ über den tan ermitteln. Letztendlich berechnen wir dann die Strecke $\overline{PR}$ aus s und dem Winkel ϵ über den sin.

Klausuraufschrieb

$\overline{PQ}$: $\overline{PQ} = 2 \cdot r$

r: $a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$a^2 = 2r^2(1 - cos\gamma) \Longrightarrow r^2 = \frac{a^2}{2(1-cos\gamma)}$

$r = \sqrt{\frac{a^2}{2(1-cos\gamma)}}$

γ: $\gamma = \frac{360°}{8} = 45°$

$r = \sqrt{\frac{12^2}{2(1-cos45°)}} = 15{,}6787$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 15{,}6787 = 31{,}3575$

Die Strecke $\overline{PQ}$ ist $31{,}4\ cm$ lang.

$\overline{PR}$: $\frac{\overline{PR}}{s} = sin\epsilon \Longrightarrow \overline{PR} = s \cdot sin\epsilon$

s: $s^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow s = \sqrt{h^2 + r^2}$ | Satz des Pythagoras

h: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Longrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{G}$

G: $G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\gamma$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 4 \cdot 15{,}6787^2 \cdot sin45° = 695{,}2886$

$h = \frac{3 \cdot 8346}{695{,}2886} = 36{,}01$

$s = \sqrt{36{,}01^2 + 15{,}6787^2} = 39{,}2752$ | Satz des Pythagoras

ϵ: $tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{r}{h} = \frac{15{,}6787}{36{,}01} = 0{,}4354$

$\frac{\epsilon}{2} = tan^{-1}(0{,}4354) = 23{,}53°$

$\epsilon = 47{,}06°$

$\overline{PR} = 39{,}2752 \cdot sin(47{,}06°) = 28{,}75$

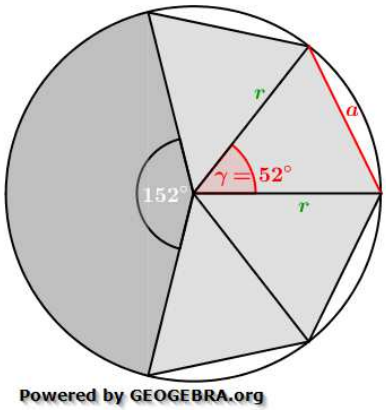
Die Strecke $\overline{PR}$ ist $28{,}8\ cm$ lang.

Lösung W2b/2014

Lösungslogik

Die quadratische Pyramide hat die Seitenkante $s = r$. Der Spitzenwinkel eines Seitendreiecks berechnet sich aus $\gamma = \frac{360°-152°}{4}$.

Über den Kosinussatz können wir nun die Länge der Seitenkante a ermitteln. Die Höhe der Pyramide errechnet sich dann mithilfe des Satz des Pythagoras über die Seitenkante s und der halben Diagonale der quadratischen Grundfläche. Der Kegelmantel hat einen Öffnungswinkel von $152\,°$. Der Kreisbogen dieses Öffnungswinkels errechnet sich aus $b = \frac{360°}{152°} \cdot r$, diese Bogenlänge wird zum Kreisumfang des Grundkreises des Kegels. Hieraus lässt sich r_{Keg} errechnen. Die Höhe des Kegels bestimmt sich dann über den Satz des Pythagoras aus $s = r$ und r_{Keg}.



Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = \frac{360°-152°}{4} = 52°$

a: $a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$a^2 = 400 + 400 - 800 \cdot cos52° = 307{,}47$ | $\sqrt{\ }$

$a = 17{,}53$

d_{Pyr}: $d_{Pyr} = a \cdot \sqrt{2} = 17{,}53 \cdot \sqrt{2} = 24{,}798$

h_{Pyr}: $h_{Pyr}^2 = s^2 - \left(\frac{d_{Pyr}}{2}\right)^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{400 - 153{,}7354} = 15{,}6928$

Die Höhe der Pyramide ist etwa $15{,}7\ cm$ lang.

b: $b = \frac{152°}{360°} \cdot 2\pi r = 53{,}06$

r_{Keg}: $2\pi \cdot r_{Keg} = b$

$r_{Keg} = \frac{b}{2\pi} = \frac{53{,}06}{2\pi} = 8{,}44$

h_{Keg}: $h_{Keg}^2 = s^2 - r_{Keg}^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{20^2 - 8{,}44^2} = 18{,}13$

Die Höhe des Kegels ist etwa $18{,}1\ cm$ lang.

Δh: $\Delta h = h_{Keg} - h_{Pyr} = 18{,}1 - 15{,}7 = 2{,}4$

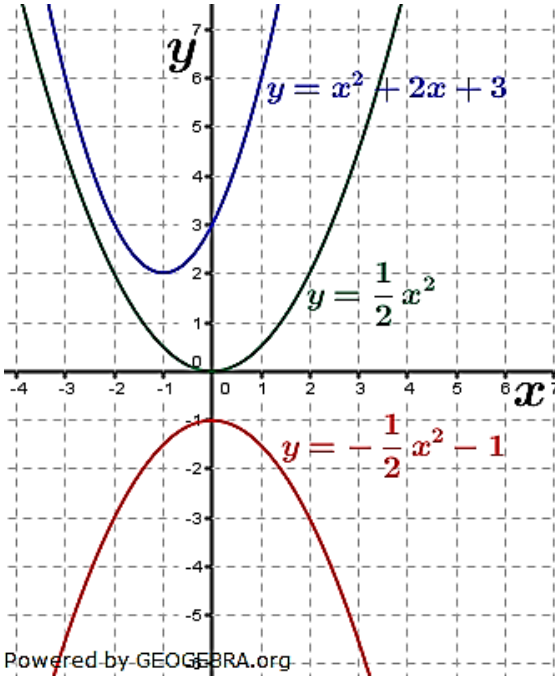
Die Differenz der Körperhöhen beträgt $2{,}4\ cm$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2014

Lösungslogik

Aus der gegebenen Tabelle erkennen wir, dass der y–Wert 3 sowohl für $x = -2$ als auch für $x = 0$ gilt. Die Symmetrieachse der Parabel muss somit in der Mitte von $x = -2$ und $x = 0$ liegen, also bei $x = -1$.
Wir stellen die Scheitelpunktgleichung mit $y = (x+1)^2 + c$ auf.
Die Punktprobe mit z.B. $Q(0|3)$ führt dann zur Gleichung der Parabel, mit der dann die Wertetabelle vollständig ausgefüllt werden kann.
Die nebenstehende Grafik zeigt die Parabeln p_1, p_2 und p_3.
Nachdem p_1 und p_2 eingezeichnet sind, erkennen wir leicht, dass eine Parabel zwischen den beiden eingezeichneten Parabeln keine Schnittpunkte mit diesen hat. Dies ist z.B. die Parabel mit $y = \frac{1}{2}x^2$, was dann mit Rechnung überprüfbar ist.



Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p_1:

Wegen der beiden gegebenen Punkte $P(-2|3)$ und $Q(0|3)$ liegt die Symmetrieachse der Parabel bei $x = -1$.

p_1: $y = (x+1)^2 + c$

$3 = (0+1)^2 + c$ | Punktprobe mit $Q(0|3)$ (aus Wertetabelle)

$c = 2$

Die Gleichung der Parabel lautet: $y = (x+1)^2 + 2$ *bzw.* $y = x^2 + 2x + 3$.

Vervollständigte Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	3	4	11

Funktionsgleichung p_3 ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

p_3: z. B. $y = \frac{1}{2}x^2$

Schnittpunkte von p_1 mit p_3:

$p_1 \cap p_3$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2$ | $-\frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ | $\cdot 2$

$x^2 + 4x + 6 = 0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6}$ | p/q-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D =< 0$.

Schnittpunkte von p_2 mit p_3:

$p_2 \cap p_3$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$ | $+\frac{1}{2}x^2$

$x^2 = -1$

$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D < 0$.

Lösung W3b/2014

Lösungslogik

Punktproben mit $A(1|2)$ führen zur vollständigen Parabelgleichungen p_1 und p_2. Schnittpunkt B der beiden Parabeln über Gleichsetzung der beiden Gleichungen. Scheitelpunktbestimmung von p_1 und p_2 mit anschließender Steigungsberechnung der Geraden S_1B und S_2A beweisen Lucas Aussage.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichungen Parabeln p_1 und p_2:

p_1: $y = x^2 + px - 1$

$2 = 1 - p - 1$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$

$p = -2$

$y = x^2 - 2x - 1$

p_2: $y = -x^2 + c$

$2 = -1 + c$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$

$c = 3$

$y = -x^2 + 3$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 3$ | $+x^2;\ -3$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$ | $:2$

$x^2 - x - 2 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5$

$x_1 = 2;\ x_2 = -1$

$y_1 = -2^2 + 3 = -1$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(2|-1)$.

Scheitelpunkte S_1 und S_2 von p_1 und p_2:

S_1: $y = (x-1)^2 - 2$ | Scheitelpunktform von p_1

$S_1(1|-2)$

S_2: $S_2(0|3)$ | aus Gleichung ablesbar

Steigung der Geraden durch S_1 und B:

m_{S_1B}: $m = \frac{y_B - y_{S_1}}{x_B - x_{S_1}} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = 1$

Steigung der Geraden durch S_2 und A:

m_{S_2A}: $m = \frac{y_A - y_{S_2}}{x_A - x_{S_2}} = \frac{2-3}{-1-0} = 1$

Wegen $m_{S_1B} = m_{S_2A}$ hat Luca Recht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2014

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A;B)$, $P(B;A)$, $P(B;C)$, $P(C;B)$, $P(A;C)$ und $P(C;A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$.
Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Klausuraufschrieb

$P(A;A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$; $\quad P(B;B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$; $\ P(C;C) = 0$

$$P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = 1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$$
$$= 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$$

Erwartungswerte:

$$P(zwei\ gleichen\ Buchstaben) = \frac{22}{56}$$

$$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = P(A;C) + P(C;A) + P(B;C) + P(C;B)$$

$P(A;C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}$, $P(C;A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56}$, $P(B;C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$, $P(C;B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$

$$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = \frac{14}{56}$$

Gewinnplan 1

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-0{,}50$ €	$-2{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}20$ €	$-0{,}62$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}20\ € - 0{,}62\ € + 0{,}89\ € = 0{,}07\ €$		

Gewinnplan 2

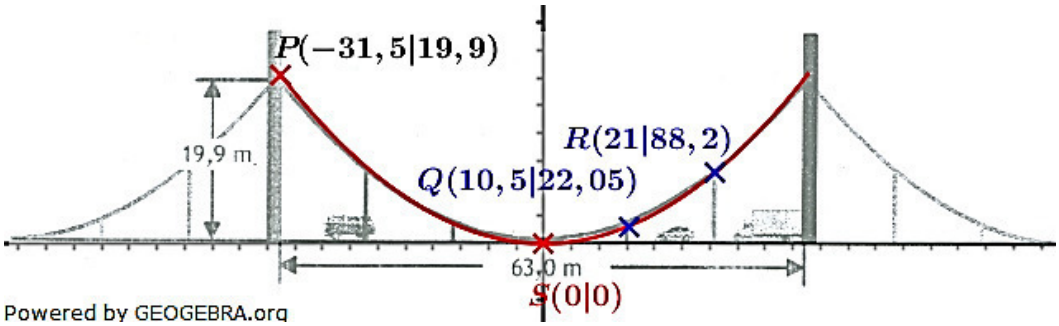
	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-2{,}50$ €	$-0{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}98$ €	$-0{,}12$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}98\ € - 0{,}12\ € + 0{,}89\ € = -0{,}21\ €$		

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen Gewinn pro Spiel erzielt.

Lösung W4b/2014

Lösungslogik

a) Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels sowie einem Aufhängepunkt des Seils am linken (oder rechten) Pylon. Mithilfe dieser Punkte kann die nach oben geöffnete Parabel mittels einer Gleichung beschrieben werden.



b) Die Gesamtbreite zwischen den Pylonen beträgt $63\,m$ und ist in Bezug auf die Drahtseile in sechs gleiche Strecken unterteilt. Somit haben die Tragseile einen Abstand von jeweils $10{,}50\,m$. In der Mitte (Scheitelpunkt) befindet sich kein Tragseil. Da die Parabel symmetrisch zur y–Achse ist, benötigen wir für die Länge der Seile lediglich die Länge des kurzen sowie des langen Seils auf der rechten Seite. Diese Längen mal 4 ergibt dann die Gesamtlänge der Seile.

Klausuraufschrieb

a) Scheitelpunkt der Parabel: $S(0|0)$, linker Aufhängepunkt (Pylon) $P(-31{,}5|19{,}9)$. Gleichung einer nach oben geöffnete Parabel im Scheitelpunkt $S(0|0)$ ist

p: $y = ax^2$ | Punktprobe mit P:

$19{,}9 = a \cdot (-31{,}5)^2 \Longrightarrow a = \frac{19{,}9}{(-31{,}5)^2} = 0{,}02$

Die Gleichung der Parabel lautet $y = 0{,}02 \cdot x^2$

b) *Anzahl kurzer Tragseile:* 4*, Anzahl langer Tragseile:* 4

Abstand kurzes Tragseil vom Ursprung: $10{,}5\,m$

Abstand langes Tragseil vom Ursprung: $21\,m$

Länge kurzes Tragseil $l_{kurz} = 0{,}02 \cdot 10{,}5^2 = 2{,}205\,m$

Länge langes Tragseil $l_{lang} = 0{,}02 \cdot 21^2 = 8{,}82\,m$

Gesamtlänge Seile: $l_{gesamt} = 4 \cdot (l_{kurz} + l_{lang}) = 4 \cdot (2{,}205 + 8{,}82) = 44{,}1\,m$

Die Gesamtlänge der Seile beträgt $44{,}1\,m$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2015

Im Trapez $ABCD$ gilt:

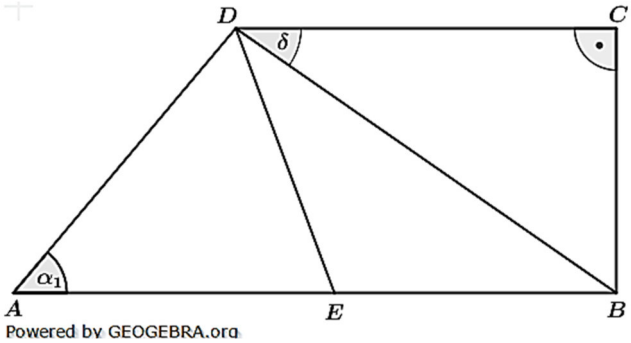
$\overline{AD} = 8{,}4\ cm$

$\overline{AE} = 7{,}8\ cm$

$\alpha = 50{,}0°$

$\overline{BE} = \overline{DE}$

Berechnen Sie den Winkel δ_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBD.



Lösung: $\delta_1 = 34{,}8\,°$

$A_{EBD} = 22{,}1\ cm^2$

Tipp: Kosinussatz für $\overline{ED}$, Sinussatz für $\sphericalangle AED$, trigonometrischer Flächeninhalt für Dreieck EBD.

Aufgabe W1b/2015

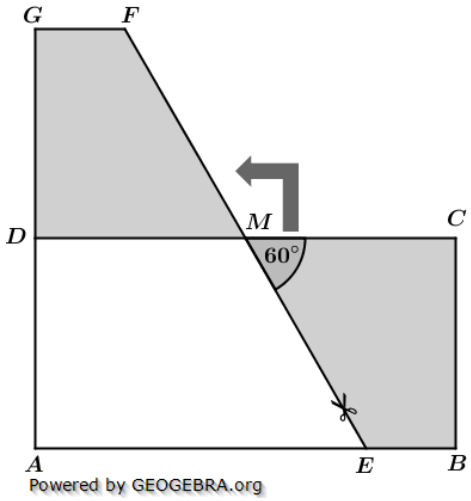
Von einem rechteckigen Blatt Papier wird entlang der gestrichelten Linie ein Stück abgeschnitten und an anderer Stelle angelegt (siehe Skizze).

Es gilt:

$\overline{AB} = 6e;\ \overline{BC} = 3e.$

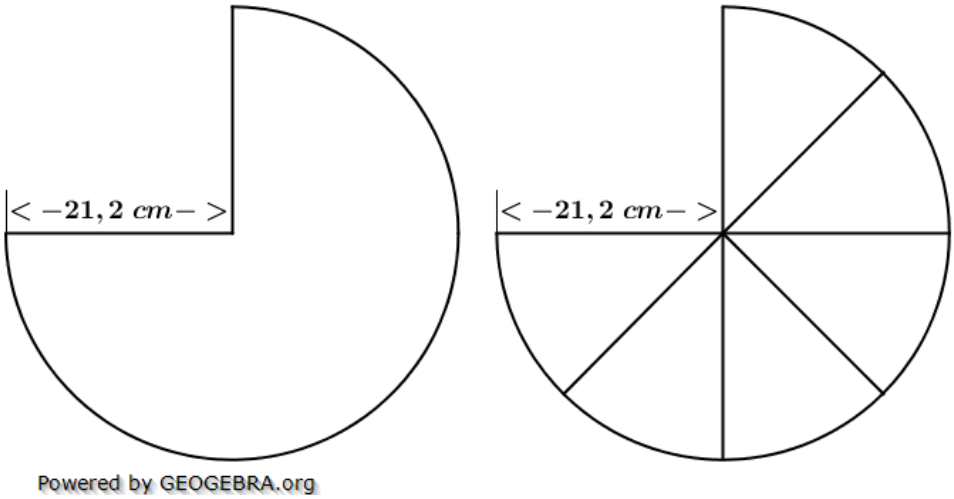
M ist der Mittelpunkt von $\overline{CD}$.

Bea behauptet: „Das Viereck $AEFG$ hat den gleichen Umfang wie das Rechteck $ABCD$."
Hat Bea Recht? Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch eine Argumentation.



Aufgabe W2a/2015

Gegeben sind zwei Dreiviertelkreise. Aus ihnen werden der Mantel eines Kegels und der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide gefertigt.



Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.

Lösung: $h_{Kegel} = 14{,}02\ cm$

$h_{Pyramide} = 13{,}64\ cm$

Aufgabe W2b/2015

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecks-prisma und einem halben Kegel (siehe Grafik rechts).

Es gilt:

$\overline{AC} = \overline{BC}$

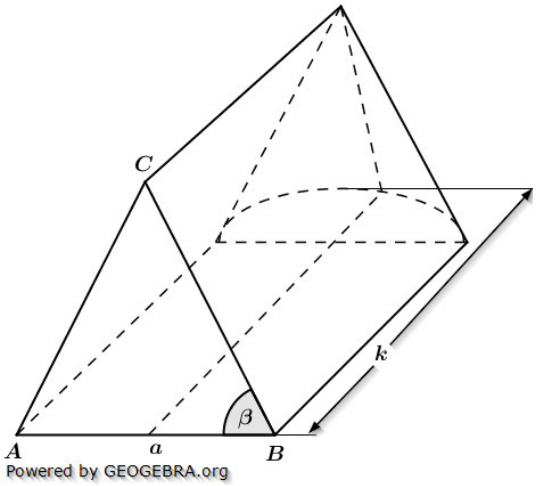
$\overline{AB} = 11{,}4\ cm$

$\beta = 62\,°$

$V_{ges} = 1280\ cm^3$ (Volumen des zusammengesetzten Körpers)

Berechnen Sie die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $k = 23{,}66\ cm$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3a/2015

Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6			3	

- Geben Sie die Gleichung der Parabel p an.
- Vervollständigen Sie die Wertetabelle.
- Eine Gerade g hat die Steigung $m = -1$ und geht durch den Punkt $P(-2{,}5|6)$. Weisen Sie rechnerisch nach, dass p und g keine gemeinsamen Schnittpunkte haben.
- Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und geht durch den Scheitelpunkt von p. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der x–Achse.

Lösung: $R(5|0)$; $h = -x + 5$

Aufgabe W3b/2015

Eine Parabel p_1 der Form $y = ax^2 + c$ mit dem Scheitelpunkt $S_1(0|4{,}5)$ schneidet die x–Achse in den Punkten $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(3|1{,}5)$.

- Die beiden Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt T. Berechnen Sie die Koordinaten von T.
- Die Punkte N_1, N_2 und T bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T.
- Der Punkt T bewegt sich auf der Parabel p_1 oberhalb der x-Achse. Für welche Lage von T wird der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T am größten? Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch eine Argumentation.

Lösung: $T(2|2{,}5)$; Dreieck N_1N_2T hat $A = 7{,}5\ FE$
Maximaler Flächeninhalt für $T^*(0|4{,}5)$

Aufgabe W4a/2015

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
♣	♠	♥	♦
Kreuz	Pik	Herz	Karo
Anzahl			
6	1	2	3

- Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

  Lösung: $P(rot\ und\ schwarz) = 53{,}03\%$

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

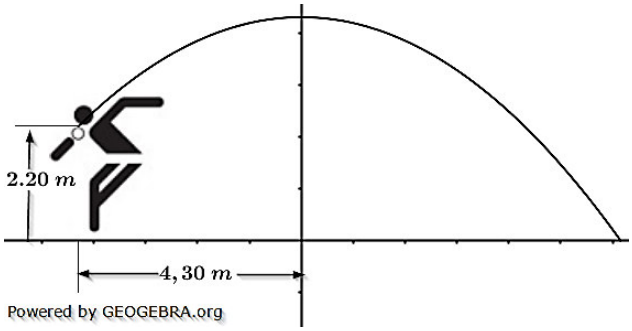
Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

- Berechnen Sie den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo" auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

  Lösung: $E(X) = 0{,}62$ €; $E(X)_2 = 0{,}47$ €; *der Spielebetreiber hat nicht Recht.*

Aufgabe W4b/2015

David und Tom messen sich im Kugelstoßen. Beim Stoß von David verlässt die Kugel seine Hand in einer Höhe von $2{,}20\,m$ (siehe Skizze).



- Nach einer horizontalen Entfernung von $4{,}30\,m$ hat die Kugel die maximale Höhe $3{,}90\,m$ erreicht.
  Die Flugbahn der Kugel lässt sich annähernd durch eine Parabel mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben. Welche Weite hat David erzielt?
- Tom stößt die Kugel ebenfalls aus dem Stoßkreis. Die Kugel verlässt seine Hand in einer Höhe von $1{,}90\,m$. Die Parabelgleichung für diesen Stoß lautet $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5$. Vergleichen Sie die beiden Kugelstoßweiten.

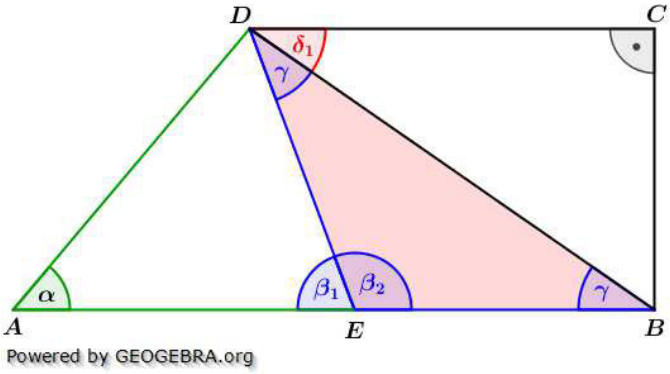
Lösung: David stößt $10{,}81\,m$
Tom stößt $9{,}92\,m$
David stößt um $0{,}89\,m$ weiter als Tom.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2015

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{ED} = \overline{EB}$ über den Kosinussatz.
Berechnung von β_1 über den Sinussatz.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\gamma = \delta_1$ im gleichschenkligen Dreieck EBD (δ_1.und γ sind Wechselwinkel).



Berechnung der Fläche des Dreiecks EBD über den trigonometrischen Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$\overline{ED}$: $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot cos\alpha$ | Kosinussatz

$\overline{ED} = \sqrt{7{,}8^2 + 8{,}4^2 - 2 \cdot 7{,}8 \cdot 8{,}4 \cdot cos50°} = 6{,}868$

β_1: $\frac{sin\beta_1}{\overline{AD}} = \frac{sin\alpha}{\overline{ED}}$ | Sinussatz

$sin\beta_1 = \frac{\overline{AD} \cdot sin\alpha}{\overline{ED}} = \frac{8{,}4 \cdot sin50°}{6{,}868} = 0{,}93692$

$\beta_1 = sin^{-1}(0{,}93692) = 69{,}54\,°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 69{,}54° = 110{,}46°$

γ: $\gamma = \frac{180° - \beta_2}{2} = \frac{180\,° - 110{,}46°}{2} = 34{,}77\,°$

δ_1: $\delta_1 = \gamma = 34{,}77$

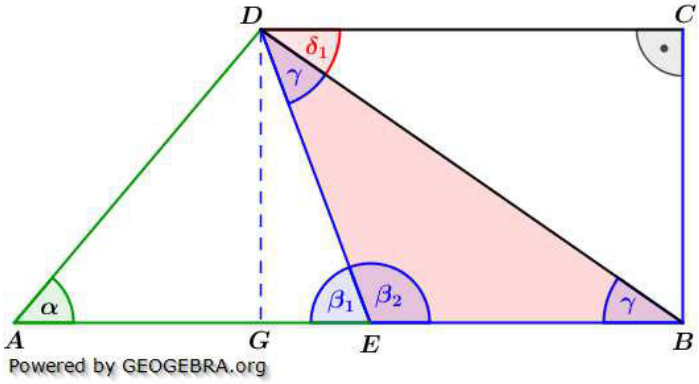
A_{EBD}: $A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED}^2 \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}868^2 \cdot sin110{,}46° = 22{,}096$

Der Winkel δ_1 hat $34{,}8\,°$, die Fläche des Dreiecks EBD beträgt $22{,}1\ cm^2$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{DG} = \overline{BC}$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{GE}$ aus der Differenz von $\overline{AE}$ und $\overline{AG}$.
Berechnung von β_1 über den tan.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.



Berechnung von $\gamma = \delta_1$ im gleichschenkligen Dreieck EBD (δ_1.und γ sind Wechselwinkel).

Berechnung von $\overline{GB}$ über den $\tan\gamma$.
Berechnung von $\overline{EB}$ aus der Differenz von $\overline{GB}$ und $\overline{GE}$.
Berechnung der Fläche A_{EBD} über die Grundseite $\overline{EB}$ und die Höhe $\overline{DG}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{DG}$: $sin\alpha = \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}$ | $\cdot \overline{AD}$

$\overline{DG} = \overline{AD} \cdot sin\alpha = 8{,}4 \cdot sin50° = 6{,}4348$

$\overline{AG}$: $\overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{8{,}4^2 - 6{,}4348^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{DG} = \sqrt{29{,}1533} = 5{,}399$

$\overline{GE}$: $\overline{GE} = \overline{AE} - \overline{AG} = 7{,}8 - 5{,}399 = 2{,}401$

β_1: $\frac{\overline{DG}}{\overline{GE}} = tan\alpha$

$tan\alpha = \frac{6{,}4348}{2{,}401} = 2{,}680$

$\alpha = tan^{-1}(2{,}680) = 69{,}54\,°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 69{,}54° = 110{,}46°$

γ: $\gamma = \frac{180° - \beta_2}{2} = \frac{180\,° - 110{,}46°}{2} = 34{,}77\,°$

δ_1: $\delta_1 = \gamma = 34{,}77$

$\overline{GB}$: $tan\gamma = \frac{\overline{DG}}{\overline{GB}}$ | $\cdot \overline{GB}$; $: tan\gamma$

$\overline{GB} = \frac{\overline{DG}}{tan\gamma} = \frac{6{,}4348}{\tan 34{,}77°} = 9{,}2688$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \overline{GB} - \overline{GE} = 9{,}2688 - 2{,}401 = 6{,}8678$

A_{EBD}: $A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{DG}$ | Die Höhe $\overline{DG}$ liegt außerhalb EBD

$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}8678 \cdot 6{,}4348 = 22{,}096$

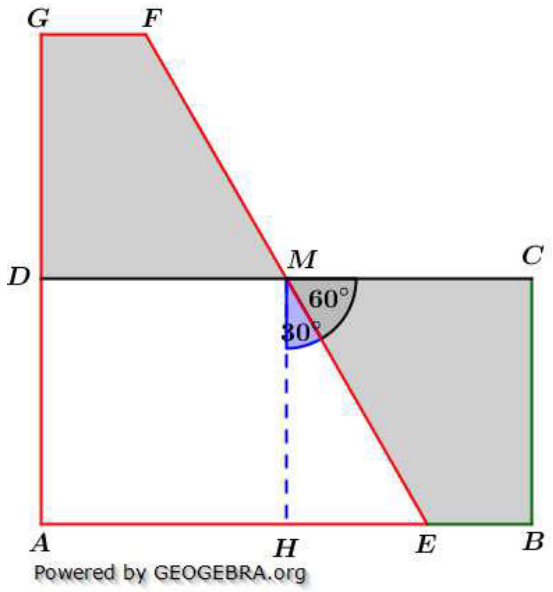
Der Winkel δ_1 hat $34{,}8\,°$, die Fläche des Dreiecks EBD beträgt $22{,}1\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2015

Lösungslogik

Durch eine Argumentation:
Siehe Klausuraufschrieb.
Durch Berechnung:
Der Umfang des Rechtecks $ABCD$ ist:
$2 \cdot (\overline{AB} + \overline{AD})$
Der Umfang des Vierecks $AEFG$ setzt sich zusammen aus den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{DG} = \overline{MD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, $\overline{GF} = \overline{EB}$ $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \overline{HE}$ sowie $2 \cdot \overline{EM}$.
Berechnung $\overline{HE}$ über $tan\ 30°$.
Berechnung $\overline{EM}$ über $cos\ 30°$.
Berechnung des Umfangs des Vierecks $AEFG$.



Klausuraufschrieb

Durch eine Argumentation:
Vom Abschnitt $EBCM$ wird lediglich die Strecke $\overline{EB}$ zur Strecke $\overline{GF}$ und $\overline{BC}$ zu $\overline{DG}$. Nicht mehr enthalten ist somit die Strecke $\overline{DC}$. Es kommt allerdings die Schnittstrecke $\overline{EM}$ zweimal hinzu, also insgesamt die Strecke $\overline{EF}$. Diese ist jedoch länger, als die Strecke $\overline{DC}$.
Bea hat nicht Recht.

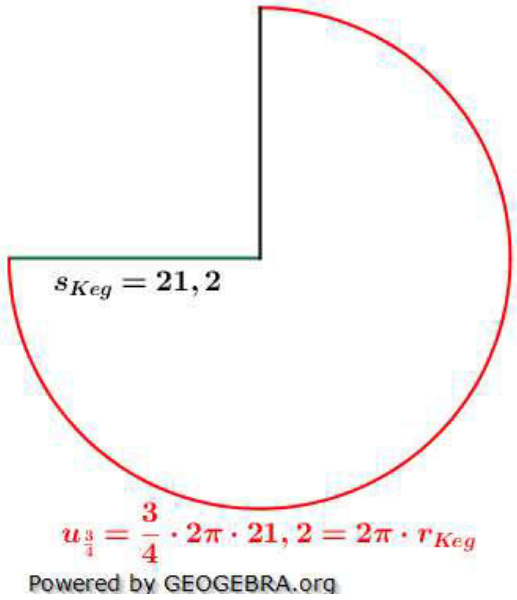
Durch Berechnung:
$u_{ABCD} = 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{AD}) = 2 \cdot (6e + 3e) = 18e$
u_{AEFG}: $u_{AEFG} = \overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FE} + \overline{AE}$
$\overline{AG}$: $\overline{AG} = \overline{AD} + \overline{DG} = 2 \cdot \overline{AD} = 6e$
$\overline{GF}$: $\overline{GF} = \overline{EB} = \overline{HB} - \overline{HE}$ mit $\overline{HB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 6e = 3e$
$\overline{HE}$: $tan\ 30° = \frac{\overline{HE}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{HE}}{3e}$ | $\cdot 3e$
$\overline{HE} = 3e \cdot tan30° = 3e \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}e$
$\overline{GF} = 3e - \sqrt{3}e$
$\overline{FE}$: $\overline{FE} = 2 \cdot \overline{EM}$
$\frac{\overline{HM}}{\overline{EM}} = cos30°$ | $\cdot \overline{EM};\ : cos30°$
$\overline{EM} = \frac{\overline{HM}}{cos30°} = \frac{3e}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}} = 2e \cdot \sqrt{3}$
$\overline{FE} = 4e \cdot \sqrt{3}$
$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 6e - (3e - \sqrt{3}e) = 3e + \sqrt{3}e$
$u_{AEFG} = 6e + 3e - \sqrt{3}e + 4e \cdot \sqrt{3} + 3e + \sqrt{3}e = 12e + 4e \cdot \sqrt{3}$
Wegen $18e \neq 12e + 4e \cdot \sqrt{3}$ *hat Bea nicht Recht.*

Lösung W2a/2015

Lösungslogik

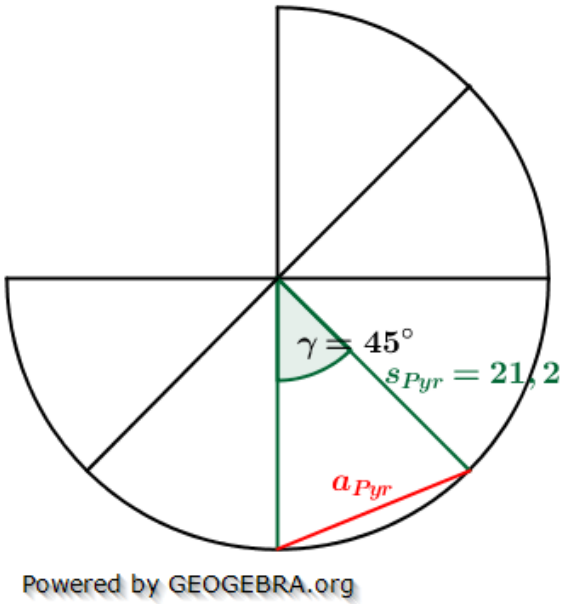
Kegel:

Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge s_{Keg} des Kegels. Die Länge des Kreisbogens des Dreiviertelkreises wird zum Umfang des Grundkreises des Kegels. Über diesen Umfang ermitteln wir den Radius r_{Keg} des Kegels. Mithilfe des Satz des Pythagoras ergibt sich dann die Höhe h_{Keg} des Kegels.



Sechseckpyramide:

Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge s_{Pyr} der Pyramide. Der Spitzenwinkel eines Seitendreicks ergibt sich aus dem Öffnungswinkel des Dreiviertelkreises von $270°$ dividiert durch 6 zu $\gamma = 45°$.
Wir berechnen nun die Seitenkante a_{Pyr} der Pyramide über den $sin\frac{\gamma}{2}$.
Die Grundfläche der Sechseck-pyramide ist ein gleichmäßiges Sechseck. Ein Teildreieck dieses Sechsecks ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen a_{Pyr}. Die Höhe der Pyramide lässt sich nun über den Satz des Pythagoras ermitteln aus
$h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2}$.



Klausuraufschrieb

Kegel:

$s_{Keg} = 21{,}2$

$u_{\frac{3}{4}}$: $\quad u_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 21{,}2 = 99{,}90$

r_{Keg}: $\quad u_{\frac{3}{4}} = 2\pi \cdot r_{Keg} = 99{,}90 \quad | \quad :2\pi$

$\quad r_{Keg} = \frac{99{,}90}{2\pi} = 15{,}9$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = \sqrt{s_{Keg}^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{21{,}2^2 - 15{,}9^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\quad h_{Keg} = \sqrt{196{,}63} = 14{,}02$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Sechseckpyramide:

$s_{Pyr} = 21{,}2$

γ: $\gamma = \frac{270°}{6} = 45°$

a_{Pyr}: $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{s_{Pyr}}$ | $\cdot s_{Pyr}$

$\frac{a_{Pyr}}{2} = s_{Pyr} \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ | $\cdot 2$

$a_{Pyr} = 2 \cdot s_{Pyr} \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 21{,}2 \cdot sin22{,}5° = 16{,}2258$

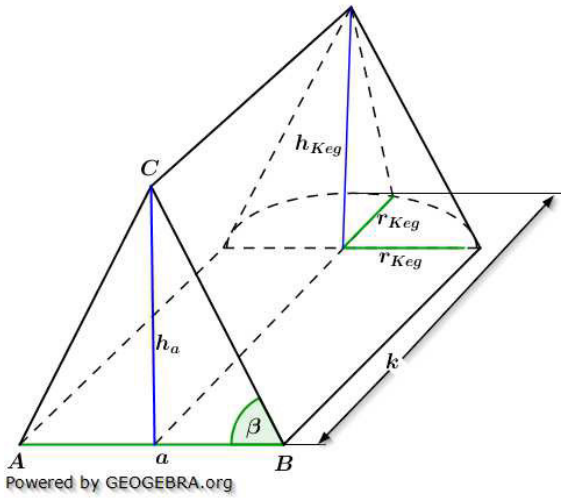
h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2} = \sqrt{21{,}2^2 - 16{,}2258^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{186{,}1634} = 13{,}64$

Lösung W2b/2015

Lösungslogik

Das gegebene Volumen $V_{Körper} = 1280\ cm^3$ setzt sich zusammen aus dem Volumen des Dreiecksprismas zuzüglich dem Volumen des Halbkegels. Der Radius r_{Keg} ist gleich der halben Länge der Kante a. Die Höhe h_a zur Berechnung des Volumens des Dreiecksprismas ermitteln wir über den $tan\beta$. Die Höhe des Dreiecksprismas ergibt sich aus $k - r_{Keg}$.
Zur Berechnung des Volumen des Halbkegels ist $h_{Keg} = h_a$.
Alle erforderlichen Werte sind nun bekannt, wir stellen die Formel für das Gesamtvolumen auf und lösen die Formel nach k auf.



Klausuraufschrieb

$V_{Körper} = 1280 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a.(k - r_{Keg}) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

r_{Keg}: $r_{Keg} = \frac{a}{2} = 5{,}7$

h_a: $tan\beta = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$ | $\cdot \frac{a}{2}$

$h_a = \frac{a}{2} \cdot tan\beta = 5{,}7 \cdot tan62° = 10{,}72$

h_{Keg}: $h_{Keg} = h_a$

Alle Unbekannten sind nun bekannt.

k: $\frac{1}{2} \cdot 11{,}4 \cdot 10{,}72 \cdot (k - 5{,}7) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5{,}7^2 \cdot 10{,}72 = 1280$

$61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) + 182{,}3657 = 1280$ | $-182{,}3657$

$61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) = 1097{,}6343$ | $:61{,}104$

$k - 5{,}7 = 17{,}9634$ | $+5{,}7$

$k = 23{,}66$

Die Gesamtlänge von k beträgt $23{,}66\ cm$.

Lösung W3a/2015

Lösungslogik

Parabelgleichung:
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$. In der Wertetabelle lesen wir den Punkt $P(0|11)$ ab, was zu $c = 11$ führt (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit einem der beiden anderen gegebenen Punkte errechnen wir b.
Wertetabelle:
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichung ermitteln wir die fehlenden y–Werte.
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = -1$ lautet die allgemeine Gleichung $y = -x + b$. Mithilfe einer Punktprobe mit $P(-2{,}5|6)$ errechnen wir b.
Anschließend schneiden wir die Parabel p mit der Geraden g und stellen fest, dass die daraus entstehende Gleichung keine Lösung hat.
Gerade h:
Wegen Parallelität hat auch h die Steigung $m = -1$. Wir ermitteln zunächst den Scheitelpunkt S der Parabel p, machen eine Punktprobe mit der Geraden h und erhalten die vollständige Geradengleichung.
Wir setzen diese Geradengleichung auf 0, lösen nach x auf und erhalten dadurch den Schnittpunkt von h mit der x–Achse.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung:

p:	$y = x^2 + bx + c$	|	allgemeine Form der Parabel
	$S_y(0\|11)$	|	Schnittpunkt mit der y-Achse
	$y = x^2 + bx + 11$		
	$P_1(1\|6);\ P_2(4\|3)$	|	Punkte aus Wertetabelle
	$6 = 1^2 + b + 11$	|	Punktprobe mit P_1
	$6 - 12 = b \implies b = -6$		

Die Gleichung der Parabel lautet $y = x^2 - 6x + 11$.
Wertetabelle:

$y_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3$	|	y-Wert für $x = 2$
$y_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2$	|	y-Wert für $x = 3$
$y_5 = 6$	|	y-Wert für $x = 5$

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6	3	2	3	6

Gerade g:

g:	$y = -x + b$	|	Geradengleichung mit $m = -1$
	$P(-2{,}5\|6)$		
	$6 = -(-2{,}5) + b$	|	Punktprobe mit $P(-2{,}5\|6)$
	$6 - 2{,}5 = b \implies b = 3{,}5$		
	$y = -x + 3{,}5$		
$p \cap g$:	$x^2 - 6x + 11 = -x + 3{,}5$	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
	$x^2 - 5x + 7{,}5 = 0$	|	p/q-Formel
	$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 7{,}5}$		
	$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{-0{,}75}$		

Wegen $D < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung und damit haben p und g keine gemeinsamen Punkte.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Gerade h:

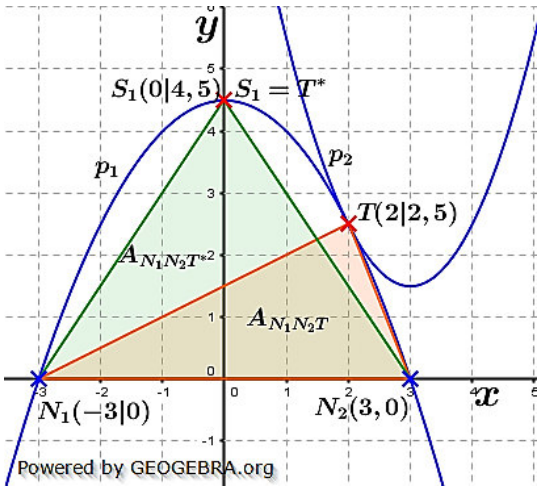
S_p:	$y = x^2 - 6x + 11$	|	Parabelgleichung von p
	$y = (x-3)^2 - 9 + 11$	|	quadratische Ergänzung
	$y = (x-3)^2 + 2$	|	Scheitelpunktform von p
	$S_p(3\|2)$	|	Koordinaten des Scheitels
h:	$y = -x + b$	|	Geradengleichung mit $m = -1$
	$2 = -3 + b$	|	Punktprobe mit $S_p(3\|2)$
	$b = 5$		
	$y = -x + 5$		
	$0 = -x + 5 \Rightarrow \ x = 5$	|	Schnittpunkt mit der x-Achse

Die Koordinaten des Schnittpunktes von h mit der x–Achse sind $R(5|0)$.

Lösung W3b/2015

Lösungslogik

Parabelgleichungen:
Für die Parabel p_1 lesen wir c aus dem gegebenen Scheitelpunkt S_1 mit 4,5 ab. (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit N_1 oder N_2 errechnet sich a.
Für die Parabel p_2 stellen wir die Scheitelpunktgleichung auf und wandeln diese in die allgemeine Form um.



Gemeinsamer Punkt:
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichungen ermitteln wir den gemeinsamen Punkt T durch Gleichsetzung.
Dreieck N_1N_2T:
Die Basis des Dreiecks ist die Strecke zwischen N_1 und N_2. Die Höhe des Dreiecks entspricht der y–Koordinate des Punktes T.
Maximaler Flächeninhalt für Dreieck $N_1N_2T^*$
T wandert auf p_1 oberhalb der x–Achse nach T^*. Im Scheitel von p_1 ist der y–Wert des Punkte T^* maximal und damit auch die Höhe des Dreiecks $N_1N_2T^*$ sowie dessen Fläche.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichungen:

p_1:	$y = ax^2 + c$		
	$S_1(0\|4{,}5)$	|	Schnittpunkt mit der y-Achse
	$c = 4{,}5$		
	$y = ax^2 + 4{,}5$		
	$N_1(-3\|0);\ N_2(3\|0)$	|	gegebene Punkte
	$0 = 3^2a + 4{,}5$	|	Punktprobe mit N_2
	$-4{,}5 = 9a \ \Rightarrow \ a = -\frac{1}{2}$		

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$.

p_2: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelpunktform
$S_2(3|1{,}5)$ | gegebener Scheitel
$y = (x-3)^2 + 1{,}5$
$y = x^2 - 6x + 10{,}5$

Die Gleichung der Parabel p_2 lautet $y = x^2 - 6x + 10{,}5$.

Gemeinsamer Punkt:

$p_1 \cap p_2$: $x^2 - 6x + 10{,}5 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$ | $\cdot \frac{2}{3}$
$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$ | p/q-Formel
$x_T = 2$
$y_T = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4{,}5 = 2{,}5$

Der gemeinsame Punkt T hat die Koordinaten $T(2|2{,}5)$.

Dreieck N_1N_2T:

$A_{N_1N_2T}$: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ | Flächenformel Dreieck
$c = \overline{N_1N_2} = 6$
$h_c = y_T = 2{,}5$
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$

Das Dreieck N_1N_2T hat eine Fläche von $7{,}5\ FE$.

Dreieck $N_1N_2T^*$:

Die y–Koordinate von T^* auf p_1 ist dann am größten, wenn T in den Scheitelpunkt S_1 von p_1 wandert. Diese ist jedoch $4{,}5$. Damit ist auch die Dreiecksfläche $N_1N_2T^*$ am größten.

$A_{N_1N_2T^*}$: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ | Flächenformel Dreieck
$c = \overline{N_1N_2} = 6$
$h_c = y_{T^*} = 4{,}5$
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$

Mit T^* im Scheitelpunkt von p_1 hat das Dreieck $N_1N_2T^*$ eine Fläche von $13{,}5\ FE$.

Lösung W4a/2015

<u>Lösungslogik</u>

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.
Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot" oder „rot, schwarz".
Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.
Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$P(schwarz) = \frac{7}{12}; \quad P(rot) = \frac{5}{12}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = P\{(r;s),(s,r)\} = P(r,s) + P(s,r)$

$P(r,s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \qquad P(r,s) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53{,}03\ \%$

Erwartungswerte:

$P(zweimal\ Karo) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132} \qquad P(zweimal\ Herz) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

Gewinnplan 1

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-9{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}14$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}14\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}62\ €$		

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von $0{,}62$ € *pro Spiel rechnen.*

Gewinnplan 2

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-19{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}29$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}29\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}47\ €$		

Der Spielebetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Lösung W4b/2015

Lösungslogik

Aus der Skizze lesen wir ab, dass die y–Achse des Koordinatensystems gleichzeitig Symmetrieachse der Wurfparabel ist. Damit befindet sich der Abwurfpunkt bei $P(-4{,}3|2{,}2)$.

Parabelgleichung und Wurfweite von David:

Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass sich der Scheitel der Parabel bei $S_{David}(0|3{,}9)$ befindet. Damit ist $c = 3{,}9$ (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $P(-4{,}3|2{,}2)$ errechnen wir a.

Die Weite, die David stößt, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Parabel mit der x–Achse für ein positives x. Dem errechneten Wert müssen noch $4{,}3\ m$ zugeschlagen werden wegen der Abwurfstelle bei $x = -4{,}3$.

Wurfweite von Tom:

Da die Parabelgleichung gegeben ist, ist die Angabe der Abwurfhöhe von Tom überflüssig. Die Wurfweite von Tom ergibt sich wie die Wurfweite von David über die Rechte Nullstelle von Toms Parabelgleichung zuzüglich $4{,}3\ m$.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichungen und Wurfweite von David:

p_{David}: $y = ax^2 + c$

$S_1(0|3{,}9)$ | Schnittpunkt mit der y-Achse

$c = 3{,}9$

$y = ax^2 + 3{,}9$

$P(-4{,}3|2{,}2)$ | Abwurfstelle David

$2{,}2 = (-4,3)^2 a + 3{,}9$ | Punktprobe mit P

$-1{,}7 = 18{,}49a$

$a = -\frac{1{,}7}{18{,}49} = -0{,}092$

$y = -0{,}092x^2 + 3{,}9$

$-0{,}092x^2 + 3{,}9 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0{,}092x^2 = 3{,}9$ | $:0{,}092$

$x^2 = \frac{3{,}9}{0{,}092} = 42{,}3913$ | $\sqrt{}$

$x_1 = 6{,}51$

$w_{David} = 6{,}51 + 4{,}3 = 10{,}81$

David stößt $10{,}81\,m$ *weit.*

Wurfweite von Tom:

p_{Tom}: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5$

$-\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0{,}1x^2 = 3{,}5$ | $:0{,}092$

$x^2 = \frac{3{,}5}{0{,}1} = 35$ | $\sqrt{}$

$x_1 = 5{,}92$

$w_{Tom} = 5{,}92 + 4{,}3 = 9{,}92$

Tom stößt $9{,}92\,m$ *weit.*

$w_{David} - w_{Tom} 10{,}81 - 9{,}92 = 0{,}89$

David stößt um $0{,}89\,m$ *weiter als Tom.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

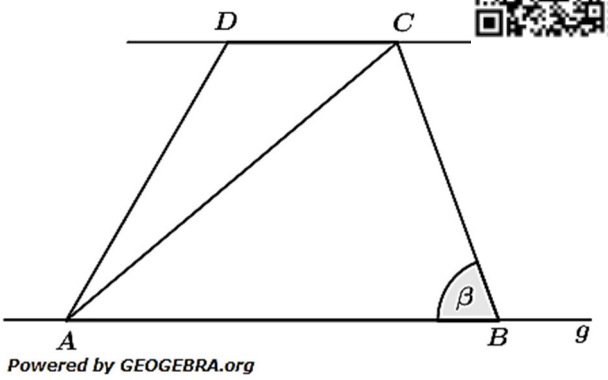
Aufgabe W1a/2016

Die Eckpunkte des Vierecks ABCD liegen auf den Parallelen g und h.
Die Parallelen haben einen Abstand von $9{,}0\ cm$.
Es gilt:

$\overline{AD} = 10{,}4\ cm$
$\beta = 70\,°$
$\overline{AB} = \overline{AC}$.

Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $ABCD$.

Lösung: $u_{ABCD} = 39{,}5\ cm$



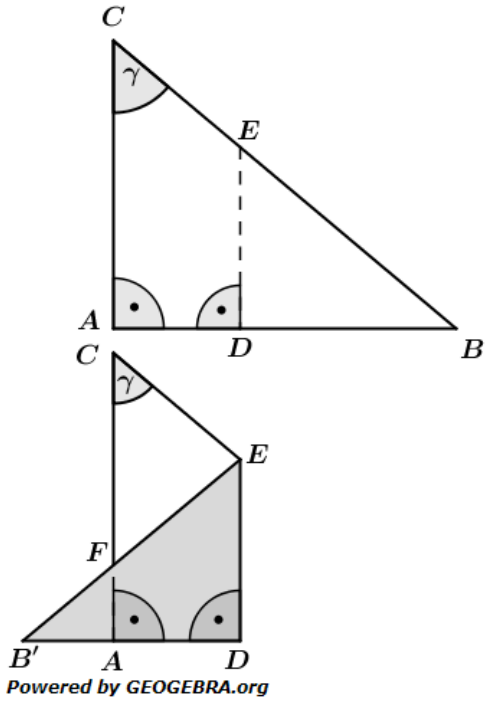
Aufgabe W1b/2016

Für das Papierdreieck gilt:

$\gamma = 50\,°$
$\overline{AC} = 11{,}4\ cm$
$\overline{AD} = 5{,}0\ cm$.

Das Dreieck wird entlang der Strecke $\overline{DE}$ gefaltet (siehe Skizze).
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ADEF$.

Lösung: $A_{ADEF} = 25{,}5\ cm^2$



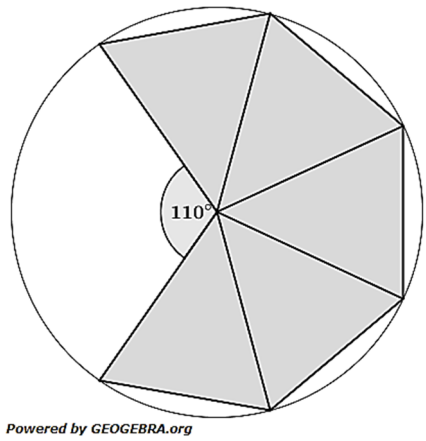
Aufgabe W2a/2016

Aus einer Kreisfläche wird die Mantelfläche einer regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide ausgeschnitten.

Der Kreis hat einen Radius von $8{,}3\ cm$.

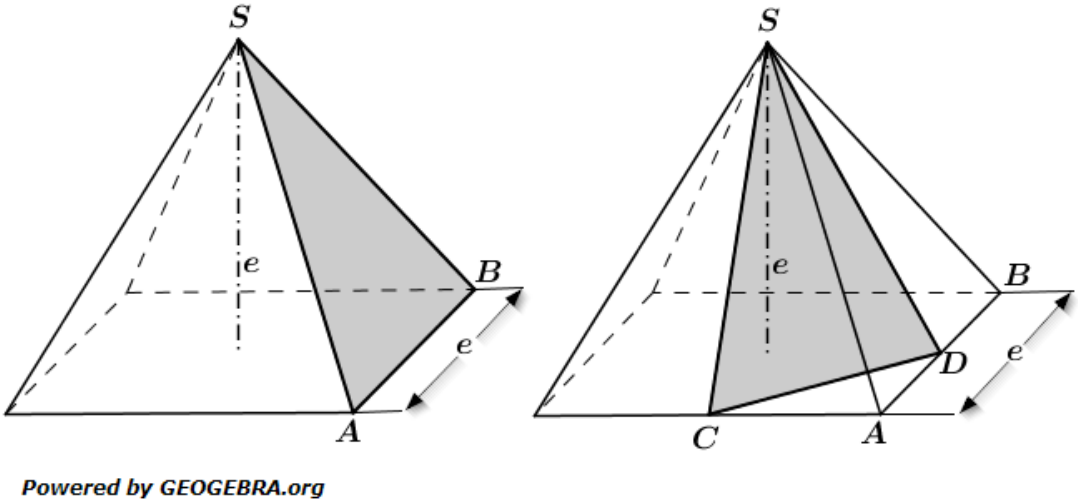
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide

Lösung: $V_{Pyr} = 163\ cm^3$



Aufgabe W2b/2016

Eine quadratische Pyramide ist zweimal abgebildet. In der linken Abbildung ist das Dreieck ABS markiert und in der rechten das Dreieck CDS.
Die Punkte C und D halbieren jeweils die Grundkante.



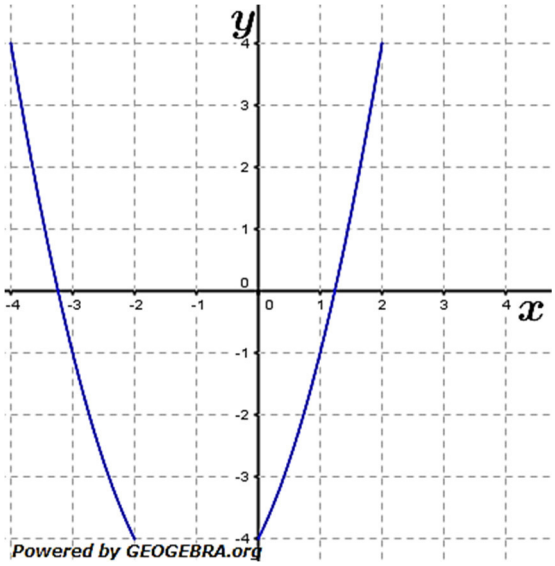
Welche der folgenden Formeln gehört zur Dreiecksfläche ABS und welche zur Dreiecksfläche CDS? Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Verwendung gerundeter Werte.

(1) $A = \frac{3e^2}{8}$ (2) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{6}$ (3) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{5}$

Lösung: Formel (3) für Dreieck ABS
Formel (1) für Dreieck CDS

Aufgabe W3a/2016

Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt der verschobenen Normalparabel p_1.
Die Punkte $A(-3|-1)$ und $B(1|-1)$ liegen auf p_1.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p_1.



Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S(0|8)$.
Durch die beiden Scheitelpunkte verläuft eine Gerade g.
Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g.

Eine Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch einen der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2.
Berechnen Sie eine mögliche Gleichung der Geraden h.

Lösung: $p_1: y = (x+1)^2 - 5$
$S_{p_1}(-1|-5)$
$g: y = 13x + 8$
$S_1(-3|1);\ S_2(2|4)$
$h_1:\ y = 13x + 40;\ h_2:\ y = 13x - 22$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3b/2016

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ und geht durch den Punkt $R(4|0)$. Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 die Gleichung $y = -x^2 + 1$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2.

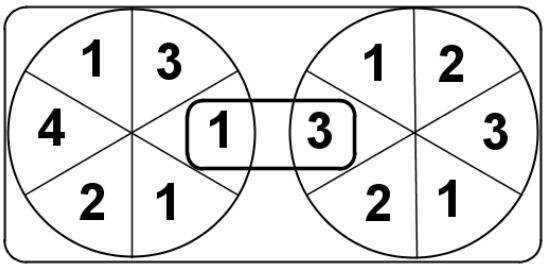
Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 sowie die Schnittpunkte P und Q der beiden Parabeln bilden das Viereck S_1PS_2Q.
Mia behauptet: „Das Viereck hat zwei rechte Winkel."
Hat Mia recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Lösung: p_1: $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$; $P(-2|-3)$; $Q(2|-3)$

Mia hat recht.

Aufgabe W4a/2016

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung werden zwei Glücksräder eingesetzt.
Beide Glücksräder werden gedreht.
Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine zweistellige Zahl.
Die Abbildung zeigt die Zahl 13.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen?



Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ergebnisse	Gewinn
Zwei gleiche Ziffern	3,00 €
Zahl größer als 40	5,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 2,00 €	

Bei der Wohltätigkeitsveranstaltung soll ein höherer Erlös erzielt werden. Dazu soll beim rechten Glücksrad einer der beiden Dreien durch eine fünf ersetzt werden. Der Gewinnplan bleibt gleich.
Wäre dies vorteilhaft? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder durch eine Argumentation.

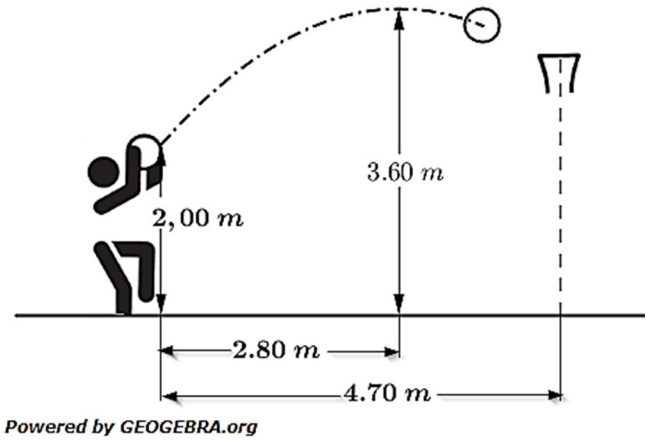
Lösung: $P(zwei\ gleiche\ Ziffern) = \frac{2}{9}$

$E(X) = -0{,}33$ € *(aus der Sicht des Spielers)*

Die Veränderung ist vorteilhaft.

Aufgabe W4b/2016

Dirk wirft im Basketballspiel auf den Korb (siehe Skizze).
Die annähernd parabelförmige Flugkurve lässt sich mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben.
Geben Sie eine mögliche Gleichung der zugehörigen Parabel p an.



Trifft Dirk bei diesem Wurf direkt in den Korb, der in einer Höhe von $3{,}05\ m$ hängt? Begründen Sie durch Rechnung.

Vor Dirk steht der Abwehrspieler Dennis im Abstand von $0{,}60\ m$. Mit nach oben gestreckten Armen erreicht Dennis eine Höhe von $2{,}30\ m$.
Berührt er den Ball ohne hochzuspringen? Begründen Sie durch Rechnung.

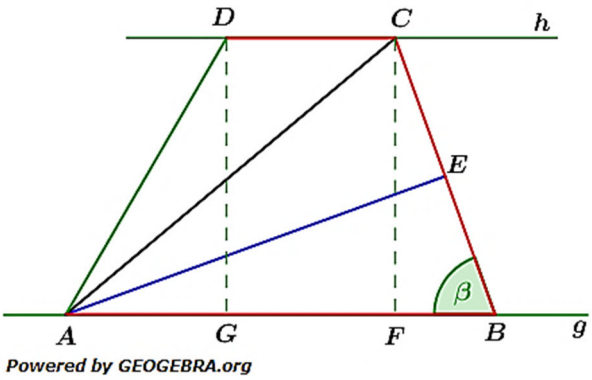
Lösung: $y = -0{,}2041x^2 + 3{,}6$

Dirk trifft nicht in den Korb, da der Wurf zu tief ist.
Dennis berührt den Ball nicht, da der Wurf für ihn zu hoch ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2016

Lösungslogik



Wegen $g \| h$ mit einem Abstand von $9\ cm$ lässt sich die Strecke $\overline{BC}$ über den $sin\beta$ berechnen.
Wegen $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist das Dreieck ABC gleichseitig. Damit ist $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Darüber berechnen wir die Strecke $\overline{AB}$ über den $cos\beta$.
Wir berechnen die Strecke $\overline{FB}$ über den Satz des Pythagoras.
Wir berechnen die Strecke $\overline{AG}$ über den Satz des Pythagoras.
Die Strecke $\overline{CD}$ errechnet sich dann über $\overline{CD} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{FB}$.
Der Umfang des Vierecks $ABCD$ kann gebildet werden.

Klausuraufschrieb

$\overline{BC}$: $\quad sin\beta = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC};\ : sin\beta$

$\overline{BC} = \frac{\overline{CF}}{sin\beta} = \frac{9}{sin70°} = 9{,}5776$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Deswegen gilt $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$.

$\overline{AB}$: $\quad cos\beta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB};\ : cos\beta$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BE}}{cos\beta} = \frac{4{,}7888}{cos70°} = 14{,}0$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{FC}^2} = \sqrt{9{,}5776^2 - 9^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{FB} = \sqrt{10{,}7304} = 3{,}2757$

$\overline{AG}$: $\quad \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{GD}^2} = \sqrt{10{,}4^2 - 9^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{AG} = \sqrt{27{,}16} = 5{,}2115$

$\overline{DC}$: $\quad \overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{FB} = 14{,}0 - 5{,}2115 - 3{,}2757 = 5{,}5128$

u_{ABCD}: $\quad u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD}$

$u_{ABCD} = 14{,}0 + 9{,}5776 + 5{,}5128 + 10{,}4 = 39{,}4904$

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ beträgt $39{,}5\ cm$.

Lösung W1b/2016

Lösungslogik

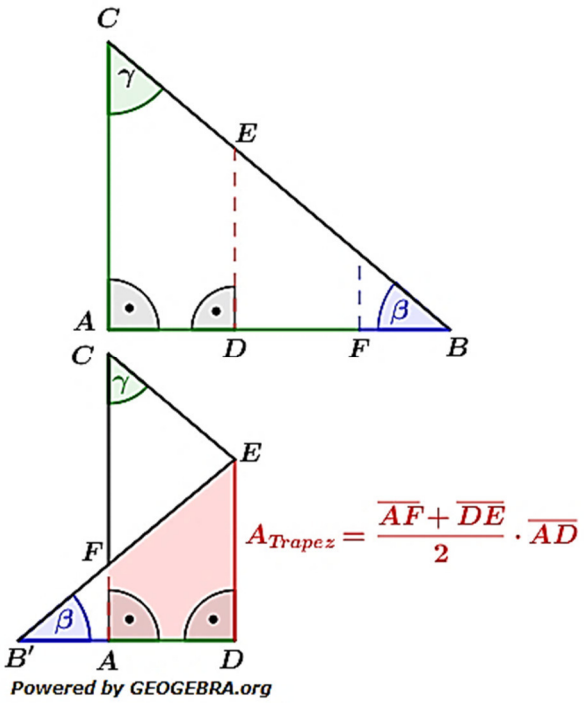
Wir bestimmen zunächst den Winkel β als Ergänzungswinkel im rechtwinkligen Dreieck ABC.

Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ über den $tan\beta$.

Wegen der Klappung an der Kante $\overline{DE}$ ist die Strecke $\overline{DF} = \overline{AD} = 5\,cm$. Dadurch können wir die Strecke $\overline{FB}$ bestimmen. Jetzt lässt sich $\overline{DE}$ über den $tan\beta$ berechnen.

Weiterhin ist $\overline{B'A} = \overline{FB}$ (siehe Grafik). Damit lässt sich $\overline{DE}$ als auch $\overline{AF}$ über den $tan\beta$ berechnen.

Wir berechnen abschließend noch die Fläche des Trapezes über dessen Flächenformel.



Klausuraufschrieb

β: $\quad \beta = 90° - \gamma = 90° - 50° = 40°$

$\overline{AB}$: $\quad tan\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB};\ : tan\beta$

$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{tan\beta} = \frac{11{,}4}{tan40°} = 13{,}586$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FB} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AD} = 13{,}586 - 10 = 3{,}586$

$\overline{B'A}$: $\quad \overline{B'A} = \overline{FB} = 3{,}586$

$\overline{AF}$: $\quad tan\beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{B'A}} \quad | \quad \cdot \overline{B'A}$

$\overline{AF} = \overline{B'A} \cdot tan\beta = 3{,}586 \cdot tan40° = 3{,}0$

$\overline{DE}$: $\quad tan\beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'D}} \quad | \quad \cdot \overline{B'D}$

$\overline{DE} = \overline{B'D} \cdot tan\beta = 8{,}586 \cdot tan40° = 7{,}20$

A_{Trapez}: $A_{Trapez} = \frac{\overline{AF}+\overline{DE}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{3{,}0+7{,}20}{2} \cdot 5 = 25{,}5$

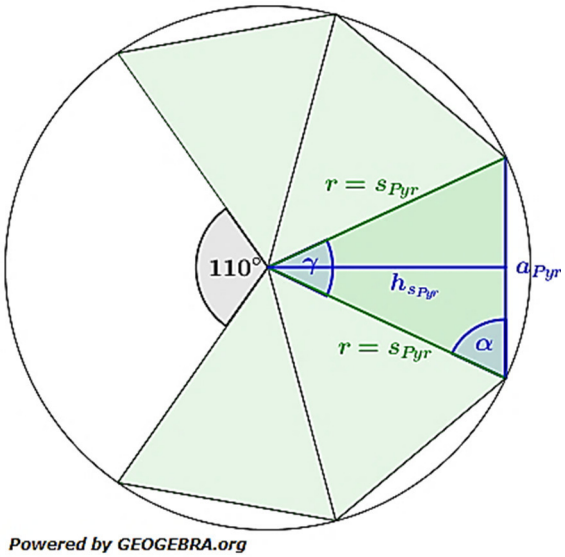
Die Fläche des Vierecks $ADEF$ beträgt $25{,}5\,cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

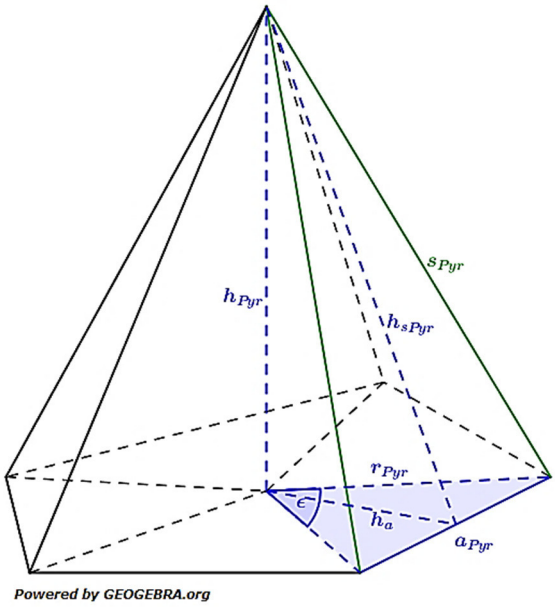
Lösung W2a/2016

Lösungslogik

In der gegebenen Aufgabengrafik wird ein Teildreieck zur Seitenfläche der Pyramide. Zur Berechnung der regelmäßigen fünfseitigen Grundfläche der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Seitenkante a_{Pyr}. Der gegebene Radius wird zur Seitenkante s_{Pyr} der Pyramide. Weiterhin benötigen wir später für die Berechnung der Höhe der Pyramide die Länge der Höhe der Seitenfläche $h_{s_{pyr}}$.
Wir bestimmen als erstes die Winkel γ und α der Seitenfläche und berechnen daraus die zuvor beschriebenen Werte.



Fünfeckpyramide:
Die nebenstehende Grafik zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir die Größe der Grundfläche sowie die Höhe h_{Pyr} der Pyramide.
Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge a_{Pyr} und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken. Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel ϵ und mittels $sin\frac{\epsilon}{2}$ und $\frac{a_{Pyr}}{2}$ dann r_{Pyr}. Mittels dem trigonometrischen Flächeninhalt für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks.
Abschließend benötigen wir noch die Höhe h_{Pyr} der Pyramide, die wir über den Satz des Pythagoras mithilfe von r_{Pyr} und s_{Pyr} berechnen.



Klausuraufschrieb

γ: $\quad \gamma = \frac{360°-110°}{5} = 50°$

α: $\quad \alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = \frac{180°-50}{2} = 65°$

a_{Pyr}: $\quad \frac{a_{Pyr}}{sin\gamma} = \frac{r}{sin\alpha} \quad | \quad \cdot sin\gamma$

$\quad a_{Pyr} = \frac{r \cdot sin\gamma}{sin\alpha} = \frac{8{,}3 \cdot sin50°}{sin65°} = 7{,}02$

s_{Pyr}: $s_{Pyr} = r = 8{,}3$

ϵ: $\epsilon = \frac{360°}{5} = 72°$ | Spitzenwinkel im Fünfeck

r_{Pyr}: $sin\frac{\epsilon}{2} = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{r_{Pyr}}$ | $\cdot r_{Pyr};\ : sin\frac{\epsilon}{2}$

$r_{Pyr} = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{sin\frac{\epsilon}{2}} = \frac{3{,}51}{sin36°} = 5{,}9716$

A_Δ: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot r_{pyr} \cdot r_{pyr} \cdot sin\epsilon$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5{,}9716^2 \cdot sin72° = 16{,}9573$

G_{Pyr}: $G_{Pyr} = 5 \cdot A_\Delta = 5 \cdot 16{,}9573 = 84{,}7865$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - r_{Pyr}^2} = \sqrt{8{,}3^2 - 5{,}9716^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{33{,}223} = 5{,}7645$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G_{Pyr} \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 84{,}7867 \cdot 5{,}7645 = 162{,}9176$

Das Volumen der Pyramide beträgt etwa $163\ cm^3$.

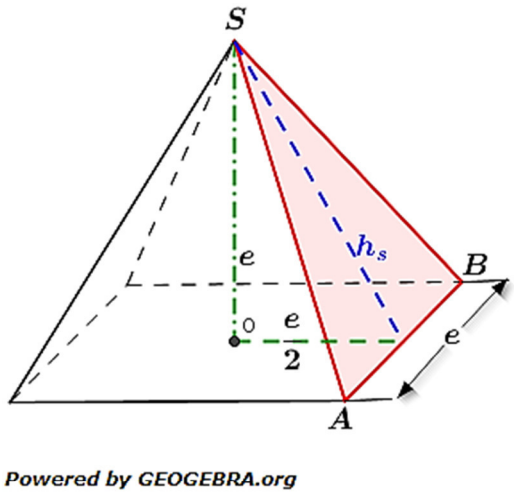
Lösung W2b/2016

Lösungslogik

Linke Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

Wir berechnen h_s über den Satz des Pythagoras. Danach kann die Fläche angegeben werden.

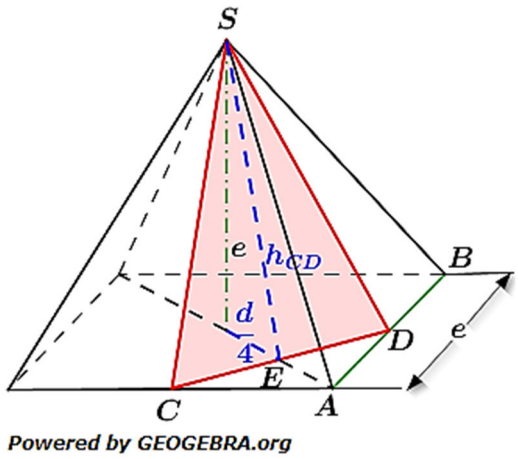


Rechte Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

Wir ermitteln $\overline{CD}$ über den Satz des Pythagoras und den beiden bekannten Strecken $\overline{CA} = \overline{AD} = \frac{e}{2}$.

h_{CD} lässt sich ebenfalls über den Satz des Pythagoras ermitteln, hierzu benötigen wir aber zuerst die Länge der Diagonalen der Grundfläche, den die Strecke vom Fußpunkt der Höhe e zum Punkt E (siehe Grafik) entspricht einem Viertel der Diagonalen d.



Klausuraufschrieb

Dreieck ABS:

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$

h_S: $h_S = \sqrt{e^2 + \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{5e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5}$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{e^2}{4} \cdot \sqrt{5}$

Formel (3) gehört zum Dreieck ABS.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Dreieck CDS:

$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$

$\overline{CD}$: $\quad \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2}$ | Satz des Pythagoras

d: $\quad d = \sqrt{e^2 + e^2} = e\sqrt{2}$ | Satz des Pythagoras

h_{CD}: $\quad h_{CD} = \sqrt{e^2 + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{e^2 + \frac{2e^2}{16}} = \sqrt{\frac{18e^2}{16}}$ | Satz des Pythagoras

$= \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9} = \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2}$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2} = \frac{6e^2}{16} = \frac{3e^2}{8}$

Formel (1) gehört zum Dreieck CDS.

Lösung W3a/2016

<u>Lösungslogik</u>

Parabelgleichung p_1:

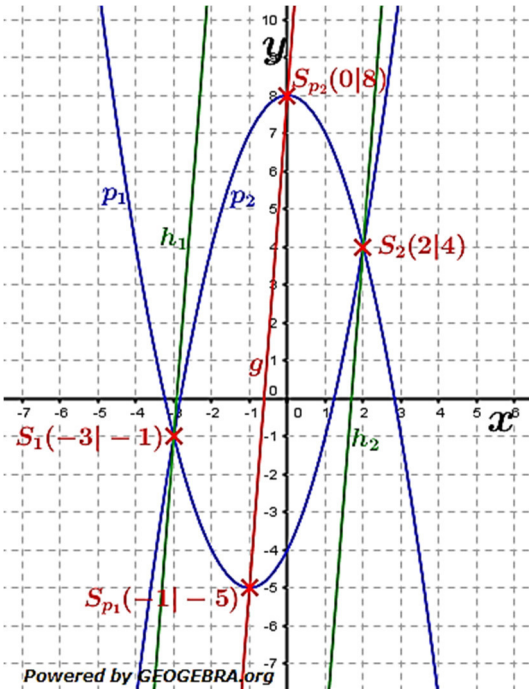
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$.

Elegante Lösung:

Die gegebenen Parabelpunkte A und B haben in x-Richtung einen Abstand von 4 Einheiten. Wegen der Symmetrie der Parabel liegt die Symmetrieachse somit bei $x = -1$. Da der Abstand z. B. des Punktes B zur Symmetrieachse 2 ist, muss der Scheitel der Parabel somit um 4 Einheiten tiefer liegen als die y-Koordinate des Punktes B. Der Scheitel der Parabel hat also die Koordinaten $S_{p_1}(-1|-5)$. Damit lautet die Parabelgleichung $y = (x+1)^2 - 5$.

Standard Lösung:

Mit dem gegebenen Punkt A sowie dem gut erkennbaren Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|-4)$ machen wir Punktproben und berechnen damit die Parameter b und c der allgemeinen Parabelgleichung.



Geradengleichung g:

Wir bestimmen die Scheitelpunkte von p_1 und p_2, berechnen darüber die Steigung der Geraden und setzen den y–Achsenabschnitt auf 8, da der Scheitel von p_2 auf der y-Achse liegt.

Geradengleichung h:
Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte von p_1 und p_2 durch Gleichsetzung.
Da h parallel zu g verlaufen soll, ist die Steigung von g und h dieselbe. h hat lediglich einen andere y-Achsenabschnitt b.
Wir machen in der Gleichung $y = 13x + b$ eine Punktprobe mit einem der zuvor ermittelten Schnittpunkte zur Berechnung von b. Wegen der zwei Schnittpunkte gibt es hier auch zwei Geraden. Es genügt jedoch, nur eine Gerade aufzustellen.

<u>Klausuraufschrieb</u>
Parabelgleichung p_1:
p_1: $y = x^2 + bx + c$ | allgemeine Form der Parabel
Elegante Lösung:
$x_B - x_A = 1 - (-3) = 4$ | waagrechte Strecke zwischen A und B
$\frac{x_B - x_A}{2} = 2$
$x_A - 2 = -1$ | Position der Symmetrieachse
Die Symmetrieachse von p_1 ist $x = -1$
Wegen des waagrechten Abstandes von 2 der Punkte A und B zur Symmetrieachse liegt der Scheitelpunkt der Parabel 4 Einheiten tiefer als die y-Koordinate der Punkte A und B.
$S_{p_1}(-1|-5)$ | Scheitelpunkt von p_1
$y = (x+1)^2 - 5$ | Scheitelpunktgleichung von p_1
Standard Lösung:
Wegen des Schnittpunktes von p_1 mit der y-Achse $S_y(0|-4)$ ist $c = -4$.
$-1 = 1 + b - 4$ | Punktprobe mit A | $+3$
$b = 2$
Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 + 2x - 4$
Geradengleichung g:
$y = mx + b$ | allgemeine Geradengleichung
$S_{p_1}(-1|-5)$ | siehe zuvor
$S_{p_2}(0|8)$
$m_g = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-5)}{0-(-1)} = 13$
Wegen $S_{p_2}(0|8)$ ist $b = 8$
g: $y = 13x + 8$
Geradengleichung h:
Schnittpunktberechnung:
p_2: $y = -x^2 + 8$
$p_1 \cap p_1$:
$x^2 + 2x - 4 = -x^2 + 8$ | $+x^2;\ -8$
$2x^2 + 2x - 12 = 0$ | $:2$
$x^2 + x - 6 = 0$
$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$
$x_1 = 2;\quad x_2 = -3$
$x_1; x_2 \longrightarrow p_2$
$y_1 = -2^2 + 8 = -4 + 8 = 4$
$y_2 = -(-3)^2 + 8 = -9 + 8 = -1$
$S_1(2|4);\quad S_2(-3|-1)$

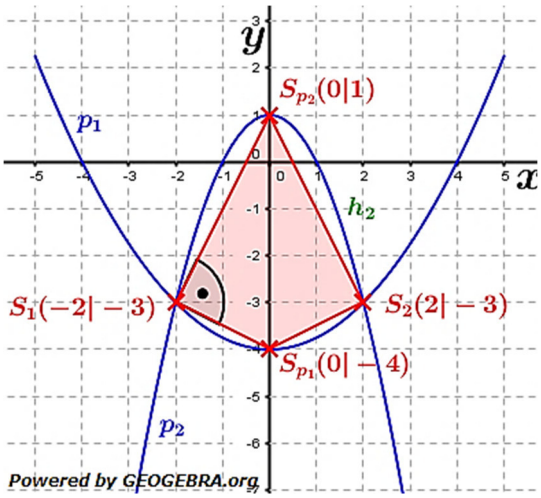
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

h: $y = 13x + b$
$4 = 13 \cdot 2 + b_1 = 26 + b_1 \quad | \quad -26$
$b_1 = -22$
h_1: $y = 13x - 22$
$1 = 13 \cdot (-3) + b_2 = -39 + b_2 \quad | \quad +39$
$b_2 = 40$
h_2: $y = 13x + 40$

Lösung W3b/2016

Lösungslogik

Schnittpunkte P und Q:
Zunächst berechnen wir das c aus der Parabelgleichung über eine Punktprobe mit $R(4|0)$.
Die beiden Schnittpunkte ermitteln wir dann durch Gleichsetzung.



Prüfung der Behauptung Mias:
Wir fertigen eine Skizze der Situation und erkennen, dass offensichtlich ein rechter Winkel bei den Punkten S_1 und S_2 besteht.
Für den rechnerischen Nachweis verwenden wir die Orthogonalitäts-bedingung $m_1 \cdot m_2 = -1$ mit m_1 als Steigung der Strecke $\overline{S_1S_{p_2}}$ und m_2 als Steigung der Strecke $\overline{S_1S_{p_1}}$.
Alternativ kann der Nachweis auch über den Satz des Pythagoras geführt werden, denn bei einem Winkel von $90°$ muss gelten $\overline{S_{p_1}S_{p_2}}^2 = \overline{S_1S_{p_1}}^2 + \overline{S_1S_{p_2}}^2$.

Klausuraufschrieb

Schnittpunkte P und Q:

p_1: $y = \frac{1}{4}x^2 + c$
$0 = \frac{1}{4}(4)^2 + c \quad | \quad$ Punktprobe mit $R(4|0)$
$c = -4$
$y = \frac{1}{4}x^2 - 4$

$p_1 \cap p_1$:
$\frac{1}{4}x^2 - 4 = -x^2 + 1 \quad | \quad$ Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{5}{4}x^2 - 5 = 0 \quad | \quad \cdot 4;\ +20$
$5x^2 = 20 \quad | \quad :5$
$x^2 = 4 \implies x_1 = 2;\quad x_2 = -2$

$x_1; x_2 \longrightarrow p_2$
$y_1 = -(2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$
$y_2 = -2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$
$P(-2|-3);\quad Q(2|-3)$

Prüfung der Behauptung Mias:

Orthogonalitätsbedingung für Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = m_{\overline{S_1 S_{p_2}}}; \quad m_2 = m_{\overline{S_1 S_{P_1}}}$

$m_{\overline{S_1 S_{p_2}}} = \frac{y_{S_{p_2}} - y_{S_1}}{x_{S_{p_2}} - x_{S_1}} = \frac{1-(-3)}{0-(-2)} = 2$

$m_{\overline{S_1 S_{p_1}}} = \frac{y_{S_{p_1}} - y_{S_1}}{x_{S_{p_1}} - x_{S_1}} = \frac{-4-(-3)}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$

$m_{\overline{S_1 S_{p_2}}} \cdot m_{\overline{S_1 S_{p\ \ 1}}} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

Der Winkel $S_{p_1} S_1 S_{p_2}$ ist ein rechter Winkel. Wegen der Symmetrie ist damit auch der Winkel $S_{p_1} S_2 S_{p_2}$ ein rechter. Mia hat recht.

Lösung W4a/2016

Lösungslogik

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Zahlen 1 bis 4 pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Ziffern" haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt.

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Glücksrad 2:

Durch eine Argumentation:

Siehe Klausuraufschrieb

Durch Rechnung:

Wir bestimmen die neuen Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn von 3,00 € und von 5,00 € und stellen eine neue Tabelle auf.

Klausuraufschrieb

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

Linkes Glücksrad: $P(1) = \frac{3}{6}; \quad P(2) = \frac{1}{6}; \quad P(3) = \frac{1}{6}; \quad P(4) = \frac{1}{6}$

Rechtes Glücksrad: $P(1) = \frac{2}{6}; \quad P(2) = \frac{2}{6}; \quad P(3) = \frac{2}{6}$

$$P(zwei\ gleiche\ Ziffern) = P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6+2+2}{36} = \frac{10}{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, beträgt $\frac{2}{9}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Erwartungswert:

$P(Zahl\ größer\ 40) = P\{(4;1),(4;2),(4;3)\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{36}$

	$P(zwei\ gleiche\ Ziffer)$	$P(Zahl\ größer\ 40)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$1{,}00$ €	$3{,}00$ €	$-2{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{20}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}28$ €	$0{,}50$ €	$-1{,}11$ €
$E(X)$	$0{,}28\ € + 0{,}50\ € - 1{,}11\ € = -0{,}33\ €$		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist $-0{,}33$ €.

Veränderung Glücksrad 2:

Argumentation:

Wird beim Glücksrad *2* eine *3* durch eine *5* ersetzt, verringert sich die Wahrscheinlichkeit für die Anzeige von *(3;3) von* $\frac{2}{36}$ *auf* $\frac{1}{36}$, damit sinkt der Auszahlungsbetrag für den Gewinn *3,00 €*. Auf der anderen Seite verändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als *40* nicht, da die Verringerung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl *43* durch die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 45 voll ausgeglichen wird. Es sinkt also lediglich die Auszahlung für den Gewinn von *3,00 €.* Dies wäre im Sinne eines höheren Erlöses vorteilhaft.

Rechnung:

$P(zwei\ gleiche\ Ziffern) = P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{36}$

$P(Zahl\ größer\ 40) = P\{(4;1),(4;2),(4;3),(4;5)\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

	$P(zwei\ gleiche\ Ziffer)$	$P(Zahl\ größer\ 40)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$1{,}00$ €	$3{,}00$ €	$-2{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}25$ €	$0{,}50$ €	$-1{,}17$ €
$E(X)$	$0{,}25\ € + 0{,}50\ € - 1{,}17\ € = -0{,}42\ €$		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist jetzt $-0{,}42$ €.

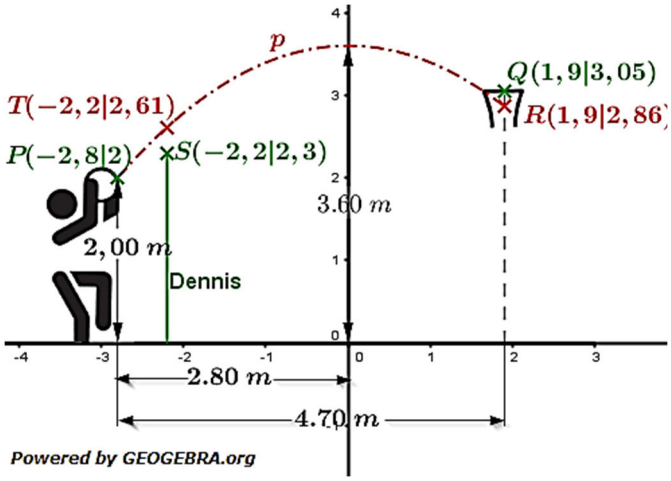
Die Veränderung von Glücksrad 2 *wäre vorteilhaft.*

Lösung W4b/2016

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Aus der Aufgabenstellung mit $y = ax^2 + c$ muss die y–Achse durch den höchsten Punkt der Wurfbahn verlaufen, da die gegebene Parabel eine in x-Richtung unverschobene Parabel ist.
Daraus bestimmen sich die einzelnen gegebenen Punkte gemäß nebenstehender Grafik (grüne Punkte).



Parabelgleichung p:

Der Scheitel der Parabel liegt bei $S(0|3{,}6)$. Damit ist $c = 3{,}6$ (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $P(-2{,}8|2)$ (Abwurfpunkt von Dirk) errechnen wir a.

Trifft Dirk in den Korb:

Wir bestimmen die y–Koordinate der Parabel für $x = 1{,}9$. Liegt diese unter oder über $y = 3{,}05$ (Gegebene Höhe des Korbs), so trifft Dirk den Korb nicht.

Berührt Dennis den Ball:

Wir bestimmen die y–Koordinate der Parabel für $x = -2{,}2$ (Abstand von Dennis zum Ursprung). Liegt diese über $y = 2{,}3$ (höchster Punkt von Dennis), so berührt Dennis den Ball nicht.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt somit bei $S(0|3{,}6)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Abwurfpunkt Dirk:	$P(-2{,}8|2)$
Aufhängepunkt Korb:	$Q(1{,}9|3{,}05)$
Höchster Punkt Dennis	$Q(-2{,}2|2{,}3)$

Parabelgleichung p:

$S(0|3{,}6)$ | Scheitelpunkt der Parabel

$3{,}6 = a \cdot 0^2 + c \implies c = 3{,}6$

$y = ax^2 + 3{,}6$

$P(-2{,}8|2)$ | Abwurfpunkt Dirk

$2 = (-2{,}8)^2 a + 3{,}6$ | Punktprobe mit P

$-1{,}6 = 7{,}84a$

$a = -\frac{1{,}6}{7{,}84} = -0{,}2041$

Die Parabelgleichung lautet: $y = -0{,}2041x^2 + 3{,}6$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Trifft Dirk in den Korb:

$P(1{,}9|3{,}05)$ | Aufhängepunkt Korb

$y = -0{,}2041 \cdot 1{,}9^2 + 3{,}6$ | y-Koordinate für $x = 1{,}9$

$y = 2{,}86$

Da die y −Koordinate der Parabel tiefer liegt als der Aufhängepunkt des Korbs, trifft Dirk den Korb nicht.

Berührt Dennis den Ball:

$P(-2{,}2|2{,}3)$ | Höchster Punkt Dennis

$y = -0{,}2041 \cdot (-2{,}2)^2 + 3{,}6$ | y-Koordinate für $x = -2{,}2$

$y = 2{,}61$

Da die y −Koordinate der Parabel höher liegt als der höchste Punkt von Dennis, berührt Dennis den Ball nicht.

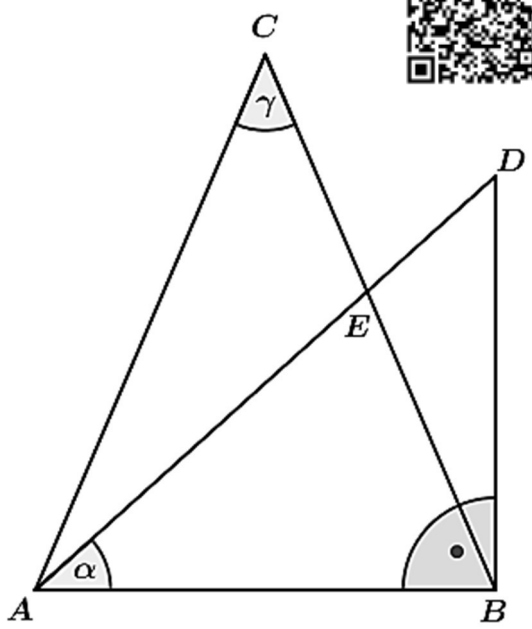
Aufgabe W1a/2017

Das rechtwinklige Dreieck ABD und das gleichschenklige Dreieck ABC haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam.
Es gilt:

$\overline{BD} = 7{,}2\ cm$
$\overline{DE} = 3{,}0\ cm$
$\alpha = 42\,°$
$\overline{AC} = \overline{BC}$.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes E von $\overline{AB}$ sowie den Winkel γ.

Lösung: *Abstand E von $\overline{AB}$* $5{,}2\ cm$
$\gamma = 46{,}5\,°$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W1b/2017

Gegeben sind ein rechtwinkliges Trapez ABCD und ein regelmäßiges Sechseck.

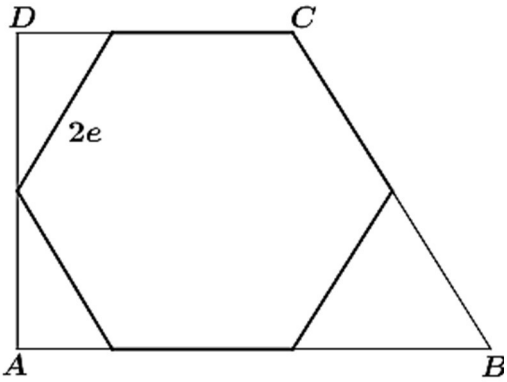
Die Eckpunkte des Sechsecks liegen auf den Seiten des Trapezes (siehe Skizze).

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Flächeninhalt des Trapezes ABCD gilt:

$A = 8e^2\sqrt{3}$

Geben Sie die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ ohne Verwendung gerundeter Werte an.

Lösung: $\overline{AC} = e\sqrt{21}$



Powered by GEOGEBRA.org

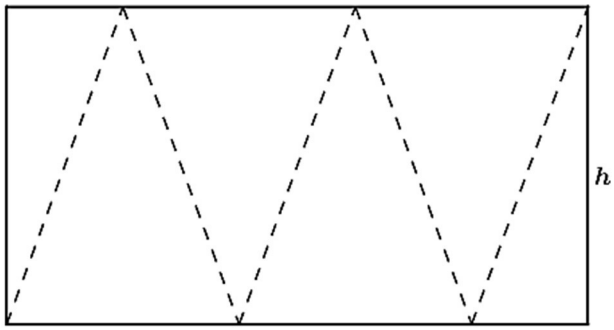
Aufgabe W2a/2017

Für einen Zylinder gilt:

$r = 3{,}5\ cm$
$h = 12{,}0\ cm$

Die Mantelfläche des Zylinders wird abgerollt (siehe Skizze).
Mit den Einzelteilen dieses Rechtecks wird die Mantelfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide vollständig beklebt.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Lösung: $V_{Pyr} = 460{,}3\ cm^3$



Powered by GEOGEBRA.org

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W2b/2017

Die Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes ABCD liegen auf den Kanten bzw. Eckpunkten einer quadratischen Pyramide.

Es gilt:

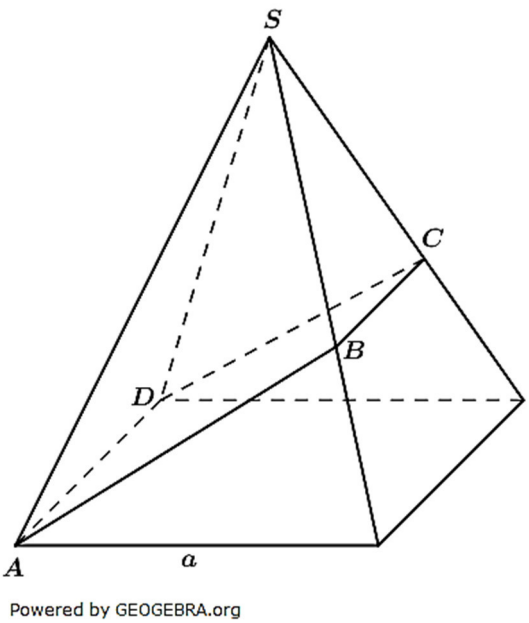
$O_{Pyr} = 357\ cm^2$

$a = 10{,}0\ cm$

$\overline{AB} = \overline{BS}$

Berechnen Sie den Umfang des Trapezes $ABCD$.

Tipp: Sinussatz für Strecke $\overline{AB}$,
2. Strahlensatz für Strecke $\overline{BC}$.



Aufgabe W3a/2017

Drei Gleichungen - drei Graphen

(A) $y = ax^2 - 1$
(B) $y = x^2 - 6x + 5$
(C) $y = x^2 + 4x + q$

Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Vervollständigen Sie die Funktionsgleichungen

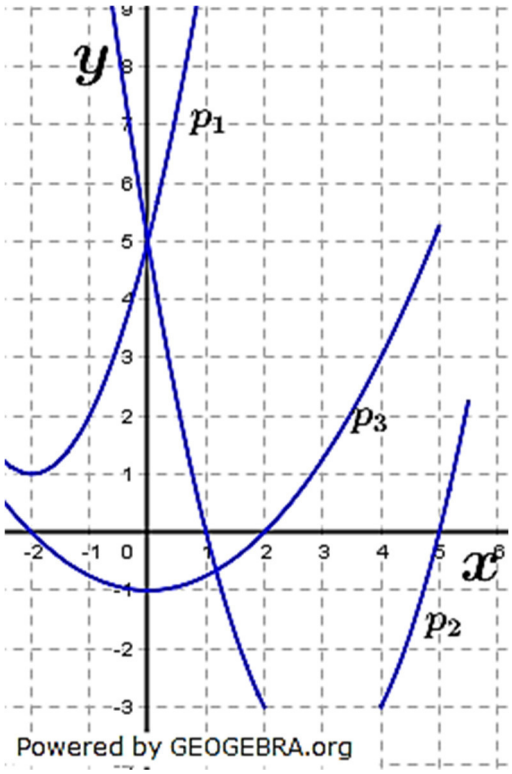
Die Gerade g geht durch die Scheitelpunkte von p_2 und p_3. Berechnen Sie die Funktionsgleichung von g.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Scheitelpunkt von p_1 ebenfalls auf g liegt.

Lösung: (A) => p_3; (B) => p_2; (C) => p_1

$a = \frac{1}{4}$; $q = 5$

$g: y = -x - 1$; $S_1(-2|1) \in g$



Aufgabe W3b/2017

Die Parabel p_1 mit $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ und die nach oben geöffnete Normalparabel p_2 mit dem Scheitel $S_2(1{,}5|-3{,}25)$ haben einen gemeinsamen Punkt R.
Die Gerade h geht durch den Ursprung $(0|0)$ und den Punkt R.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden h.

Die Schnittpunkte der Parabel p_1 mit der x-Achse und der Punkt R bilden ein Dreieck.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

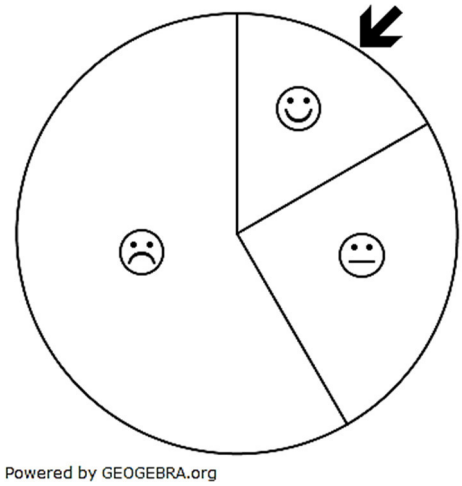
Bastian behauptet: "Die Gerade h halbiert den Flächeninhalt des Dreiecks." Hat Bastian Recht?
Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder Argumentation.

Lösung: h: $y = -1{,}5x$; $A_{Dreieck} = 12\ FE$
Bastian hat Recht.

Aufgabe W4a/2017

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird ein Glücksrad eingesetzt.
Die Mittelpunkts-Winkel betragen $60\,°$, $90\,°$ und $210\,°$.
Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens einmal das Symbol ☺?



Das Glücksrad wird für ein Glücksspiel verwendet. Berechnen Sie den Erwartungswert unter Berücksichtigung des nebenstehenden Gewinnplans.

Gewinnplan	
Ereignisse	Gewinn
zweimal ☺	4,00 €
zweimal 😐	2,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 0,50 €	

Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spiel fair wird.

Wie hoch muss der Gewinn für das Ereignis "zweimal ☺" sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

Lösung: $P(höchstens\ einmal\ ☺) = \frac{35}{36} \approx 97{,}2\ \%$
$E(X) = -0{,}26\ €$ *(aus der Sicht des Spielers)*
Gewinn für zweimal ☺, damit das Spiel fair ist: $13{,}50\ €$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4b/2017

Die Lupu-Brücke überspannt den Fluss Huangpu in Shanghai. Sie ist die zweitlängste Bogenbrücke der Welt und hat annähernd die Form einer Parabel. Sie kann mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschrieben werden.

Die Bogenbrücke hat auf Höhe der Wasseroberfläche eine Weite von $550\,m$. Die Fahrbahn befindet sich $50\,m$ über der Wasseroberfläche. Das ist die Hälfte der maximalen Höhe der Brücke.

Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung für den Brückenbogen.
Berechnen Sie die Länge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens.

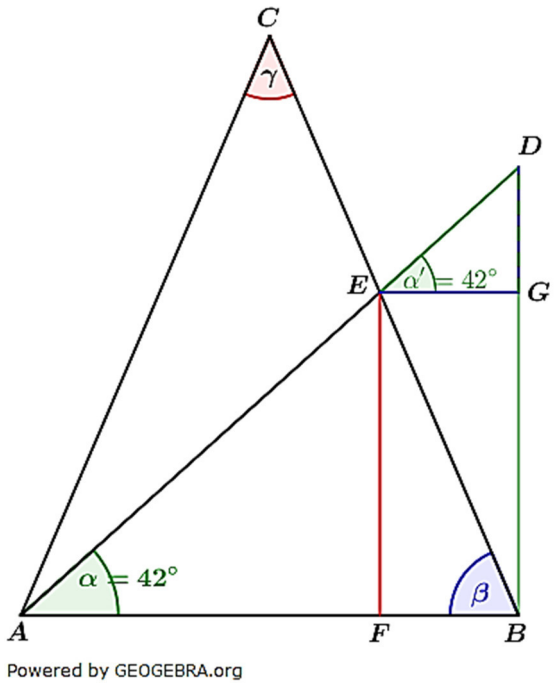
Lösung: p: $y = -0{,}00132x^2 + 100$

Länge der Fahrbahn: $390\,m$.

Lösung W1a/2017

Lösungslogik

Der Abstand von E zur Strecke $\overline{AB}$ ist der kürzeste Abstand (Senkrechte auf $\overline{AB}$) $\overline{EF}$. $\overline{EF}$ ist so lang wie $\overline{BG}$.
$\overline{BG} = \overline{BD} - \overline{GD}$.
Berechnung der Strecke $\overline{GD}$ über den $sin\alpha$.
Berechnung des Abstandes über $\overline{EF} = \overline{BD} - \overline{GD}$.
Der Winkel γ ist (wegen des gleichschenkligen Dreiecks ABC) $180° - 2 \cdot \beta$.
Berechnung $\overline{EG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung β über den $tan\beta$.
Berechnung von γ.



Klausuraufschrieb

Abstand E zu $\overline{AB}$:

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = \overline{BG} = \overline{BD} - \overline{GD}$

$\overline{GD}$: $sin\alpha = \frac{\overline{GD}}{\overline{DE}}$ | $\cdot \overline{DE}$

$\overline{GD} = \overline{DE} \cdot sin\alpha = 3 \cdot sin42\,° = 2{,}007$

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = 7{,}2 - 2{,}007 = 5{,}1926$

Der Abstand von Punkt E zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt $5{,}2\ cm$.

Winkel γ:

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot \beta$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{GD}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{EG} = \sqrt{3^2 - 2{,}007^2} = 2{,}2298 = \overline{FB}$

β: $tan\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \frac{5{,}1926}{2{,}2298} = 2{,}3287$

$\beta = tan^{-1}(2{,}3287) = 66{,}76\,°$

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot 66{,}76\,° = 46{,}479\,°$

Der Winkel γ ist $46{,}5\,°$ groß.

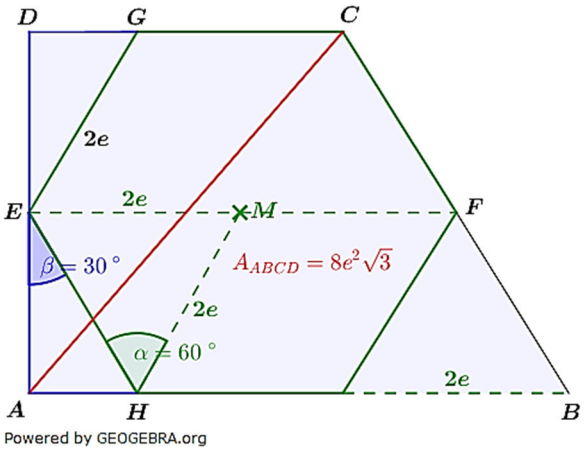
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2017

Lösungslogik

Fläche des Trapezes $ABCD$:

Die Fläche des Trapezes entspricht acht Mal dem Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks EHM.
Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken. Das rechts an das Sechseck angeflanschte Dreieck ist ebenfalls gleichseitig mit einer Seitenkante von $2e$.
Die beiden linksseitigen Dreiecke AHE und EGD sind jeweils halbe gleichseitige Dreiecke mit der Länge der Grundseiten HE bzw. $EG = 2e$.



Die Flächenformel für ein gleichseitiges Dreieck lautet $A_{Dreieck} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung).

Länge der Strecke $\overline{AC}$:

$\overline{AC}$ lässt sich über den Satz des Pythagoras berechnen. Hierzu benötigen wir die Strecke $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$.
$\overline{AD}$ ist zwei Mal $\overline{AE}$, Berechnung von $\overline{AE}$ über den $cos\beta$ mit $\beta = 30\,°$.

Klausuraufschrieb

Fläche des Trapezes $ABCD$:

Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken EHM. Das rechts an das Sechseck angeflanschte Dreieck ist ebenfalls gleichseitig mit der Seitenkante $a = 2e$.
Die links an das Sechseck angeflanschten Dreiecke AHE und EGD sind jeweils ein halbes gleichseitiges Dreieck, zusammen also ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit der Seitenkante $a = 2e$.
Das Trapez hat somit eine Fläche von 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenkante $a = 2e$.

$$A_{ABCD} = 8 \cdot A_{HME} = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 8 \cdot \frac{4e^2}{4}\sqrt{3} = 8e^2\sqrt{3}$$

q.e.d.

Länge der Strecke $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AE}$

$\overline{AE}$: $\cos(30°) = \frac{\overline{AE}}{\overline{HE}}$ | $\cdot \overline{HE}$

$\overline{AE} = \overline{HE} \cdot \cos(30°) = 2e \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AE} = 2e\sqrt{3}$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{DG} + \overline{GC} = e + 2e = 3e$

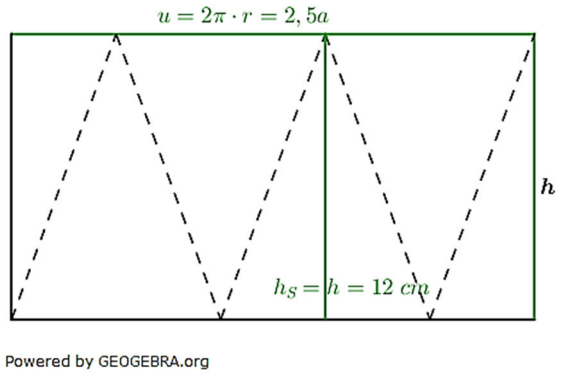
$\overline{AC} = \sqrt{(2e\sqrt{3})^2 + (3e)^2} = \sqrt{12e^2 + 9e^2} = \sqrt{21e^2} = e\sqrt{21}$

Die Strecke $\overline{AC}$ ist $e\sqrt{21}$ LE lang.

Lösung W2a/2017

Lösungslogik

Das Rechteck der Zylinderabwicklung gemäß Aufgabe wird in fünf gleichseitige Dreiecke geschnitten, die den Mantel einer fünfeckigen Pyramide bilden. Dabei ist die Höhe der Seitenfläche gleich der gegebenen Höhe des Zylinders, also $h_{s_{pyr}} = h = 12$.

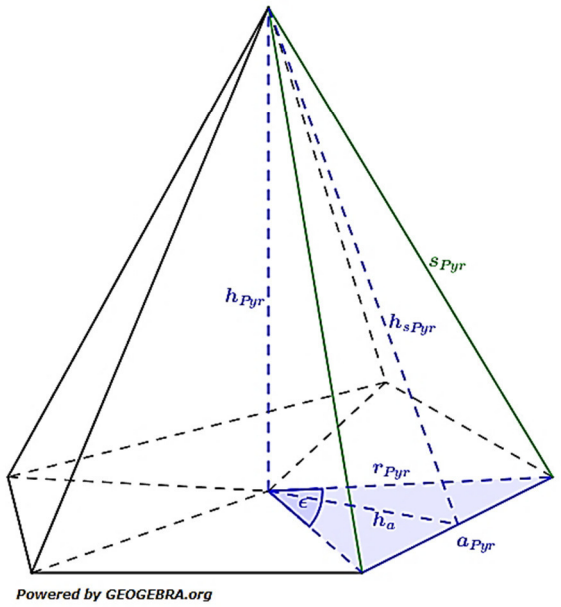


Die Grundseite der Pyramide a_{Pyr} errechnet sich über den Kreisumfang der Zylinder-Grundfläche mit $u = 2\pi \cdot r_{Zyl}$. Die Länge der Seitenkante der Pyramide ist dann $a = \frac{u}{2,5} = \frac{2\pi r_{Zyl}}{2,5}$.

Weiterhin benötigen wir für die Berechnung des Volumens der Pyramide deren Höhe h_{Pyr}. Da der Mantel der Pyramide ja der Rechteckfläche des abgewickelten Zylinders entspricht, können wir diese Höhe berechnen.

Fünfeckpyramide:

Die Grafik rechts zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir noch die Größe der Grundfläche der Pyramide.



Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge a_{Pyr} und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken.

Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel ϵ und mittels $tan\frac{\epsilon}{2}$ und $\frac{a_{Pyr}}{2}$ dann h_a. Mittels der Flächenformel für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks und daraus letztendlich die Fläche des Fünfecks.

Zur Berechnung des Volumens der Pyramide benötigen wir noch deren Höhe. Nachdem jedoch h_a und $h_{s_{Pyr}}$ bekannt sind, errechnet sich die Höhe über den Satz des Pythagoras. Nun kann über die Volumenformel für Pyramiden die Lösung der Aufgabe berechnet werden.

Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyr}$

G: Die Grundfläche der Pyramide ist nach Aufgabenstellung ein regelmäßiges Fünfeck.

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{Pyr} \cdot h_a$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

a_{Pyr}: In die Länge des Rechtecks des abgewickelten Zylinders passt die Grundkante der Pyramidengrundfläche 2,5 mal hinein (siehe Grafik der Aufgabenstellung). Die Länge des Rechtecks entspricht dem Umfang des Grundkreises des Zylinders mit $u = 2\pi r_{Zyl}$.

$a_{Pyr} = \frac{u_{Zyl}}{2,5} = \frac{2\pi \cdot 3,5}{2,5} = 8,7965$

Die Grundkante a_{Pyr} der Pyramide beträgt $8,8\ cm$.

h_a: $tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{a_{pyr}}{2 \cdot h_a}$

$h_a = \frac{a_{Pyr}}{2 \cdot tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}$

ϵ: $\epsilon = \frac{360°}{5} = 72\,°$ | Mittelpunkt-Winkel eines Fünfecks

$h_a = \frac{8,8}{2 \cdot tan(36\,°)} = 6,06$

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{Pyr} \cdot h_a = 2,5 \cdot 8,8 \cdot 6,06 = 133,3$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{h_{s_{Pyr}}^2 - h_a^2} = \sqrt{12^2 - 6,06^2} = \sqrt{107,2764} = 10,36$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 133,3 \cdot 10,36 = 460,3293$

Das Volumen der Pyramide beträgt $460,3\ cm^3$.

Lösung W2b/2017

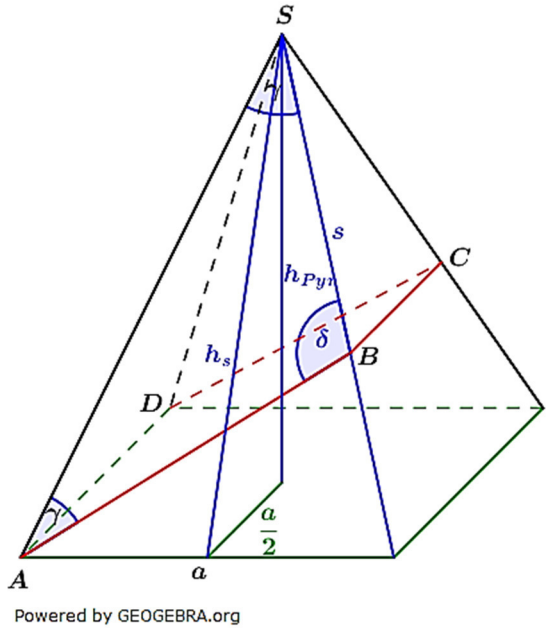
<u>Lösungslogik</u>

Der Umfang des Trapezes $ABCD$ ist:

$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

Um $\overline{AB}$ berechnen zu können, benötigen wir die Winkel γ und δ.

Der Winkel γ ist der Spitzenwinkel einer Seitenfläche. Er kann ermittelt werden über $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, hierzu benötigen wir aber die Höhe h_s der Seitenfläche. Diese können wir allerdings über $\frac{1}{4}$ des Mantels der Pyramide berechnen. Die Oberfläche ist gegeben, wir subtrahieren davon die Grundfläche (Quadrat mit $a = 10\ cm$) und dividieren das Ergebnis durch 4.



Über die Flächenformel eines Dreiecks kann nun h_s berechnet werden und daraus dann der Winkel γ. Wegen $\overline{AB} = \overline{BS}$ ist das Dreieck ABS gleichschenklig und somit der Winkel $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma$.

Mit Hilfe des Sinussatzes können wir nun die Strecke $\overline{AB}$ berechnen, sofern uns noch die Länge einer Seitenkante s bekannt ist. Diese ist über den Satz des Pythagoras aus den bekannten Strecken $\frac{a}{2}$ und h_s ermittelbar.

Es fehlt uns jetzt lediglich noch die Länge der Strecke $\overline{BC}$. Diese kann am einfachsten über dem zweiten Strahlensatzberechnet werden, denn die Strecke $\overline{BC}$ verläuft parallel zur Grundkante a. Somit gilt:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s}$ => $\overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s}$

Klausuraufschrieb

Gesucht: $u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a = 10\ cm$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{s}{\sin(\delta)}$ | Sinussatz

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)}$

γ: $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a}{2 \cdot h_s}$

h_s: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4} \cdot M_{Pyr}$

$h_s = \frac{M_{Pyr}}{2a}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = O_{Pyr} - G_{Pyr} = 357 - 100 = 257$

$h_s = \frac{257}{2 \cdot 10} = 12{,}85$

$tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{10}{2 \cdot 12{,}85} = 0{,}3891$

$\frac{\gamma}{2} = tan^{-1}(0{,}3891) = 21{,}26\,°$

$\gamma = 42{,}52\,°$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 180° - 2 \cdot 42{,}52 = 94{,}96\,°$

s: $s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}85^2 + 5^2} = 13{,}79$

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{13{,}79 \cdot \sin(42{,}52\,°)}{\sin(94{,}96\,°)} = 9{,}35$

$\overline{BC}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s}$ | 2. Strahlensatz

$\overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s} = 9{,}35 \cdot \frac{10}{13{,}79} = 6{,}78$

$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$u = 10 + 2 \cdot 9{,}35 + 6{,}78 = 35{,}48$

Das Trapez $ABCD$ hat einen Umfang von $35{,}5$ cm.

Lösung W3a/2017

Lösungslogik

Zuordnung der Graphen, Vervollständigung der Funktionsgleichungen:
Die Zuordnung der Graphen erfolgt über entweder deren Schnittpunkte mit der y-Achse bzw. über die Scheitelpunkte.
Vervollständigung über Punktproben.

Gerade g:
Aufstellung der Geradengleichung durch zwei Punkte, hier die Scheitelpunkte von p_2 und p_3.

Nachweis von Scheitelpunkt p_1 auf g:
Punktprobe von S_1 auf g.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Zuordnung der Graphen, Vervollständigung der Funktionsgleichungen:

(A) gehört zu p_3, denn nur p_3 hat den Scheitel $S_3(0|-1)$.

(B) gehört zu p_2, denn $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$ mit dem Scheitel $S_2(3|-4)$.

(C) gehört zu p_1, denn $y = x^2 + 4x + q = (x+2)^2 - 4 + q$ mit dem Scheitel $S_1(-2|-1)$.

a: $y = ax^2 - 1$ | Punktprobe mit $N_2(2|0)$

$0 = a \cdot 2^2 - 1$

$0 = 4a \;\; => \;\; a = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

b: $y = x^2 + 4x + q$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$5 = 0 + 4 \cdot 0 + q$

$q = 5$

$y = x^2 + 4x + 5$

Gerade g:

g: $S_2(3|-4)$ $S_3(0|-1)$

$y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-4)}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1$

y-Achsenabschnitt $b = -1$ wegen $S_3(0|-1)$.

$y = -x - 1$

Nachweis von Scheitelpunkt p_1 auf g:

$y = -x - 1$ | Punktprobe mit $S_1(-2|-1)$

$-1 = -(-2) - 1 = -1$

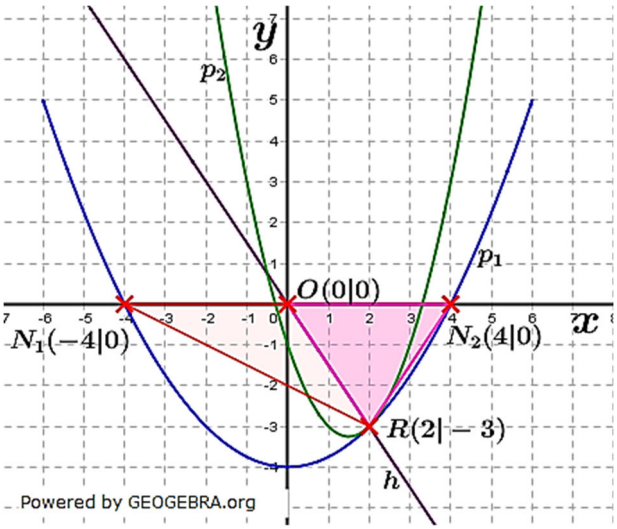
$S_1(-2|1) \in g$ **q.e.d.**

Lösung W3b/2017

Lösungslogik

Gerade h:

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den gegebenen Scheitelpunkt. Gleichsetzung von p_1 und p_2 führt zum Schnittpunkt R.
Bestimmung von m der Ursprungsgeraden h.



Flächeninhalt Dreieck N_1RN_2:

Berechnung der Nullstellen N_1 und N_2 von p_1, die Strecke $\overline{N_1N_2}$ ist Grundseite des Dreiecks mit der Höhe 3 ($|y|$-Koordinate von R).

Flächeninhalt Dreieck ORN_2:

Die Strecke $\overline{ON_2}$ ist Grundseite des Dreiecks mit derselben Höhe 3 wie Dreieck N_1RN_2.

Klausuraufschrieb

Gerade h:

p_2: $y = (x-1{,}5)^2 - 3{,}25 = x^2 - 3x + 2{,}25 - 3{,}25$

$y = x^2 - 3x - 1$

$p_1 \cap p_2$: $x^2 - 3x - 1 = \frac{1}{4}x^2 - 4 \quad | \quad -\frac{1}{4}x^2;\ +4$

$\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = 0 \quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$x_1 = 2$

$x_1 \to p_1$: $y_1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 4$

$y_1 = 1 - 4 = -3$

Der Schnittpunkt ist $R(2|-3)$.

h: $y = \frac{y_R}{x_R} \cdot x = \frac{-3}{2} \cdot x$

$y = -1{,}5x$

Flächeninhalt Dreieck N_1RN_2:

Nullstellen p_1:

N_1/N_2: $0 = \frac{1}{4}x^2 - 4$

$x^2 = 16 \quad | \quad \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm 4$

$N_1(-4|0);\quad N_2(4|0)$

N_1RN_2: $A_{N_1RN_2} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$

$g = \overline{N_1N_2} = 8 \qquad h_g = |y_R| = 3$

$A_{N_1RN_2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12\ FE$

Flächeninhalt Dreieck ORN_2:

Argumentation:

Die Grundseite dieses Dreiecks ist halb so groß wie die des Dreiecks N_1RN_2, die Höhe ist jedoch gleich groß.

Bastian hat Recht.

Durch Rechnung:

ORN_2: $A_{ORN_1} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$

$g = \overline{ON_2} = 4 \qquad h_g = |y_R| = 3$

$A_{ORN_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6\ FE$

Bastian hat Recht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2017

Lösungslogik

Höchstens einmal ☺:

An Hand der gegebenen Mittelpunkt-Winkel legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole ☺, 😐, sowie ☹ fest. Berechnung der Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ über das Gegenereignis „zweimal ☺„.

Erwartungswert

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Faires Spiel:

Der Erwartungswert $E(X)$ muss Null sein.

Für den zu ändernden Gewinn für „zweimal ☺„ schreiben wir die Variable a.

Klausuraufschrieb

Höchstens einmal ☺:

$P(☺) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$; $P(😐) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $P(☹) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$

Das Gegenereignis von „höchstens einmal ☺„ lautet „zweimal ☺„.

$P(höchstens\ einmal\ ☺) = 1 - P(zweimal\ ☺) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{36} \approx 97{,}2\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ beträgt etwa $97{,}2\ \%$.

Erwartungswert:

	$P(zweimal\ ☺)$	$P(zweimal\ 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}50\ €$	$1{,}50\ €$	$-0{,}50\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}0972€$	$0{,}09375\ €$	$-0{,}4549\ €$
$E(X)$	$0{,}0972\ € + 0{,}09375\ € - 0{,}4549\ € = -0{,}26335\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}26\ €$ *(aus der Sicht des Spielers).*

Faires Spiel:

	$P(zweimal\ ☺)$	$P(zweimal\ 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$a - 0{,}50\ €$	$1{,}50\ €$	$-0{,}50\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{4}{144}a - 0{,}0139€$	$0{,}09375\ €$	$-0{,}4549\ €$
$E(X)$	$0{,}0278a - 0{,}0139\ € + 0{,}09375\ € - 0{,}4549\ €$ $= 0{,}0278a - 0{,}37505\ €$		

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist, also:

$0{,}0278a - 0{,}37505\ € = 0 \quad | \quad +0{,}37505\ €$

$0{,}0278a = 0{,}37505\ € \quad | \quad :0{,}0278$

$a = 13{,}491007\ €$

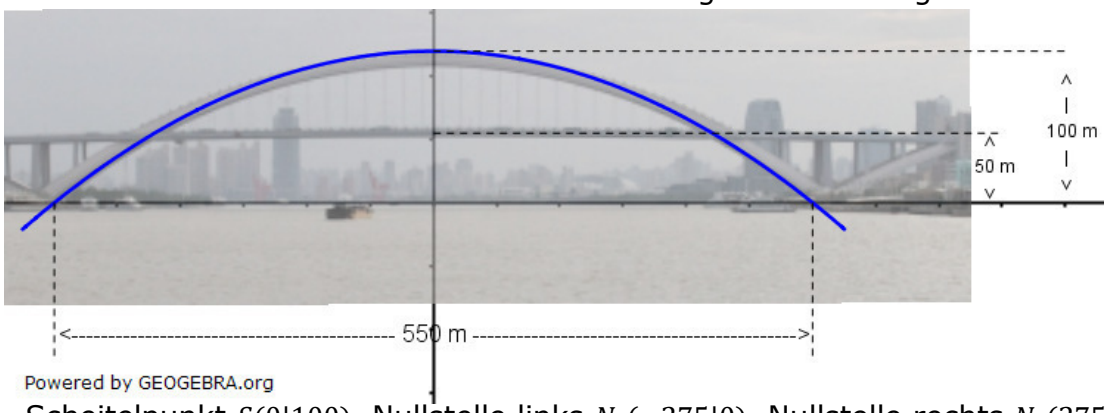
Der Gewinn für „zweimal ☺„ muss $13{,}50\ €$ *betragen, damit das Spiel fair ist.*

Lösung W4b/2017

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Aus der Aufgabenstellung mit $y = ax^2 + c$ muss die y–Achse durch den höchsten Punkt des Brückenbogens verlaufen, da die gegebene Parabel eine in x-Richtung unverschobene Parabel ist.
Daraus bestimmen sich die einzelnen Punkte gemäß nachfolgender Grafik.



Scheitelpunkt $S(0|100)$, Nullstelle links $N_1(-275|0)$, Nullstelle rechts $N_1(275|0)$

Funktionsgleichung des Brückenbogens:

$c = 100$ wegen Scheitelpunkt in $S(0|100)$.
Über eine Punktprobe mit $N_1(275|0)$ in $y = ax^2 + 100$ berechnen wir a.

Länge der Fahrbahn:

Die Länge der Fahrbahn ergibt sich aus der Strecke vom linken Schnittpunkt bis zum rechten Schnittpunkt der Fahrbahn mit dem Brückenbogen. Der y-Wert an diesen Stellen beträgt $50\,m$. Wir setzen $y = 50$ und lösen die Funktionsgleichung nach x auf.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt somit bei $S(0|100)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Linke Nullstelle: $N_1(-275|0)$
Rechte Nullstelle: $N_2(275|0)$

Funktionsgleichung des Brückenbogens:

$c = 100$ wegen Scheitelpunkt in $S(0|100)$.

$y = ax^2 + 100$

$0 = a275^2 + 100$ | Punktprobe mit $N_2(275|0)$

$-100 = 75625a$ | $:75625$

$-\frac{100}{75625} = a$

$a = -0{,}001322$

Die Funktionsgleichung des Brückenbogens lautet $y = -0{,}00132x^2 + 100$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Länge der Fahrbahn:

Der y-Wert des Schnittpunktes der Fahrbahn und des Brückenbogens hat den Wert 50.

$50 = -0{,}00132x^2 + 100 \quad | \quad -100$

$-50 = -0{,}00132x^2 \quad | \quad :(-0{,}00132)$

$\frac{-50}{-0{,}00132} = x^2$

$x^2 = 37878{,}7879 \quad | \quad \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm 194{,}625$

$l = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 194{,}625 = 389{,}25$

Die Länge der Fahrbahn beträgt etwa $390\,m$.

Aufgabe W1a/2018

Gegeben ist das Dreieck ABC.
Es gilt:

$\overline{AB} = 12{,}0\ cm$

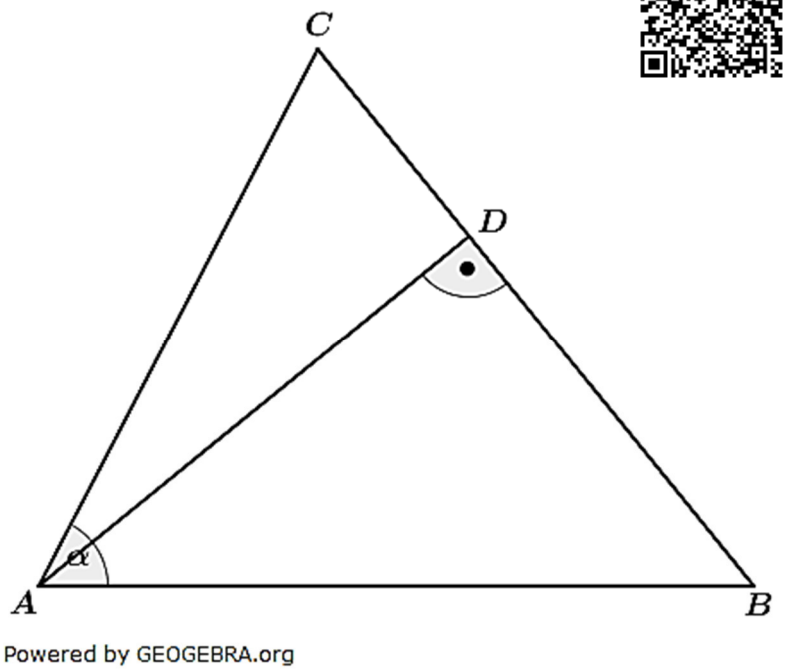
$\overline{BC} = 11{,}6\ cm$

$A_{ABC} = 54{,}0\ cm^2$

Berechnen Sie den Winkel α sowie den Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$.

Lösung: $\alpha = 62{,}5\ °$

Abstand D von $\overline{AB}$ $5{,}9\ cm$

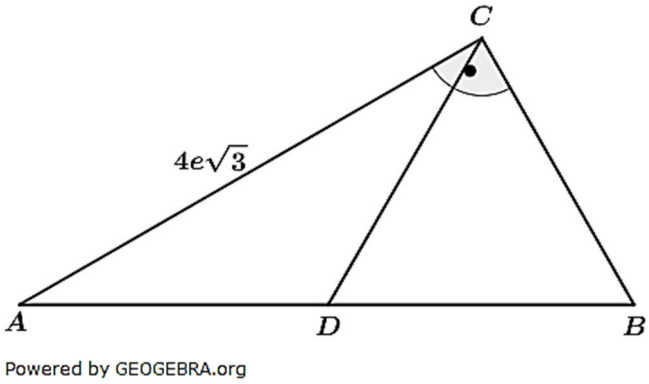


Aufgabe W1b/2018

Im rechtwinkligen Dreieck ABC liegt das gleichseitige Dreieck DBC.

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die beiden Dreiecke ADC und DBC flächengleich sind.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC soll $200\ cm^2$ betragen.
Für welchen Wert von e trifft dies zu?



Lösung: $e = 3{,}8\ cm$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W2a/2018

Ein massiver Kegel hat folgende Maße:

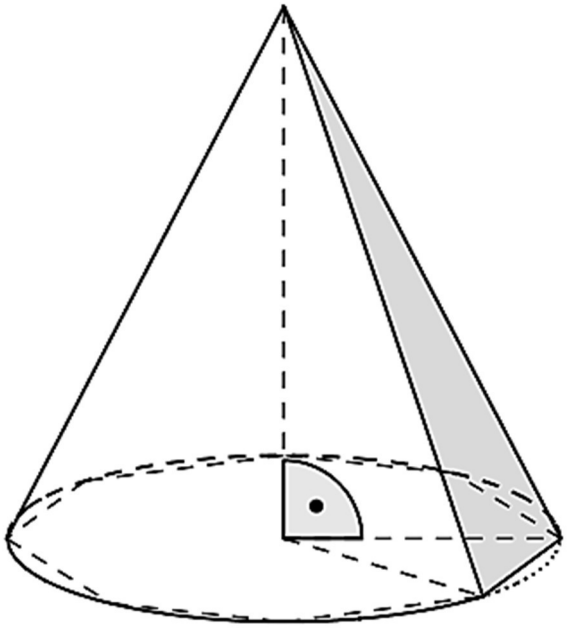
$V_{Kegel} = 500\ cm^3$

$d_{Kegel} = 13{,}0\ cm$

Dieser Kegel wird so bearbeitet, dass eine regelmäßige achtseitige Pyramide gleicher Höhe entsteht. Ein Manteldreieck ist bereits sichtbar.

Berechnen Sie das Volumen der entstehenden Pyramide.

Lösung: $V_{Pyr} = 450\ cm^3$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2018

Aus einem quadratischen Blatt Papier wird das Netz einer quadratischen Pyramide hergestellt.

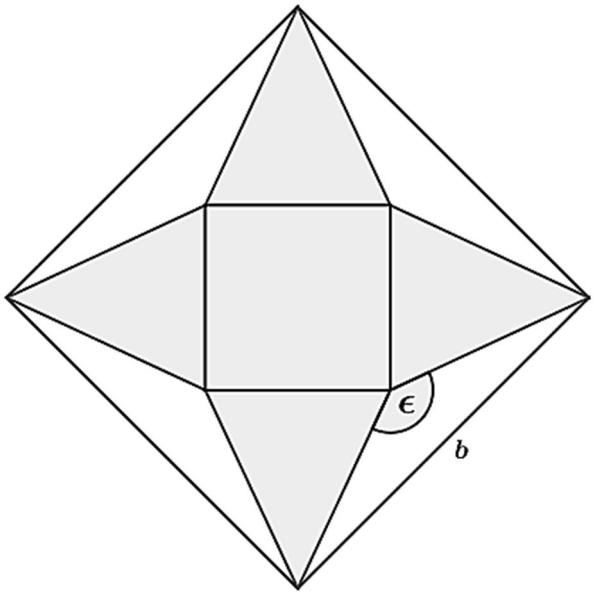
Es gilt:

$b = 20\ cm$

$\epsilon = 140\ °$

Berechnen Sie die Höhe der quadratischen Pyramide.

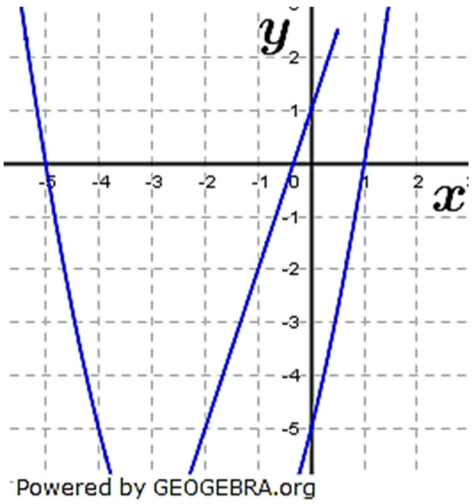
Lösung: $h_{Pyr} = 8{,}5\ cm$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W3a/2018

Das Schaubild zeigt Ausschnitte einer verschobenen Normalparabel p_1 und einer Geraden g.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Parabel p_1 und der Geraden g.



Die verschobene, nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(5|-2)$.
Prüfen Sie rechnerisch, ob der Schnittpunkt Q der beiden Parabeln auf der Geraden g liegt.

Die Gerade h verläuft durch die beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden h.

Lösungen: p_1: $y = x^2 + 4x - 5$
g: $y = 3x + 1$
Punkt Q liegt auf g
h: $y = x - 7$

Aufgabe W3b/2018

Die Parabel p der Form $y = ax^2 + c$ hat den Scheitel $S(0|-4{,}5)$. Sie geht durch den Punkt $P(-3|0)$.

Die Gerade g mit der Steigung $m = 1{,}5$ geht durch den Punkt $R(0|0{,}5)$. Sie schneidet die Parabel p in den Punkten A und C.

Die Punkte A und C sind die Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$.
Zudem sind die Punkte A und C Anfangs- und Endpunkt einer Diagonalen dieses Rechtecks.

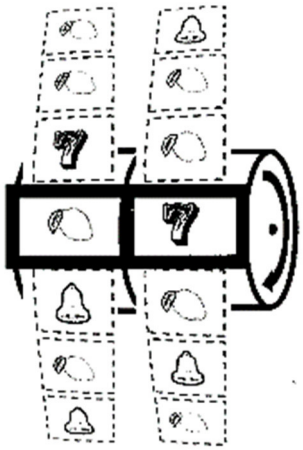
Die Seiten des Rechtecks verlaufen parallel zur x-Achse bzw. y-Achse.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

Lösung: $A_{ABCD} = 73{,}5\ FE$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2018

Im Technikunterricht wurde für ein Schulfest ein Zufallsgerät gebaut, bei dem sich zwei Walzen unabhängig voneinander drehen.
Die Walzen sind mit Symbolen beklebt. Auf jeder Walze sind vier Zitronen, zwei Glocken und eine Sieben abgebildet.
Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster zwei Symbole nebeneinander.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "zweimal Glocke"?

Das Zufallsgerät wird für ein Glücksspiel eingesetzt.
Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.
Was bedeutet dies für den Spieler?

Ereignis	Gewinn
Zweimal Glocke	4,00 €
Zweimal Sieben	10,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel : 1,00 €	

Der Einsatz soll auf 1,20 € erhöht werden.
Der Gewinn für "zweimal Glocke" sowie der Erwartungswert bleiben gleich.

Merle behauptet: "Der Gewinn für "zweimal Sieben" beträgt dann etwa 20 €."
Hat Merle Recht? Begründen Sie rechnerisch.

Aufgabe W4b/2018

Ein Golfspieler schlägt seinen Golfball ab. Die Flugbahn des Golfballes ist annähernd parabelförmig.
In einer horizontalen Entfernung von $95\,m$ zum Abschlag erreicht der Ball seine maximale Flughöhe von $25\,m$ über dem Boden.
Geben Sie eine Gleichung der zugehörigen Parabel an.

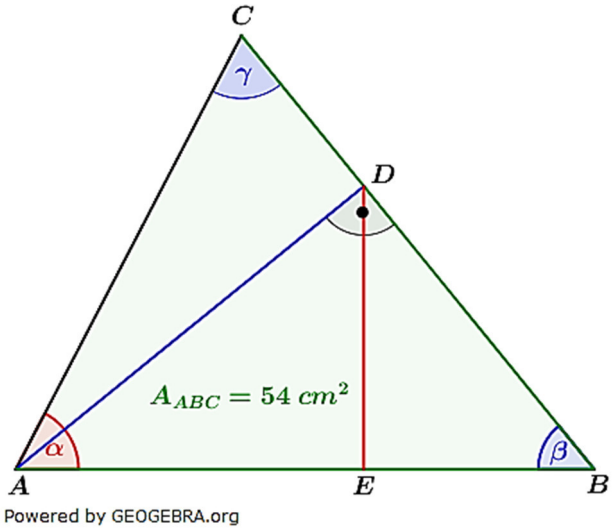
Ein $15\,m$ hoher Baum steht in $45\,m$ Entfernung vom Abschlag.
In welchem Abstand überfliegt der Ball die Baumspitze?

Das Loch befindet sich auf einer $2\,m$ höher gelegenen Ebene in $180\,m$ horizontaler Entfernung vom Abschlag.
In welcher Entfernung vom Loch trifft der Ball auf der höher gelegenen Ebene auf?

Lösungen: $p: y = -0{,}0028x^2 + 25$
Der Ball fliegt ca. $3\,m$ *über die Baumspitze.*
Entfernung zum Loch ca. $5{,}6\,m$.

Lösung W1a/2018

Lösungslogik



Berechnung der Strecke $\overline{AD}$ über die Flächenformel für das Dreieck ABC, denn die Strecke $\overline{BC}$ als auch der Flächenhalt des Dreiecks ist bekannt.
Berechnung des Winkels β über den sin.
Berechnung der Strecke $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Strecke $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD}$.
Berechnung des Winkels γ über den tan.
Berechnung von α über die Winkelsumme im Dreieck ABC.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ABD über die Grundseite $\overline{BD}$ und die Höhe $\overline{AD}$.
Berechnung der Höhe $\overline{ED}$ über die Fläche des Dreiecks ABD und der Grundseite $\overline{AB}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{AD}$: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

$54 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot 11{,}6$

$\overline{AD} = \frac{108}{11{,}6} = 9{,}31$

β: $sin\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{9{,}31}{12{,}0} = 0{,}77583$

$\beta = \sin^{-1} 0{,}77583 = 50{,}88\,°$

$\overline{BD}$: $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BD} = \sqrt{12^2 - 9{,}31^2} = 7{,}57$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = 11{,}6 - 7{,}57 = 4{,}03$

γ: $tan\gamma = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{9{,}31}{4{,}03} = 2{,}31017$

$\gamma = \tan^{-1} 2{,}31017 = 66{,}59\,°$

α: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 50{,}88° - 66{,}59° = 62{,}53\,°$

Der Winkel α ist $62{,}5\,°$ groß.

A_{ABD}: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}57 \cdot 9{,}31 = 35{,}24$

$\overline{ED}$: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED}$

$35{,}24 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \overline{ED}$

$\overline{ED} = \frac{70{,}48}{12} = 5{,}87$

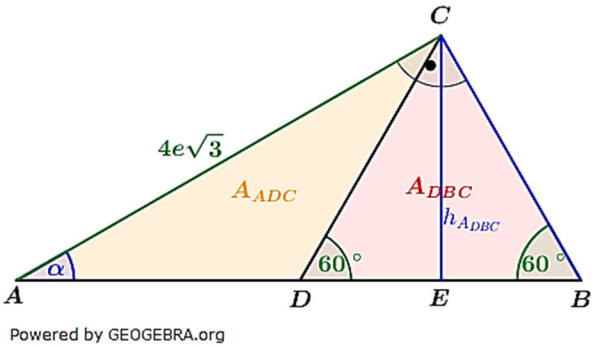
Der Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$ beträgt $5{,}9\ cm$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2018

Lösungslogik

Fläche der Dreiecke DBC und ADC:
Durch die Aufgabenstellung „gleichseitiges Dreieck DBC" sind die Winkel des Dreiecks mit $60\,°$ bekannt.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den tan.
Berechnung von $h_{A_{DBC}}$ über den sin.
Berechnung von A_{DBC}.
Berechnung von A_{ABC}.
Berechnung von A_{ADC} über $A_{ABC} - A_{DBC}$.



e für Fläche von $200\,cm^2$ für Dreieck ABC:
Wir setzen $A_{ABC} = 200$ und lösen die Flächengleichung nach 2 auf.

Klausuraufschrieb

Fläche der Dreiecke DBC und ADC:

$\overline{BC}$: $\quad tan(60\,°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{tan(60\,°)} = \frac{4e\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4e$

$h_{A_{DBC}}$: $\quad sin(60\,°) = \frac{h_{A_{DBC}}}{\overline{BC}}$

$h_{A_{DBC}} = \overline{BC} \cdot \sin(60\,°) = 4e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

A_{DBC}: $\quad A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_{A_{DBC}} = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot 2e\sqrt{3} = 4e^2\sqrt{3}$

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4e\sqrt{3} \cdot 4e = 8e^2\sqrt{3}$

A_{ADC}: $\quad A_{ADC} = A_{ABC} - A_{DBC} = 8e^2\sqrt{3} - 4e^2\sqrt{3} = 4e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

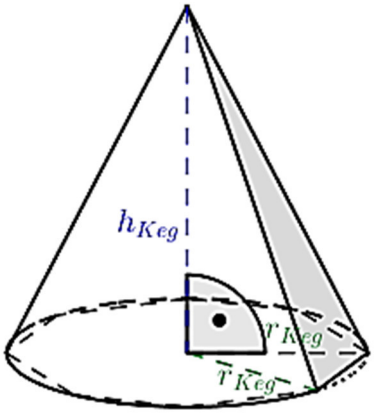
e für Fläche von $200\,cm^2$ für Dreieck ABC:

$A_{ABC} = 8e^2\sqrt{3}$	|	siehe Aufgabe 1. Teil
$8e^2\sqrt{3} = 200$	|	$:(8\sqrt{3})$
$e^2 = \frac{200}{8\sqrt{3}} = 14{,}4338$	|	$\sqrt{}$
$e = 3{,}799$		

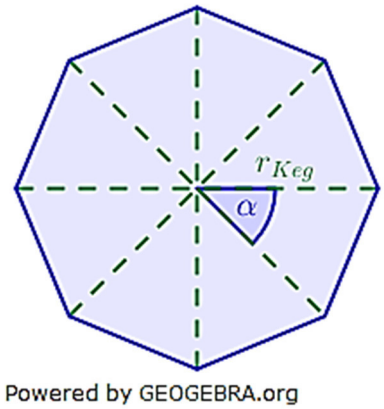
Für eine Fläche von $200\,cm^2$ des Dreiecks ABC muss $e = 3{,}8\,cm$ sein.

Lösung W2a/2018

Lösungslogik



Über die Volumenformel des Kegels können wir $h_{Pyr} = h_{Keg}$ bestimmen.
Die Volumenformel einer Pyramide lautet
$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$.
Da wir h_{Pyr} bereits kennen, benötigen wir nur noch die Größe der Grundfläche G. Diese ist ein gleichmäßiges Achteck.
Der Mittelpunktswinkel der Grundfläche ist
$\alpha = \frac{360\,°}{8} = 45\,°$.
Damit ergibt sich die Fläche des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche über den trigonometrischen Flächeninhalt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot r_{Keg}^2 \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5^2 \cdot \sin(45°)$.
Die Grundfläche setzt sich aus acht solcher Teildreiecke zusammen, sodass wir das Volumen nun berechnen können.



Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyr}$

h_{Pyr}: $V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

$500 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6{,}5^2 h_{Keg}$

$500 = 44{,}2441 \cdot h_{Keg}$ | $: 44{,}2441$

$h_{Keg} = \frac{500}{44.2441} = 11{,}30 = h_{Pyr}$

α: $\alpha = \frac{360}{8} = 45\,°$

G: Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Achteck, dessen Fläche sich aus acht gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzt mit einer Schenkellänge von $s = r_{Keg} = 6{,}50$ und einem Spitzenwinkel von $\alpha = 45\,°$.

$G = 8 \cdot A_{Dreieck}$

$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_{Keg}^2 \cdot sin(\alpha)$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 4 \cdot 6{,}5^2 \cdot sin(45\,°) = 119{,}50$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 119{,}5 \cdot 11{,}3 = 450{,}12$

Das Volumen der Pyramide beträgt $450\ cm^3$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W2b/2018

Lösungslogik

Die Höhe einer quadratischen Pyramide errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras über:

$$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

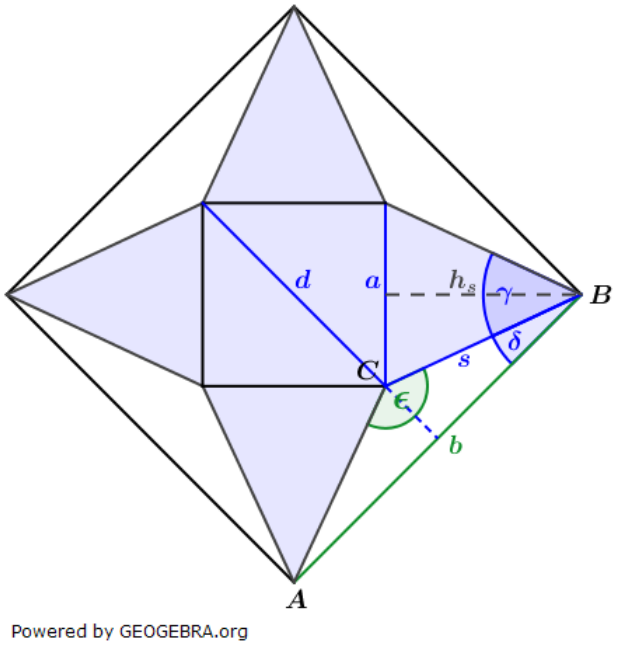
bzw.

$$h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Wir müssen also h_s, d und a bestimmen.

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, der Spitzenwinkel ϵ gegeben. Hieraus berechnen wir δ und den Spitzenwinkel des Seitendreiecks der Pyramide γ.

Über den $cos(\delta)$ können wir die Seitenkante s eines Seitendreiecks der Pyramide ermitteln. Über $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ berechnen wir a und daraus wiederum d.



Klausuraufschrieb

Gesucht: $h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ alternativ $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

δ: $\delta = \frac{180\,° - \epsilon}{2}$ | Dreieck ABC ist gleichschenklig

γ: $2 \cdot \delta + \gamma = 90\,°$

$\gamma = 90\,° - 2 \cdot \delta = 90\,° - 40\,° = 50\,°$

s: $\cos(\delta) = \frac{\frac{b}{2}}{s}$

$s = \frac{\frac{b}{2}}{\cos(\delta)} = \frac{10}{\cos(20\,°)} = 10{,}64$

a: $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s}$

$a = 2 \cdot s \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 10{,}64 \cdot \sin(25°) = 8{,}99$

d: $d = a \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale im Quadrat (Formelsammlung)

$d = 8{,}99 \cdot \sqrt{2} = 12{,}72$

alternativ

h_s: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 4{,}495^2} = 9{,}64$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 6{,}36^2} = 8{,}53$

alternativ

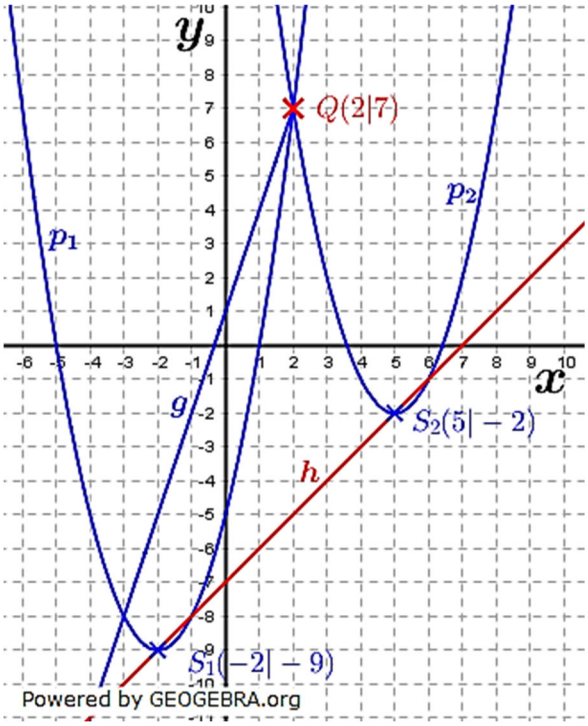
$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}64^2 - 4{,}495^2} = 8{,}53$

Die Höhe der Pyramide beträgt $8{,}5\ cm$.

Lösung W3a/2018

Lösungslogik

Parabelgleichung p_1:
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$. Aus der gegebenen Graphik lesen wir $c = -5$ ab. Zur Berechnung von b machen wir eine Punktprobe, z. B. mit der Nullstelle $N_1(-5|0)$.
Geradengleichung g:
Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet $y = mx + b$.
Aus der gegebenen Graphik lesen wir $b = 1$ ab. Das Steigungsdreieck durch die Punkte $P(0|1)$ und $Q(-5|-2)$ liefert die Steigung m.
Schnittpunkt p_1 und p_2:
Wir stellen die Parabelgleichung von p_2 mit Hilfe des gegebenen Scheitels auf, setzen die beiden Parabelgleichung gleich und lösen nach x auf.



Prüfung ob Schnittpunkt Q auf der Geraden g liegt:
Wir machen eine Punktprobe mit den Koordinaten von Q und der Geraden g.

Geradengleichung h:
Wir stellen die Parabelgleichung p_1 von der allgemeinen in die Scheitelpunktform um. Danach ermitteln wir m der Geraden h über die beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2; machen dann eine Punktprobe mit S_1 (alternativ S_2) zur Ermittlung von b.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1:	$y = x^2 + bx + c$		
	$c = -5$	|	abgelesen aus Graphik
	$N_1(-5\|0)$	|	abgelesen aus Graphik
	$0 = (-5)^2 - 5b - 5$	|	Punktprobe mit N_1
	$-5b = -20$	|	$:(-5)$
	$b = 4$		
	$y = x^2 + 4x - 5$		

Geradengleichung g:

g:	$y = mx + b$		
	$b = 1$	|	abgelesen aus Graphik
	$P(0\|1);\ Q(-2\|-5)$	|	abgelesen aus Graphik
	$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-5-1}{-2-0} = 3$		
	$y = 3x + b$		
	$1 = 3 \cdot 0 + b \ \Rightarrow\ b = 1$	|	Punktprobe mit $P(0\|1)$
	$y = 3x + 1$		

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schnittpunkt p_1 und p_2:

p_1: $y = x^2 + 4x - 5$

p_2: $y = (x-5)^2 - 2$ | Scheitelpunktform

$y = x^2 - 10x + 23$

$p_1 \cap p_2$: $x^2 + 4x - 5 = x^2 - 10x + 23$

$14x = 28$

$x = 2$

$x \to p_1$: $y = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7$

Q: $Q(2|7)$

Prüfung ob Schnittpunkt Q auf der Geraden g liegt:

$7 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2 + 1$ | Punktprobe mit Q auf g

$7 = 7$ | wahre Aussage

Der Punkt Q liegt auf der Geraden g.

Geradengleichung h:

h: $y = mx + b$

S_1: $y = (x+2)^2 - 4 - 5$

$y = (x+2)^2 - 9$

$S_1(-2|-9)$

m: $m = \frac{y_{S_1} - y_{S_2}}{x_{S_1} - x_{S_2}} = \frac{-9-(-2)}{-2-5} = \frac{-7}{-7} = 1$

$y = x + b$

$-9 = -2 + b$ | Punktprobe mit S_1

$b = -7$

h: $y = x - 7$

Lösung W3b/2018

<u>Lösungslogik</u>

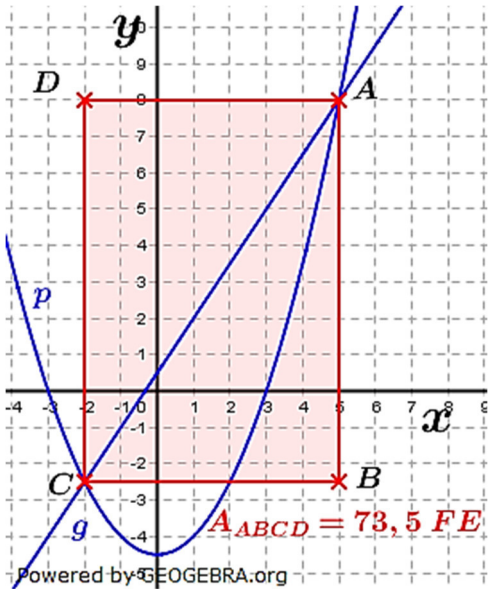
Parabelgleichung p:
Über die Angabe $S(0|-4{,}5)$ ermitteln wir $c = -4{,}5$. Eine Punktprobe mit $P(-3|0)$ liefert den Parameter a.

Geradengleichung g:
Mit $m = 1{,}5$ und $R(0|0{,}5)$ ergibt sich die Geradengleichung zu $y = 1{,}5x + 5$.

Schnittpunkte A und C:
Durch Gleichsetzung von p und g berechnen wir die Koordinaten von A und C.

Punkte B und D:
Wir ermitteln die Koordinaten von B und D aus der Angabe, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$:
Der Flächeninhalt ergibt sich aus der Multiplikation der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.



Klausuraufschrieb

Parabelgleichung:

p: $y = ax^2 - 4{,}5$ | $c = -4{,}5$ wegen Punkt $S(0|-4{,}5)$

$0 = a \cdot (-3)^2 - 4{,}5$ | Punktprobe mit $P(-3|0)$

$a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 4{,}5$

g: $y = 1{,}5x + b$ | Steigung $m = 1{,}5$ ist gegeben

$b = 5$ | Wegen gegebenem Punkt $R(0|0{,}5)$

$y = 1{,}5x + 0{,}5$

Schnittpunkte A und C:

$p \cap g$: $\frac{1}{2}x^2 - 4{,}5 = 1{,}5x + 0{,}5$ | $-1{,}5x;\ -0{,}5$

$\frac{1}{2}x^2 - 1{,}5x - 5{,}0 = 0$ | $\cdot 2$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 1{,}5 \pm 3{,}5$

$x_1 = 5;\quad x_2 = -2$

$y_A = 1{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 = 8$

$y_B = 1{,}5 \cdot (-2) + 0{,}5 = -2{,}5$

$A(5|8);\quad C = (-2|-2{,}5)$

Punkte B und D:

$B(5|-2{,}5);\quad D = (-2|8)$

Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$:

$\overline{AB} = y_B - y_A = 8 - (-2{,}5) = 10{,}5$

$\overline{BC} = x_B - x_C = 5 - (-2) = 7$

Fläche Rechteck $ABCD$:

$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 10{,}5 \cdot 7 = 73{,}50$

Das Rechteck $ABCD$ ist $73{,}5\ FE$ groß.

Lösung W4a/2018

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocke:

An Hand der gegebenen Anzahl Symbole auf den Rädern bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für das Symbol Glocke und berechnen diese über die erste Pfadregel.

Erwartungswert:

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Merles Behauptung:

Mit einem unveränderten Erwartungswert $E(X)$ und dem neuen Einsatz berechnen wir die Auszahlung für zweimal 7 neu.

Klausuraufschrieb

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P(Zitrone) = \frac{4}{7};\quad P(Glocke) = \frac{2}{7};\quad P(Sieben) = \frac{1}{7}$

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocken:

$P(Glocke; Glocke) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 8{,}16\ \%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Erwartungswert:

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}00\ €$	$9{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2449€$	$0{,}1837\ €$	$-0{,}8980\ €$
$E(X)$	$0{,}2449\ € + 0{,}1837\ € - 0{,}8980\ € = -0{,}4694\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}47\ €$ (aus der Sicht des Spielers).
Der Spieler verliert auf lange Sicht 0,47 € / Spiel

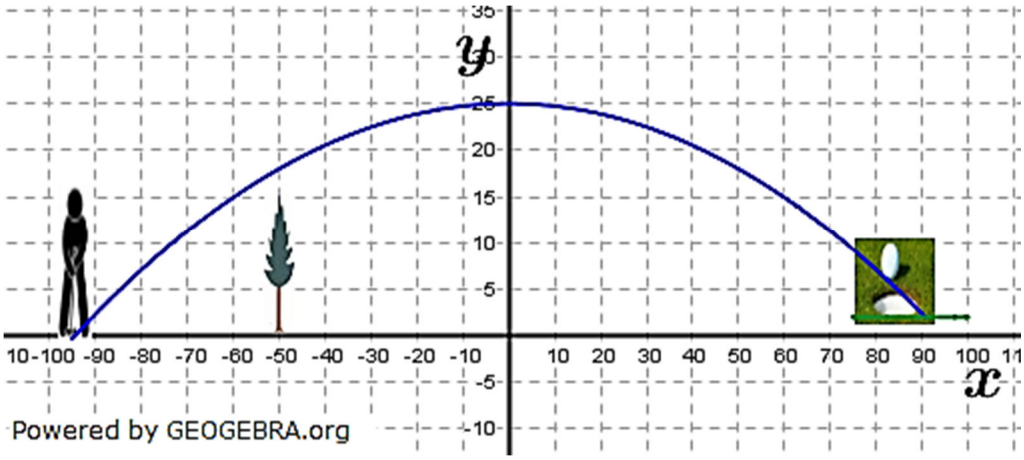
Merles Behauptung:
Neuer Einsatz ist $1{,}20\ €$; $E(X) = -0{,}47\ €$; Gewinn zweimal Glocke ist $4{,}00\ €$;
Gewinn zweimal 7 ist $a + 1{,}20\ €$.

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$2{,}80\ €$	$a - 1{,}20€$	$-1{,}20\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2286€$	$0{,}0204(a - 1{,}20)\ €$	$-1{,}0776\ €$
$E(X)$	$0{,}2286\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € - 0{,}0245\ € - 1{,}0776\ € = -0{,}47\ €$		

$0{,}2286\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € - 0{,}0245\ € - 1{,}0776\ € = -0{,}47\ €$
$-0{,}8735\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € = -0{,}47\ €$ | $+0{,}8735\ €$
$0{,}0204 \cdot a\ € = 0{,}4035\ €$ | $: 0{,}0204$
$a \approx 19{,}80\ €$
Merle hat Recht, der Gewinn für zweimal 7 ist etwa 20 € (19,80 €).

Lösung W4b/2018

<u>Lösungslogik</u>
Die nachfolgende Graphik verdeutlicht die Situation:



Der Abschlag des Golfspielers erfolgt im Punkt $P(-95|0)$. Der Scheitel der Parabel liegt bei $S(0|25)$. Die Spitze des Baumes liegt bei $B(-50|15)$. Der Ball trifft das Green in $Q(x_Q|2)$, das Loch befindet sich in $L(85|2)$

Gleichung der Parabel p (Flugbahn):
Über den Ansatz $y = ax^2 + c$ ermitteln wir über die beiden Punkte P und S die Parameter a und c.

Überflug über Baum:
Wir berechnen die Höhe des Golfballs für $x = -50$.

Entfernung zum Loch bei Aufschlag auf das Green:
Wir berechnen die positive x_Q-Koordinate bei einer Höhe von $y = 2$ und bilden danach die Differenz aus x_Q und 85.

<u>Klausuraufschrieb</u>
Gleichung der Parabel p (Flugbahn):

p: $y = ax^2 + 25$ | $c = 25$ wegen Punkt $S(0|25)$
$0 = a \cdot (-95)^2 + 25$ | Punktprobe mit $P(-95|0)$
$a = -\frac{25}{9025} \approx -0{,}0028$
$y = -0{,}0028x^2 + 25$

Überflug h über Baum:

h: $y = -0{,}0028 \cdot (-50)^2 + 25 = 18$ | y für $x = -50$
$h = 18 - 15 = 3$

Der Ball fliegt ca. $3\,m$ über die Baumspitze.

Entfernung d zum Loch bei Aufschlag auf das Green:

d: $2 = -0{,}0028x^2 + 25$ | $-25;\ :(-0{,}0028)$
$x^2 = 8214{,}29$ | $\sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 90{,}63$
Nur Lösung x_1 mit $90{,}63$ ist sinnvoll.
$d = 90{,}63 - 85 = 5{,}63$

Der Ball schlägt in einer Entfernung zum Loch von etwa $5{,}6\,m$ auf.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W1a/2019

Das Fünfeck $ABCDE$ besteht aus dem gleichseitigen Dreieck ABF, den beiden gleichschenkligen Dreiecken AFE und FBC sowie dem Drachenviereck $DEFC$.

Es gilt:

$\overline{AB} = 3{,}4\ cm$

$\overline{BC} = 7{,}0\ cm$

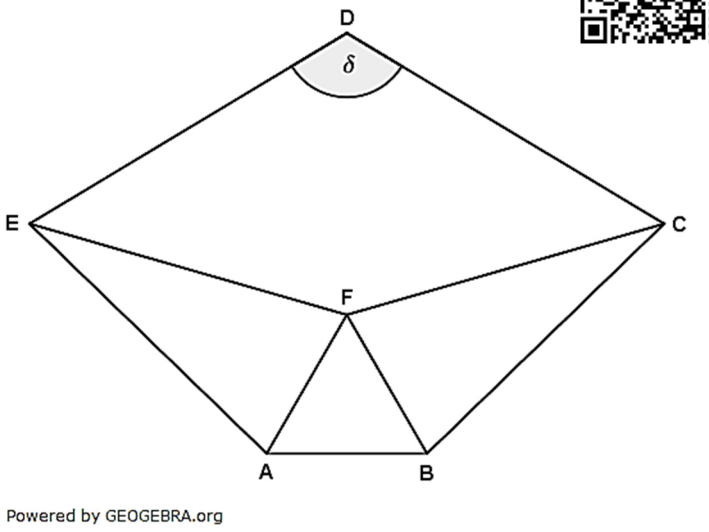
$\delta = 118{,}0°$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$.

TIPP: Sinussatz für Strecke $\overline{DF}$

Lösung: *Abstand D von $\overline{AB}$*

$8{,}9\ cm$



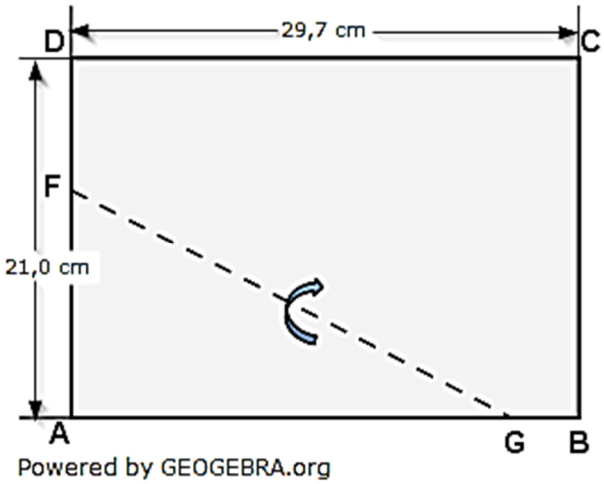
Aufgabe W1b/2019

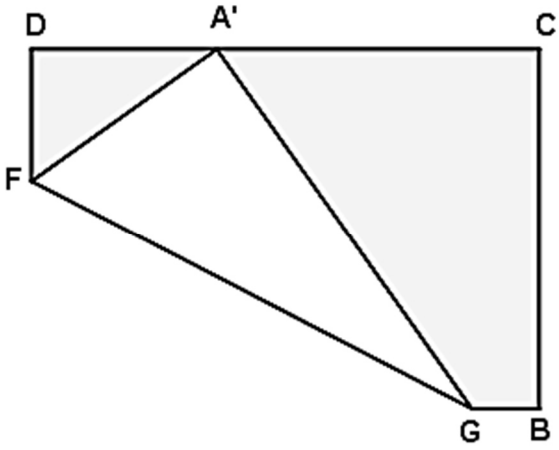
Ein DIN-A4-Blatt mit den Eckpunkten A, B, C und D wird entlang von $\overline{FG}$ gefaltet. Dadurch entsteht der Punkt A' auf $\overline{CD}$.

Es gilt:

$\overline{AF} = 13{,}3\ cm$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $GBCA'$.



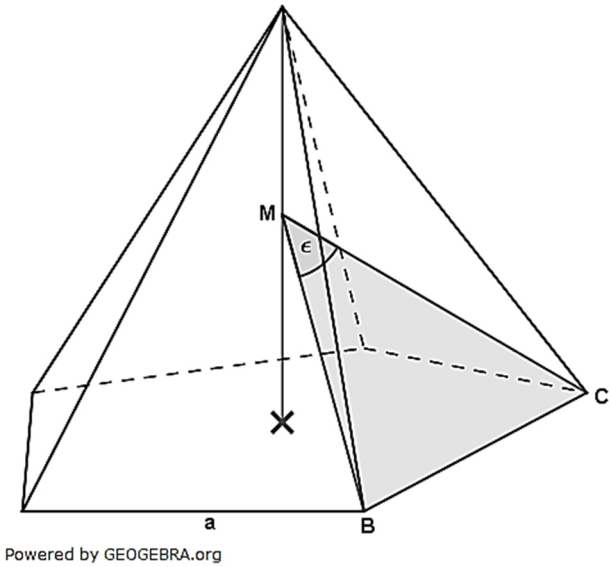


Lösung: $A_{GBCA'} = 239{,}5\ cm^2$

Aufgabe W2a/2019

In einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide liegt das gleichschenklige Dreieck BCM.
Es gilt:

$\overline{BM} = \overline{CM} = 8{,}0\ cm$
$\epsilon = 48\,°$
M halbiert die Höhe der Pyramide.



Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Der Punkt M bewegt sich auf der Höhe der Pyramide. Dadurch entsteht das Dreieck BCM'.

Berechnen Sie den minimalen und maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck BCM' annehmen kann.

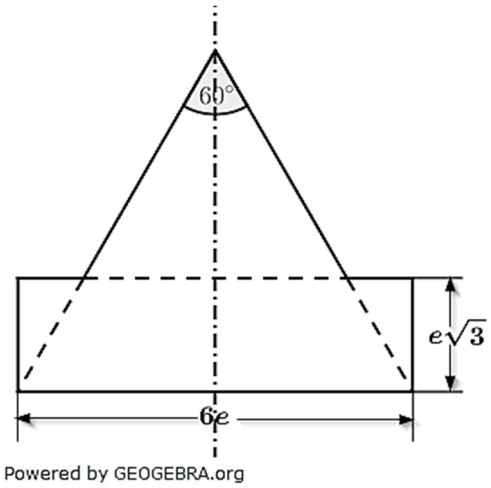
Lösungen: $h_{Pyr} = 11{,}5\ cm$
$A_{BCM'_{min}} = 14{,}6\ cm^2$
$A_{BCM'_{max}} = 40{,}3\ cm^2$

Aufgabe W2b/2019

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegel (siehe Achsenschnitt rechts).

Zeigen Sie, dass für das Volumen des zusammengesetzten Körpers gilt:

$$V_{ges} = \frac{35}{3} \cdot \pi \cdot e^3\sqrt{3}$$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3a/2019

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(2|2)$.
Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat mit der x-Achse die Schnittpunkte $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes T der beiden Parabeln.
Die Gerade g mit der Steigung $m = 2$ schneidet beide Parabeln ebenfalls im Punkt T. Berechnen Sie die Gleichung von g.
Berechnen Sie den Winkel, unter denen sich die Gerade g und die y-Achse schneiden.
Geben Sie die Gleichung einer Parabel p_3 an, die weder mit noch mit einen gemeinsamen Punkt hat.

Lösungen: *Schnittpunkt* $T(1|-3)$
$g: y = 2x + 1$
$\gamma_1 = 26{,}6\,°$; $\gamma_2 = 153{,}4\,°$
$y = 2(x-2)^2 + 3$; $alternativ\ \ y = -x^2$
Andere Lösungen denkbar

Aufgabe W3b/2019

Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ hat den Scheitelpunkt $S_1(0|6)$. Eine zweite Parabel p_2 die Gleichung $y = x^2 + 3x + q$.
Der Punkt $B(2|4)$ ist einer der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes A der beiden Parabeln.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A, B und $C(0|2)$ auf einer Geraden liegen.

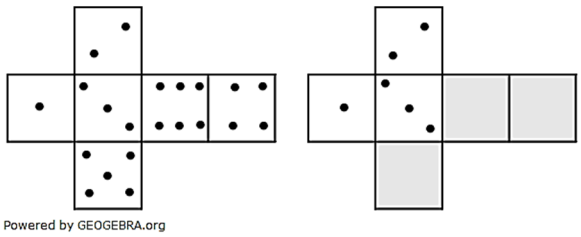
Lösungen: *Schnittpunkt* $A(-4|-2)$
$m_{AB} = 1;\ \ m_{BC} = 1;\ \ y = x + 2.$

Aufgabe W4a/2019

Beim Würfelspiel „Augensumme 4 gewinnt" wird gleichzeitig mit zwei Spielwürfeln geworfen. Die Augenzahlen werden addiert (Augensumme). Dieses Spiel soll als Glückspiel eingesetzt werden. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Ereignisse	Gewinn
„Augensumme gleich 4"	4,00 €
„Augensumme kleiner 4"	2,00 €
„Augensumme größer 4"	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

Der Betreiber bekommt die Vorgabe, das Glücksspiel zu verändern. Er soll auf einem der beiden Spielwürfel die Vier, die Fünf und die Sechs entweder durch drei Einsen oder durch drei Dreien ersetzen.



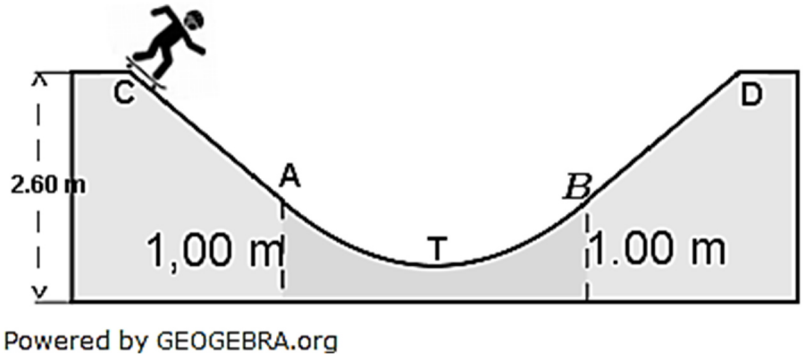
Wofür soll sich der Betreiber entscheiden?
Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung oder Argumentation.

Lösungen: $E(X) = -0{,}50\,€$
$E(X_{3\ Einsen}) = 0{,}17\,€$
$E(X_{3\ Dreien}) = -0{,}17\,€$

Der Betreiber sollte sich dafür entscheiden, die Vier, Fünf und Sechs durch Dreien zu ersetzen.

Aufgabe W4b/2019

Im Querschnitt einer Skater-Rampe sieht man die beiden geraden Teilstücke $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sowie das parabelförmige Teilstück AB. Die beiden Punkte A und B liegen auf gleicher Höhe und sind $4{,}00\,m$ voneinander entfernt. Der tiefste Punkt T der Skater-Rampe liegt $20\,cm$ über dem Boden.



Bestimmen Sie einen mögliche Funktionsgleichung für das parabelförmige Teilstück AB.
Die beiden Punkte C und D liegen ebenfalls auf gleicher Höhe und sind $8{,}00\,m$ voneinander entfernt.
Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung für die Gerade, auf der das gerade Teilstück $\overline{BD}$ liegt.

Lösungen: $AB: y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$
$\overline{BD}: y = 0{,}8x - 0{,}6$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2019

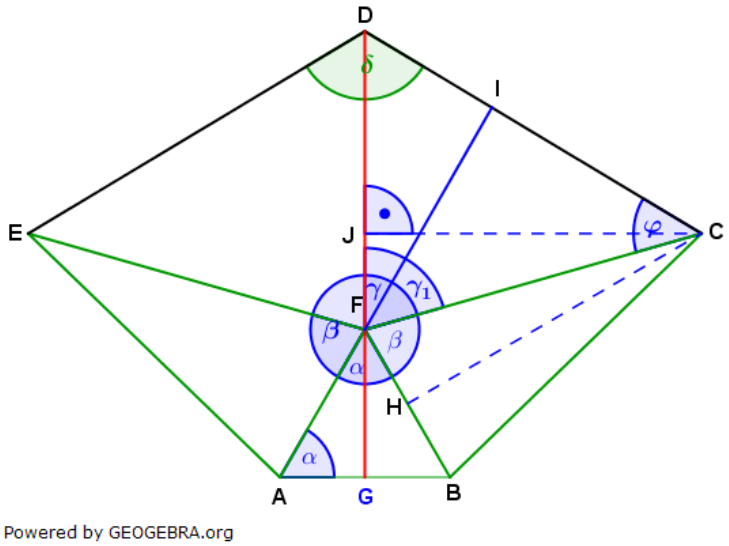
Lösungslogik

Ermittlung von α :
Das Dreieck ABF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Damit ist $\alpha = 60\,°$.

Berechnung von β :
Das Dreieck BCF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Die Höhe $\overline{HC}$ halbiert die Seite $\overline{FB} = \overline{AB}$ im Punkt H. Damit gilt:

$cos(\beta) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{FC}}$.

Berechnung von γ :
Der überstumpfe Winkel bei F ergibt sich aus der Summe von $\alpha + 2 \cdot \beta$.



Der Innenwinkel γ der Raute ist die Ergänzung zu $360\,°$ zum überstumpfen Winkel bei F, somit $\gamma = 360\,° - (\alpha + 2 \cdot \beta)$.

Berechnung von φ :
Die Winkelsumme im Viereck ist $360\,°$. Somit verbleiben für die beiden Winkel bei E und C: $2 \cdot \varphi = 360\,° - \delta - \gamma$.

Berechnung von $\overline{FD}$:

Berechnung über den Sinussatz:

Nach dem Sinussatz gilt: $\frac{\overline{FC}}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\overline{FD}}{sin(\varphi)}$, *bzw.* $\overline{FD} = \frac{\overline{FC} \cdot sin\,(\varphi)}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

Berechnung über trigonometrische Funktionen:

Wir betrachten das Dreieck CDF. Der Winkel φ bei Punkt C ist errechnet. Der Winkel bei Punkt D ist $\frac{\delta}{2}$. Der Winkel γ_1 bei Punkt F ist $180\,° - \frac{\delta}{2} - \varphi$

Es gilt: $cos(\gamma_1) = \frac{\overline{JF}}{\overline{FC}}$; $\overline{JC} = \sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{JF}^2}$

$tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$

$\overline{FD} = \overline{JF} + \overline{JD}$

Berechnung der Strecke $\overline{FG}$ aus der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABF.
Berechnung von $\overline{DG}$ aus der Summe von $\overline{DF}$ und $\overline{FG}$.

Klausuraufschrieb

α : Das Dreieck ABF ist gleichseitig (Aufgabenstellung).
$\alpha = 60\,°$

β : Das Dreieck BCF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Die Höhe $\overline{HC}$ halbiert die Seite $\overline{FB} = \overline{AB}$ im Punkt H.

$cos(\beta) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{FC}} = \frac{1{,}7}{7{,}0}$

$\beta = cos^{-1}\frac{1{,}7}{7{,}0} = 75{,}94\,°$

γ : Der überstumpfe Winkel bei F ergibt sich aus der Summe von $\alpha + 2 \cdot \beta$. Der Innenwinkel γ der Raute ist die Ergänzung zu $360\,°$ zum überstumpfen Winkel bei F.

$\gamma = 360\,° - (\alpha + 2 \cdot \beta) = 360\,° - (60 + 121{,}88) = 148{,}11\,°$

φ : Die Winkelsumme im Viereck ist $360\,°$. Somit verbleiben für die beiden Winkel bei E und C:

$2 \cdot \varphi = 360\,° - \delta - \gamma = 360\,° - 118\,° - 148{,}11\,° = 93{,}89\,°$

$\varphi = 46{,}95\,°$

$\overline{FD}$:

Berechnung über den Sinussatz:

$\frac{\overline{FC}}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\overline{FD}}{sin(\varphi)}$ | Sinussatz

$\overline{FD} = \frac{\overline{FC} \cdot sin\,(\varphi)}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{7 \cdot sin\,(46{,}95\,°)}{sin\,(59\,°)} = 5{,}968$

Alternativ: **Berechnung über trigonometrische Funktionen:**

γ_1: $\gamma_1 = 180\,° - \frac{\delta}{2} - \varphi = 180\,° - 59\,° - 46{,}95\,° = 74{,}05\,°$

$\overline{JF}$: $cos(\gamma_1) = \frac{\overline{JF}}{\overline{FC}}$ | $\cdot \overline{FC}$

$\overline{JF} = \overline{FC} \cdot \cos(\gamma_1) = 7 \cdot \cos(74{,}05\,°) = 1{,}924$

$\overline{JC}$: $\overline{JC} = \sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{JF}^2} = \sqrt{7^2 - 1{,}924^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{JC} = 6{,}73$

$\overline{JD}$: $tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$ | $\cdot \overline{JD}$; $: tan\left(\frac{\delta}{2}\right)$

$\overline{JD} = \frac{\overline{JC}}{tan\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{6{,}73}{\tan\,(59°)} = 4{,}044$

$\overline{FD}$: $\overline{FD} = \overline{JF} + \overline{JD} = 1{,}924 + 4{,}044 = 5{,}968$

$\overline{FG}$: $\overline{FG}$ ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABF.

$\overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot \sqrt{3} = 2{,}944$

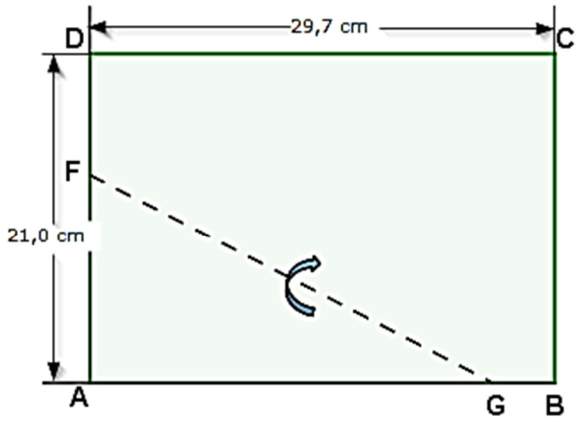
$\overline{DG}$: $\overline{DG} = \overline{FD} + \overline{FG} = 5{,}968 + 2{,}944 = 8{,}912$

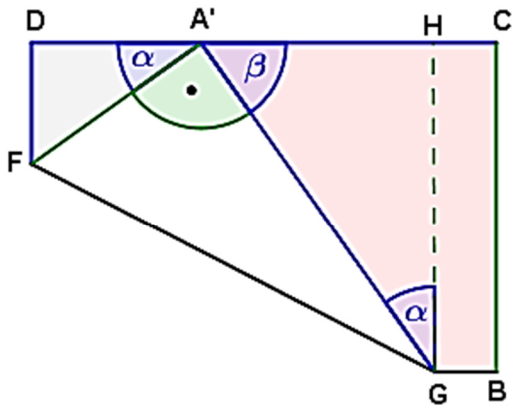
Der Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$ ist $8{,}9\ cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1b/2019

Lösungslogik





Powered by GEOGEBRA.org

Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez. Die Fläche errechnet sich aus:

$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'C}\right) \cdot \overline{BC}$

$\overline{A'C} = \overline{A'H} + \overline{GB}$

$\overline{A'H}$ lässt sich über den $\tan(\alpha)$ aus $\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'H}}{\overline{GH}}$ mit $\overline{GH} = \overline{BC} = 21\ cm$ ermitteln.

Berechnung von α über den sin aus $\frac{\overline{FD}}{\overline{FA'}}$ mit $\overline{FA'} = 13{,}3\ cm$ (Aufgabenstellung) und $\overline{FD} = \overline{AD} - \overline{AF}$.

Wegen $\alpha + 90\,° + \beta = 180\,°$ ist der Winkel bei G gleich dem Winkel α.

Berechnung von $\overline{DA'}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von $\overline{A'H}$ über den $tan\,(\alpha)$.

Berechnung von $\overline{GB}$ über $\overline{GB} = 29{,}7 - \overline{DA'} - \overline{A'H}$.

Klausuraufschrieb

Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez.

$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'C}\right) \cdot \overline{BC}$

α: $\quad sin(\alpha) = \frac{\overline{FD}}{\overline{FA'}} = \frac{21-13{,}3}{13{,}3} = \frac{7{,}7}{13{,}3}$

$\quad \alpha = sin^{-1}\frac{7{,}7}{13{,}3} = 35{,}3765\,°$

Wegen $\alpha + 90\,° + \beta$ bei A' ist der Winkel bei B ebenfalls gleich α.

$\overline{DA'}$: $\quad \overline{DA'} = \sqrt{\overline{FA'}^2 - \overline{FD^2}}$ $\quad |$ Satz des Pythagoras

$\quad \overline{DA'} = \sqrt{13{,}3^2 - (21 - 13{,}3)^2} = 10{,}84$

$\overline{A'H}$: $\quad tan(\alpha) = \frac{\overline{A'H}}{\overline{BC}}$ $\quad | \cdot \overline{BC}$

$\quad \overline{A'H} = \overline{BC} \cdot tan(\alpha) = 21{,}0 \cdot tan(35{,}3765\,°) = 14{,}91$

$\overline{GB}$: $\quad \overline{GB} = 29{,}7 - \overline{DA'} - \overline{A'H} = 29{,}7 - 10{,}84 - 14{,}91 = 3{,}95$

$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'H} + \overline{GB}\right) \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot (3{,}95 + 14{,}91 + 3{,}95) \cdot 21 = 239{,}51$

Die Fläche des Vierecks $GBCA'$ ist $239{,}5\ cm^2$ groß.

Lösung W2b/2019

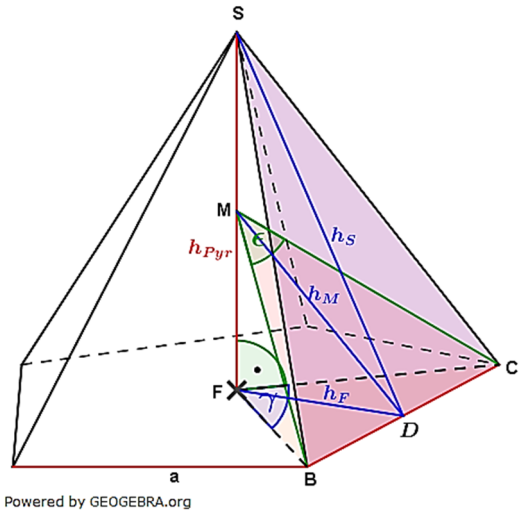
Lösungslogik

Höhe h_{Pyr} der Fünfeckpyramide:

Zur Berechnung der Höhe h_{Pyr} der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Grundkante a. Da das Dreieck BCS gleichschenklig ist, halbiert die Höhe h_M die Seitenkante $a = \overline{BC}$ als auch den Winkel ϵ.

Somit gilt $sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}}$. Die Höhe h_M folgt nun aus dem Satz des Pythagoras:

$h_M = \sqrt{\overline{BM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.



Wir betrachten nun das Teildreieck BFC der Pyramidengrundfläche. Der Winkel γ errechnet sich bei einem regelmäßigen Fünfeck aus $\gamma = \frac{360\,°}{5}$. Für die Höhe h_F gilt nun $tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F}$.

Die Strecke $\overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2}$ folgt aus dem Satz des Pythagoras mit $\frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$.

Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks BCM':

Aus der Grafik erkennen wir, dass der minimale Flächeninhalt dann entsteht, wenn der Punkt M mit dem Punkt F zusammenfällt und der maximale Flächeninhalt dann, wenn der Punkt M mit dem Punkt S zusammenfällt.

$A_{BCM'_{min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F$, alle Werte bereits bekannt.

$A_{BCM'_{max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S$.

h_S muss noch ermittelt werden über den Satz des Pythagoras aus $h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{Pyr}^2}$.

Klausuraufschrieb

a: $\overline{BD} = \frac{a}{2}$

$sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}}$ | $\cdot \overline{BM}$

$\frac{a}{2} = \overline{BM} \cdot sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = 8{,}0 \cdot sin(24°) = 3{,}254$ | $\cdot 2$

$a = 6{,}51$

h_{Pyr}: $\overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$

h_M: $h_M = \sqrt{\overline{BM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_M = \sqrt{8{,}0^2 - 3{,}254^2} = 7{,}308$

h_F: $\gamma = \frac{360°}{5} = 72\,°$

$tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F}$ | $\cdot h_F;\ :tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$h_F = \frac{\frac{a}{2}}{tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3{,}254}{\tan(36°)} = 4{,}479$

h_{Pyr}: $\overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = 2 \cdot \sqrt{7{,}308^2 - 4{,}479^2} = 11{,}549$

Die Höhe der Pyramide beträgt $11{,}5\ cm$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks BCM':

$A_{BCM'_{min}}$: $A_{BCM'_{min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F$

$A_{BCM'_{min}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}51 \cdot 4{,}479 = 14{,}579$

$A_{BCM'_{max}}$ $A_{BCM'_{max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S$

h_S: $h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{Pyr}^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{4{,}479^2 + 11{,}549^2} = 12{,}387$

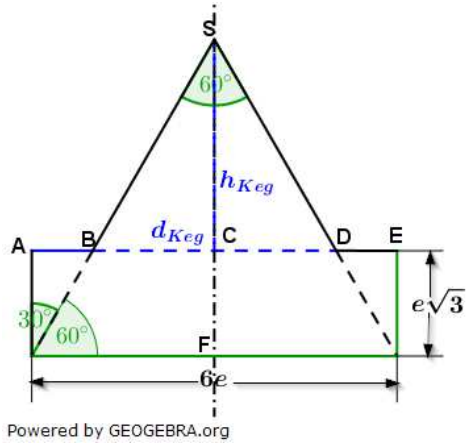
$A_{BCM'_{max}}$ $A_{BCM'_{max}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}51 \cdot 12{,}387 = 40{,}32$

Die minimale Fläche eines Dreiecks BCM' beträgt $14{,}6\ cm^2$, die maximale Fläche beträgt $40{,}3\ cm^2$.

Lösung W2b/2019

Lösungslogik

Das Volumen des zusammengesetzten Körpers besteht aus dem Volumen eines Zylinders mit Durchmesser $6e$ und der Höhe $e\sqrt{3}$ zuzüglich dem Volumen eines Kegels mit Durchmesser d_{Keg} und Höhe h_{Keg}.



$V_{Zyl} = \frac{\pi d_{Zyl}^2}{4} \cdot h_{Zyl}$; $V_{Keg} = \frac{1}{3}\frac{\pi d_{Keg}^2}{4} \cdot h_{Keg}$

Berechnung von d_{Keg}:

Wir berechnen die Strecke $\overline{AB}$ aus $tan(30\,°) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$

$d_{Keg} = 6e - 2 \cdot \overline{AB}$

Berechnung von h_{Keg}:

Zunächst ermitteln wir die Gesamthöhe $\overline{SF}$ des Körpers über $tan(30\,°) = \frac{3e}{\overline{SF}}$.

$h_{Keg} = \overline{SF} - e\sqrt{3}$, alle erforderlichen Werte sind nun bekannt.

Klausuraufschrieb

$V_{ges} = V_{Zyl} + V_{Keg}$

$V_{Zyl} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot (3e)^2 \cdot e\sqrt{3} = 9\pi e^3\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{keg}^2 \cdot h_{Keg}$

$\overline{AB}$: $tan(30\,°) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$ | $\cdot e\sqrt{3}$

$\overline{AB} = e\sqrt{3} \cdot \tan(30°) = e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = e$

r_{Keg}: $r_{Keg} = \frac{6e - 2 \cdot \overline{AB}}{2} = 2e$

h_{Keg}: $h_{Keg} = \overline{FS} - e\sqrt{3}$

$\overline{FS}$: $tan(30\,°) = \frac{3e}{\overline{SF}}$ | $\cdot \overline{SF}$; $: \tan(30°)$

$\overline{FS} = \frac{3e}{\tan(30\,°)} = \frac{3e}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9e}{\sqrt{3}} = 3e\sqrt{3}$

$h_{Keg} = 3e\sqrt{3} - e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{keg}^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi(2e)^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

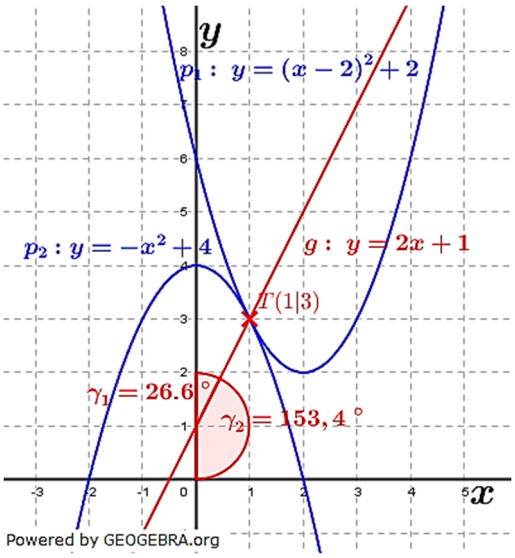
$V_{ges} = 9\pi e^3\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3} = \pi e^3\sqrt{3} \cdot \left(9 + \frac{8}{3}\right) = \frac{35}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

q.e.d.

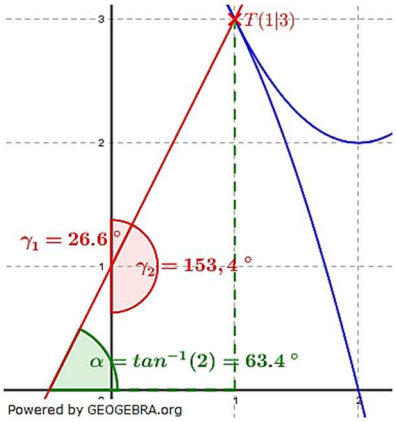
Lösung W3a/2019

Lösungslogik

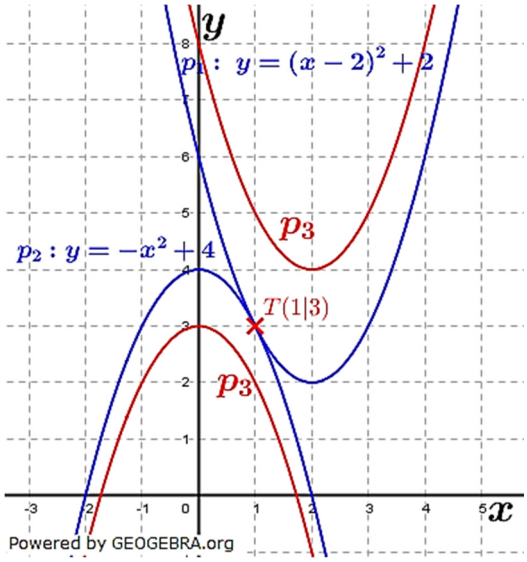
Parabelgleichung p_1:
Mit dem gegebenen Scheitelpunkt $S(2|2)$ die Scheitelpunktgleichung aufstellen.
Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ und der Parabelgleichung $y = -x^2 + c$ die Parabelgleichung aufstellen.
Schnittpunkt T:
Wir schneiden p_1 mit p_2 und erhalten den Schnittpunkt T.
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = 2$ und der Geradengleichung $y = mx + b$ sowie einer Punktprobe mit T erhalten wir die Gleichung von g.



Schnittwinkel von g mit der y-Achse:
Der Winkel, den einer Gerade g mit der x-Achse einschließt errechnet sich aus dem tan der Steigung m (Siehe Formel-sammlung $m = tan\,(\alpha)$.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.
Der Winkel γ_1 ist Ergänzungs-Winkel zu $90\,°$ von α, der Winkel γ_2 ist Ergänzungs-Winkel zu $180\,°$ von γ_1.



Parabelgleichung p_3:
Parabeln, die weder p_1 noch p_2 schneiden, müssen im inneren der gegebenen Parabeln verlaufen, siehe nachfolgende Grafik. Somit ist p_3 entweder eine in y-Richtung nach oben verschobene Parabel p_1 oder aber eine weiter nach unten verschobene Parabel p_2.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelpunktform der Parabel

$y = (x - 2)^2 + 2$ | Scheitelpunkt $S(2|2)$ einsetzen.

Parabelgleichung p_2:

p_2: $y = -x^2 + c$ | Normalform einer nach unten Geöffneten Parabel mit Scheitel $(0|c)$

$0 = -2^2 + c$ | Punktprobe mit $N_1(2|0)$

$c = 4$

$y = -x^2 + 4$

Schnittpunkt T von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:

$(x - 2)^2 + 2 = -x^2 + 4$

$x^2 - 4x + 4 + 2 = -x^2 + 4$ | $+x^2$

$2x^2 - 4x + 6 = 4$ | -4

$2x^2 - 4x + 2 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$ | p/q-Formel

$x_1 \rightarrow p_2$:

$y = -1^2 + 4 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $T(1|3)$.

Gerade g:

$y = mx + b$ | allgemeine Geradengleichung

$y = 2x + b$ | Steigung $m = 2$ ist gegeben

$3 = 2 \cdot 1 + b$ | Punktprobe mit $T(1|3)$

$b = 1$

Die Gleichung der Geraden g lautet $y = 2x + 1$.

Schnittwinkel von g mit der y-Achse:

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = m$

$\alpha = tan^{-1}(m) = tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

Schnittwinkel 1 (γ_1) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von α zu $90\,°$:

$\gamma_1 = 90\,° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Schnittwinkel 2 (γ_2) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von γ_1 zu $180\,°$:

$\gamma_2 = 180\,° - 26{,}6° = 153{,}4°$

Die beiden Schnittwinkel von g mit der y-Achse sind $\gamma_1 = 26{,}6°$ und $\gamma_2 = 153{,}4°$ groß.

Parabelgleichung p_3:

Die Parabel muss innerhalb von p_1 oder aber innerhalb von p_2 verlaufen. Damit entweder Verschiebung von p_1 in y-Richtung nach oben, alternativ Verschiebung von p_2 in y-Richtung nach unten.

$p_3 = p_1 + 2 = (x - 2)^2 + 4$ | alternativ

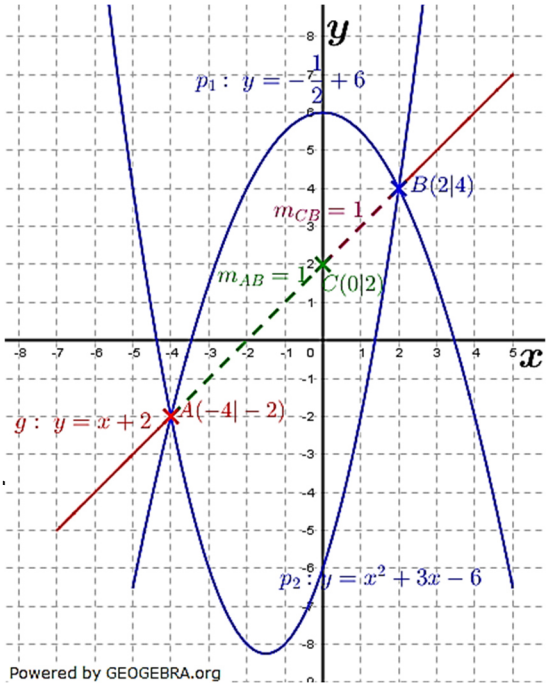
$p_3 = p_2 - 1 = -x^2 + 3$

Andere Verschiebungen denkbar.

Lösung W3b/2019

Lösungslogik

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:
Sowohl der Punkt $S(0|6)$ als auch der Punkt $B(2|4)$ sind Parabelpunkte. Durch Punktproben ermitteln wir die Parameter a und c.
Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:
Der Punkt $B(2|4)$ ist Parabelpunkt. Durch eine Punktprobe ermitteln wir den Parameter q.
Zweiter Schnittpunkt A:
Schnittpunktermittlung durch Gleichsetzung.
Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:
Drei Punkte A, B und C liege dann auf einer Geraden g wenn die Steigung der Strecke $\overline{AB}$ mit der Steigung der Strecke $\overline{BC}$ übereinstimmt.
Alternativ:
Aufstellung einer Geradengleichung durch die Punkte A und B mit anschließender Punktprobe mit C.



Klausuraufschrieb

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:

p_1: $6 = a \cdot 0 + c$ | Punktprobe mit $S(0|6)$
$c = 6$
$4 = a \cdot 2^2 + 6$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4a = -2$
$a = -\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:

p_2: $4 = 2^2 + 3 \cdot 2 + q$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4 = 10 + q$
$4 = -6$
$y = x^2 + 3x - 6$

Zweiter Schnittpunkt A:

$p_1 \cap p_1$:
$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = x^2 + 3x - 6$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 = 0$ | $\frac{1}{2}x^2;\ -6;\ \cdot\frac{2}{3}$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$ | p/q-Formel
$x_1 = 2;\ x_2 = -4$

$x_1; x_2 \longrightarrow p_1$
$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 = 4$ ==> Punkt $B(2|4)$
$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 6 = -2$ ==> Punkt $A(-2|-4)$
$A(-2|-4)$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(-2|-4)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:

m_{AB}: *Steigung Strecke* $\overline{AB}$:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$$

m_{BC}: *Steigung Strecke* $\overline{BC}$:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-4}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Wegen $m_{AB} = m_{BC}$ *liegen die drei Punkte* A, B *und* C *auf einer Geraden.*

Alternativ: Gerade durch A und B:

g: $y = mx + b$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$$

$y = x + b$

$4 = 2 + b$ | Punktprobe mit B

$b = 2$

$2 = 0 + 2$ | Punktprobe mit C

$2 = 2$ | wahre Aussage

Die Punkte A, B *und* C *liegen auf einer Geraden.*

Lösung W4a/2019

Lösungslogik

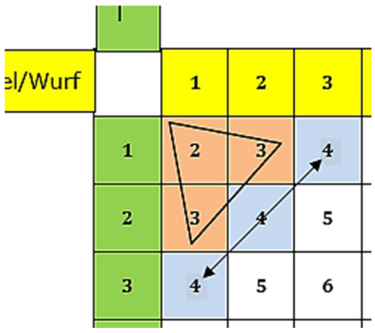
Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die Situation: In den *6x6*-Quadraten steht die jeweilige Augensumme.

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ereignis „Augensumme = 4“:

Wie wir sehen, steht die 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (blau hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. *Somit ist:*

$P(Augensumme = "4") = \frac{3}{36}$.



Ereignis „Augensumme kleiner 4“:

Wie wir sehen, steht eine Zahl kleiner 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (Orange hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$.

Ereignis „Augensumme größer 4“:

Dies sind alle anderen Ereignisse der 36 $6x6$-Quadrate (weiß hinterlegt), also insgesamt 30 Quadrate. Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{30}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeiten sind ermittelt, der Erwartungswert kann berechnet werden.

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	1	1	1
1	2	3	4	2	2	2
2	3	4	5	3	3	3
3	4	5	6	4	4	4
4	5	6	7	5	5	5
5	6	7	8	6	6	6
6	7	8	9	7	7	7

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aus der zuvor stehenden Grafik erkennen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für „Auensumme kleiner 4" nun 9 der 36 Quadrate belegt. Die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4" belegt 6 der 36 Quadrate, damit belegt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme größer 4" 21 der 36 Quadrate.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

	1. Würfel					
2. Würfel/Wurf	1	2	3	3	3	3
1	2	3	4	4	4	4
2	3	4	5	5	5	5
3	4	5	6	6	6	6
4	5	6	7	7	7	7
5	6	7	8	8	8	8
6	7	8	9	9	9	9

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers über eine Argumentation bzw. Rechnung siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P\left(Augensumme = \text{"4"}\right) = \frac{3}{36}$; $\text{P(Augensumme kleiner "4")} = \frac{3}{36}$;

$P(Augensumme\ größer\ \text{"4"}) = \frac{30}{36}$.

Erwartungswert:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,25€	0,08 €	−0,83 €
$E(X)$	0,25 € + 0,08 € − 0,83 € = −0,50 €		

Der Erwartungswert beträgt −0,50 € *(aus der Sicht des Spielers).*

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = \text{"4"}) = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ \text{"4"}) = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ \text{"4"}) = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = \text{"4"}) = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ \text{"4"}) = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ \text{"4"}) = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers durch eine Argumentation:

Bei Änderung des Würfels auf drei Einsen bzw. drei Dreien bleibt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4" dieselbe, lediglich die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme kleiner 4" ist bei drei Einsen wesentlich höher als bei drei Dreien. Das bedeutet, dass der Betreiber bei Änderung durch drei Einsen mehr Gewinne auszahlen muss als bei Änderung durch drei Dreien. Er sollte sich somit für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Entscheidung des Spielebetreibers durch Rechnung:
Erwartungswert für drei Einsen:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{21}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,50€	0,25 €	−0,58 €
$E(X)$	0,50 € + 0,25 € − 0,58 € = 0,17 €		

Der Erwartungswert beträgt +0,17 € *(aus der Sicht des Spielers).*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Erwartungswert für drei Dreien:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$3{,}00\ €$	$1{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{27}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}50€$	$0{,}08\ €$	$-0{,}75\ €$
$E(X)$	$0{,}50\ € + 0{,}08\ € - 0{,}75\ € = -0{,}17\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}17\ €$ (aus der Sicht des Spielers).

Da der Spielebetreiber bei Änderung auf drei Einsen einen Verlust von $0{,}17\ €$ / Spiel erleidet, sollte er sich für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Lösung W4b/2019

Lösungslogik

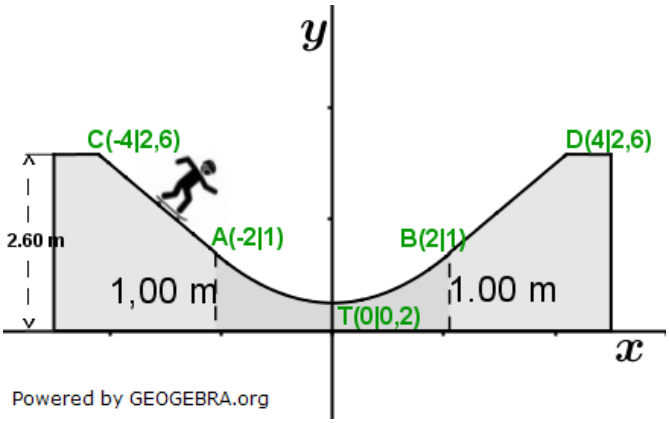
Allgemeine Festlegung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden und die y-Achse durch den Punkt T verläuft.

Wir versehen die einzelnen Punkte mit ihren Koordinaten (siehe Grafik rechts).

Für den Parabelbogen AB gilt:

Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt T. Die Parabel ist in x-Richtung unverschoben und in y-Richtung um $0{,}2\,m$ nach oben verschoben.



Die Punkte A und B erfüllen die Funktionsgleichung der Parabel.

Parabelgleichung p:

Die Parabel hat die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$. Wegen $T(0|0{,}2)$ ist $c = 0{,}2$. Über eine Punktprobe mit $B(2|1)$ errechnen wir a.

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

Wir bestimmen die Gleichung einer Geraden durch die zwei Punkte $A(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt in $T(0|0{,}2)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Parabelgleichung p:

$S(0\|0{,}2)$	|	Scheitelpunkt der Parabel
$y = ax^2 + 0{,}2$		
$B(2\|1)$	|	Punkt der Parabel
$1 = 2^2 \cdot a + 0{,}2$	|	Punktprobe mit B
$0{,}8 = 4a$		
$a = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$		

Die Parabelgleichung lautet: $y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $B(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

$y = mx + c$		
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}6-1}{4-2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$		
$y = 0{,}8x + c$		
$1 = 0{,}8 \cdot 2 + c$	|	Punktprobe mit B:
$c = -1{,}6$		

Die Geradengleichung lautet $y = 0{,}8x - 1{,}6$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de