Aufgabe W1a/2004

Ein Körper besteht aus zwei quadratischen Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche. Die Skizze zeigt den Diagonalschnitt des Körpers.

Gegeben sind:

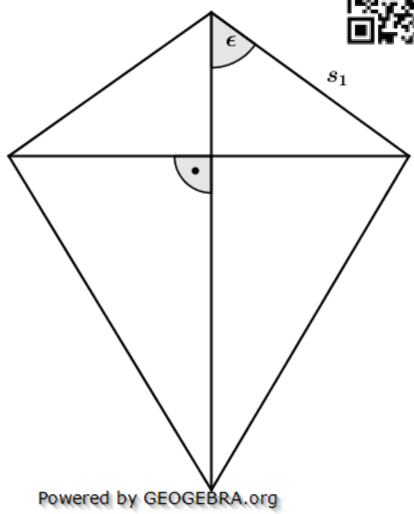
$s_1 = 12{,}4\ cm$

$\epsilon = 52{,}8\,°$

Das Volumen der unteren Pyramide ist doppelt so groß wie das der oberen.

Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

Lösung: $O = 748{,}5\ cm^2$



Aufgabe W1b/2004

Die Zeichnung stellt das Netz eines Würfels mit der Kantenlänge a dar.

Es gilt:

$\overline{BC} = \frac{3}{4}a$

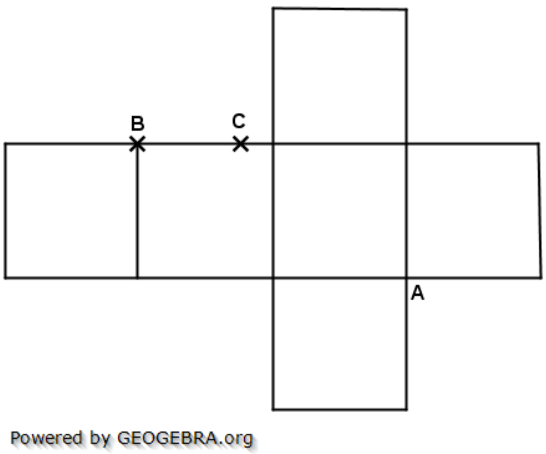
Zeichnen Sie ein Schrägbild des Körpers mit dem Dreieck ABC maßgerecht für $a = 6\ cm$.

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a mit der Formel berechnen lässt:

$A = \frac{3}{8}a^2\sqrt{2}$.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ im Körper in Abhängigkeit von a ohne Verwendung gerundeter Werte.

Lösung: $\overline{AC} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$



Aufgabe W2a/2004

Die Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 + 4x + 6$.
Verschiebt man diese Parabel um drei Einheiten nach rechts und um drei Einheiten nach unten, entsteht die Parabel p_2 mit dem Scheitelpunkt S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts Q der beiden Parabeln.
Durch S_2 und Q verläuft die Gerade g. Die Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und geht durch den Scheitelpunkt S_1 der Parabel p_1.
Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden h.

Lösung: $Q(-1|3);\ \ y = -2x + 6.$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W2b/2004

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$$\frac{x^2+25x+100}{2x^2+20x+50}=\frac{2x+3}{x+5}-\frac{x-6}{2x+10} \qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-5\}; \quad \mathbb{L}=\{4\}$$

Aufgabe W3a/2004

Das Fünfeck $ABCDE$ besteht aus einem Quadrat und einem rechtwinkligen Dreieck.

Gegeben sind:

$\overline{CD}=4{,}1\ cm$

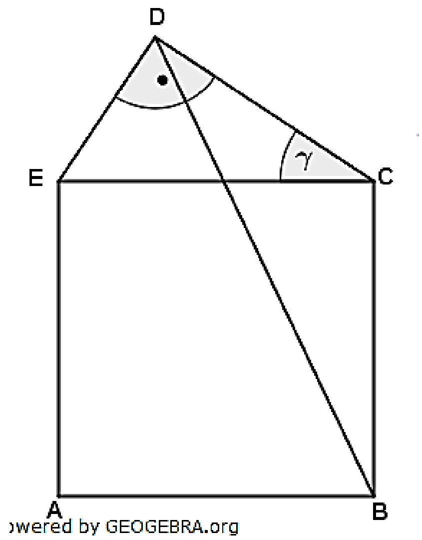
$\gamma=33{,}4°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{BD}$ und den Flächeninhalt des Vierecks $ABDE$.

Lösung: $\overline{BD}=7{,}9\ cm$

$A_{ABDE}=21{,}3\ cm^2$

Tipp: Kosinussatz für $\overline{BD}$, zweimal trigonometrischen Flächeninhalt für A_{BCD} und A_{ECD}.



Aufgabe W3b/2004

Im Rechteck $ABCD$ gilt:

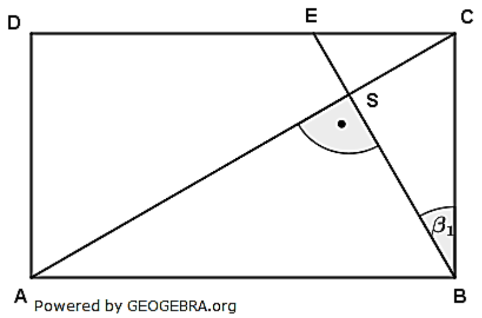
$\overline{AD}=2e$

$\beta_1=30°$

Zeigen Sie dass sich der Flächeninhalt des Vierecks $ASED$ mit der Formel

$$A=\frac{11}{6}e^2\sqrt{3}$$

berechnen lässt.



Aufgabe W4a/2004

Das Bild zeigt Parabeln und Geraden. Ordnen Sie jedem Schaubild die richtige Funktionsgleichung zu.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(1) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$

(2) $y=-\frac{1}{4}x^2+3$

(3) $y=(x-4)^2-3$

(4) $y=(x+4)^2-3$

(5) $y=x^2-2x-1$

(6) $y=-\frac{1}{3}x+2$

(7) $y=x^2-4x+5$

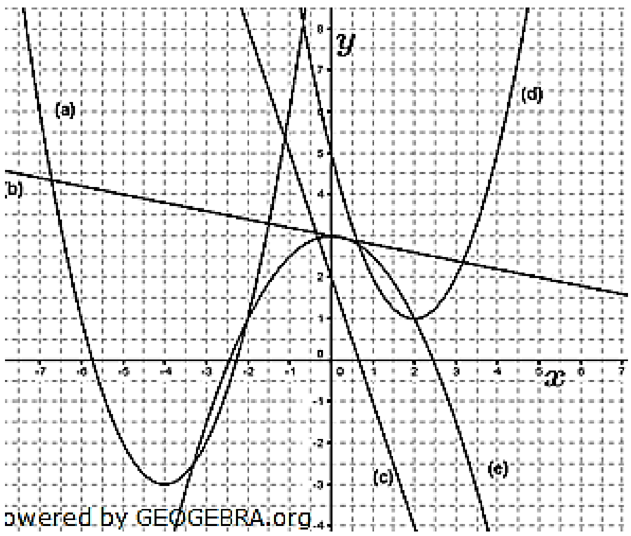
(8) $y=-2x-3$

(9) $y=-3x+2$

(10) $y=-2x+3$

(11) $y=-0{,}5x+3$

(12) $y=-\frac{1}{5}x+3$

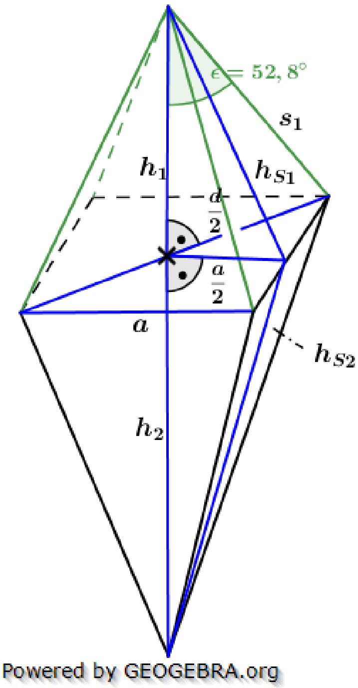


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W1a/2004

<u>Lösungslogik</u>

Zur Beachtung: die Skizze zeigt den Diagonalschnitt, nicht den Parallelschnitt.
Berechnung von $\frac{d}{2}$ über den $sin\epsilon$ und daraus d.
Berechnung von h_1 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Kantenlänge a der quadratischen Grundfläche über d.
Berechnung von h_{S_1} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von V_1 über die Volumenformel.
Berechnung von V_2.
Berechnung von h_2 über die Volumenformel.
Berechnung von h_{S_2} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M_1 und M_2 sowie $O_{Körper}$.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\frac{d}{2}$: $\quad sin\epsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s_1}$ $\quad|\quad \cdot s_1$

$\frac{d}{2} = s_1 \cdot sin\epsilon = 12{,}4 \cdot sin52{,}8° = 9{,}88$

d: $\quad d = 2 \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot 9{,}88 = 19{,}76$

h_1: $\quad h_1 = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 9{,}88^2}$ $\quad|\quad$ Satz des Pythagoras

$h_1 = \sqrt{56{,}1456} = 7{,}5$

a: $\quad d = a \cdot \sqrt{2}$ $\quad|\quad : \sqrt{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}76}{\sqrt{2}} = 13{,}97$

$\frac{a}{2}$: $\quad \frac{a}{2} = 0{,}5 \cdot a = 7{,}0$

h_{S_1}: $\quad h_{S_1} = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 7{,}0^2}$ $\quad|\quad$ Satz des Pythagoras

$h_{S_1} = \sqrt{104{,}76} = 10{,}24$

V_1: $\quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 13{,}79^2 \cdot 7{,}5 = 487{,}9$

V_2: $\quad V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 487{,}9 = 975{,}8$

h_2: $\quad V_2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_2$ $\quad|\quad \cdot 3;\ : a^2$

$h_2 = \frac{3 \cdot V_2}{a^2} = \frac{3 \cdot 975{,}8}{13{,}97^2} = 15{,}0$

h_{S_2}: $\quad h_{S_2} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15{,}0^2 + 7{,}0^2}$ $\quad|\quad$ Satz des Pythagoras

$h_{S_2} = \sqrt{274} = 16{,}55$

M_1: $\quad M_1 = 2 \cdot a \cdot h_{S_1} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 10{,}24 = 286{,}10$

M_2: $\quad M_2 = 2 \cdot a \cdot h_{S_2} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 16{,}55 = 462{,}40$

O_{Ges}: $\quad O_{Ges} = M_1 + M_2 = 286{,}10 + 462{,}40 = 748{,}5$

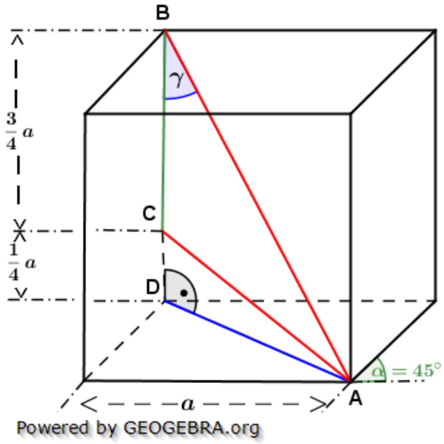
Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $748{,}5\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung Aufgabe W1b/2004

Lösungslogik

Die Skizze zeigt das Schrägbild des gegebenen Würfels.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Raumdiagonale im Würfel. Der Winkel γ ist dadurch $45°$.
Im Dreieck ABC ist die Strecke $\overline{AD}$ als Flächendiagonale der Grundfläche gleichzeitig Höhe auf die Seite BC.
Berechnung der Dreiecksfläche über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = a \cdot \sqrt{2}$ | Flächendiagonale

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} a \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{8} a^2 \sqrt{2}$ **q.e.d.**

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AC} = \sqrt{2a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \sqrt{\frac{33}{16}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{33}$

Lösung W2a/2004

Lösungslogik

Umstellung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Bestimmung des Scheitelpunkts von p_2 aus der Aufgabenstellung.
Bestimmung des Schnittpunkts Q von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzen.
Aufstellen der Geradengleichung g durch S_2 und Q.
Aufstellen der zu g parallelen Geradengleichung h durch S_1.

Klausuraufschrieb

p_1: $\quad y = x^2 + 4x + 6$

Scheitelpunkt von p_1:

$y = (x+2)^2 + 2$ | quadratische Ergänzung

$S_1(-2|2)$

Scheitelpunktverschiebung gem. Aufgabenstellung:

S_2: $\quad S_2(-2+3|2-3)$

$S_2(1|-1)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $\quad y = (x-1)^2 - 1$ | Scheitelpunktgleichung p_2

$y = x^2 - 2x$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	Schnittpunkt durch Gleichsetzung
$x^2 + 4x + 6 = x^2 - 2x$	$-x^2$; $+2x$
$6x + 6 = 0$	
$x_Q = -1$; $y_Q = x_Q^2 - 2x_Q = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$	

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $Q(-1|3)$.

Geradengleichung durch S_2 und Q:

g: $y = mx + b$	
m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{-1-1} = -2$	
$y = -2x + b$	Punktprobe mit $S_2(1|-1)$
$-1 = -2 \cdot 1 + b$	
$b = 1$	
g: $y = -2x + 1$	

Parallele Gerade h zu g:

h: $y = -2x + b$	parallel heißt gleiche Steigung $m = -2$
$2 = -2 \cdot (2) + b$	Punktprobe mit $S_1(-2|2)$
$b = 6$	
h: $y = -2x + 6$	

Lösung W2b/2004

$$\frac{x^2 + 25x + 100}{2x^2 + 20x + 50} = \frac{2x + 3}{x + 5} - \frac{x - 6}{2x + 10}$$

Nenner 1:	$2x^2 + 20x + 50$	$2(x + 5)^2$
Nenner 2:		$(x + 5)$
Nenner 3:	$2x + 10$	$2(x + 5)$
Hauptnenner:		$2 \cdot (x + 5)^2$

$2 \cdot (x + 5)^2 = 0$ für $x_1 = -5$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$

$$\frac{(x^2 + 25x + 100) \cdot \cancel{2 \cdot (x+5)^2}}{\cancel{2 \cdot (x+5)^2}} = \frac{(2x+3) \cdot 2 \cdot (x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+5}} - \frac{(x-6) \cdot \cancel{2} \cdot (x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{2(x+5)}}$$

$x^2 + 25x + 100 = 2(2x + 3)(x + 5) - (x - 6)(x + 5)$	ausmultiplizieren
$x^2 + 25x + 100 = 2(2x^2 + 10x + 3x + 15) - (x^2 + 5x - 6x - 30)$	
	Restklammern auflösen
$x^2 + 25x + 100 = 4x^2 + 26x + 30 - x^2 + x + 30$	$-3x^2$; $-27x$; -60
$-2x^2 - 2x + 40 = 0$	$:(-2)$
$x^2 + x - 20 = 0$	p/q-Formel

$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 20} = -0{,}5 \pm \sqrt{20{,}25} = -0{,}5 \pm 4{,}5$

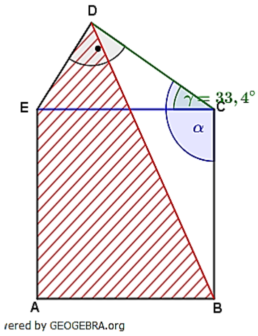
$x_1 = 4$; $x_2 = -5$

Wegen $x_2 = -5 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \{4\}$ die einzigste Lösung.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2004

<u>Lösungslogik</u> (einfach)
Berechnung von $\overline{EC}$ über $cos\gamma$.
Berechnung von α.
Berechnung von $\overline{BD}$ mit dem Kosinussatz.
Berechnung von A_{ABDE} aus der Summe von $\overline{EC}^2$ und A_{ECD} abzüglich A_{BCD}.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot cos\alpha}$ $\quad$ | Kosinussatz

$\overline{EC}$: $\quad cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}$ $\quad$ | $\cdot \overline{EC}; : cos\gamma$

$\quad \overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4{,}1}{cos33{,}4°} = 4{,}91$

$\overline{BC}$: $\quad \overline{BC} = \overline{EC} = 4{,}91$

α: $\quad \alpha = 90° + \gamma = 90° + 33{,}4° = 123{,}4°$

$\quad \overline{BD} = \sqrt{4{,}1^2 + 4{,}91^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 4{,}91 \cdot cos123{,}4°} = 7{,}94$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = A_{ABCD} + A_{ECD} - A_{BCD}$

A_{ABCD}: $\quad A_{ABCD} = \overline{EC}^2 = 4{,}91^2 = 24{,}11\ cm^2$

A_{ECD}: $\quad A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\gamma$ $\quad$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$\quad A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}91 \cdot 4{,}1 \cdot sin33{,}4° = 5{,}54\ cm^2$

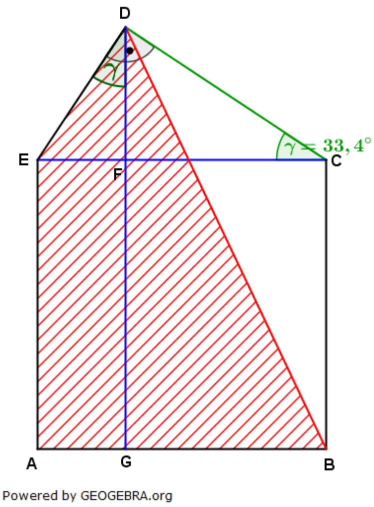
A_{BCD}: $\quad A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{CD} \cdot sin\alpha$ $\quad$ | trigonometrischer Flächeninhalt.

$\quad A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}91 \cdot 4{,}1 \cdot sin123{,}4° = 8{,}40\ cm^2$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = 24{,}11 + 5{,}54 - 8{,}40 = 21{,}25\ cm^2$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7{,}9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21{,}3\ cm^2$.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)
Berechnung von $\overline{EC} = \overline{AB}$ über den $cos\gamma$.
Berechnung von $\overline{FD}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den $tan\gamma$.
Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{EC}$ und $\overline{EF}$.
Die rote Fläche lässt sich jetzt berechnen aus:
Fläche Rechteck $AGFE$ + Fläche Dreieck EFD + Fläche Dreieck BDG.
Berechnung der Strecke $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{EC}$: $\quad cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}$ $\quad$ | $\cdot \overline{EC}; : cos\gamma$

$\quad \overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{cos\gamma} = \frac{4{,}1}{cos33{,}4°} = 4{,}91$

$\overline{FD}$: $\quad sin\gamma = \frac{\overline{FD}}{\overline{CD}}$ $\quad$ | $\cdot \overline{CD}$

$\quad \overline{FD} = \overline{CD} \cdot sin\gamma = 4{,}1 \cdot sin33{,}4° = 2{,}257$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{EF}$: $\quad tan\gamma = \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}} \qquad | \quad \cdot \overline{FD};\ : tan\gamma$

$\qquad \overline{EF} = \frac{\overline{FD}}{tan\gamma} = \frac{2{,}257}{tan33{,}4°} = 3{,}423$

$\overline{FC}$: $\quad \overline{FC} = \overline{EC} - \overline{EF} = 4{,}91 - 3{,}423 = 1{,}487$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = A_{AGFE} + A_{EFD} + A_{BDG}$

A_{AGFE}: $\quad A_{AGFE} = \overline{EF} \cdot \overline{AB} = 1{,}4882 \cdot 4{,}91 = 7{,}307$

A_{EFD}: $\quad A_{EFD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4882 \cdot 2{,}257 = 1{,}6794$

A_{BDG}: $\quad A_{BDG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FC} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3{,}423 \cdot (4{,}91 + 2{,}257) = 12{,}2663$

A_{ABDE}: $\quad A_{ABDE} = 7{,}307 + 1{,}6794 + 12{,}2663 = 21{,}2527$

$\overline{BD}$: $\quad \overline{BD} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \left(\overline{AB} + \overline{FD}\right)^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

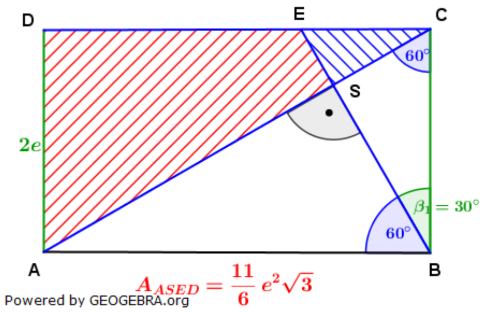
$\qquad \overline{BD} = \sqrt{3{,}423^2 + (4{,}9112 + 2{,}0257)^2} = 7{,}9435$

Die Strecke $\overline{BD}$ ist $7{,}9\ cm$ lang. Die Fläche des Vierecks $ABDE$ beträgt $21{,}3\ cm^2$.

Lösung W3b/2004

Lösungslogik

Die Fläche des Vierecks A_{ASED} errechnet sich aus der Fläche des Dreiecks A_{ACD} abzüglich der Fläche des Dreiecks A_{ESC}.
Berechnung von $\overline{DC}$ über den $tan30°$.
Bestimmung von $\overline{SC}$ über den $sin30°$.
Berechnung von $\overline{SE}$ über den $tan30°$.
Berechnung von A_{ACD} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{ESC} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{ASED} und Vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$A_{ASED} = A_{ACD} - A_{ESC}$

$\overline{DC}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \qquad | \quad \cdot \overline{DC};\ : tan30°$

$\qquad \overline{DC} = \frac{\overline{AD}}{tan30°} = \frac{2e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}}$

$\overline{SC}$: $\quad sin30° = \frac{\overline{SC}}{\overline{BC}} \qquad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\qquad \overline{SC} = \overline{BC} \cdot sin30° = 2e \cdot 0{,}5 = e$

$\overline{SE}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}} \qquad | \quad \cdot \overline{SC}$

$\qquad \overline{SE} = \overline{SC} \cdot tan30° = e \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{e\sqrt{3}}{3}$

A_{ACD}: $\quad A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{6e}{\sqrt{3}} = \frac{6e^2}{\sqrt{3}}$

A_{ESC}: $\quad A_{ESC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{SE} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{e^2\sqrt{3}}{6}$

A_{ASED}: $\quad A_{ASED} = \frac{6e^2}{\sqrt{3}} - \frac{e^2\sqrt{3}}{6} = \frac{36e^2 - e^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}} = \frac{36e^2 - 3e^2}{6\cdot\sqrt{3}}$

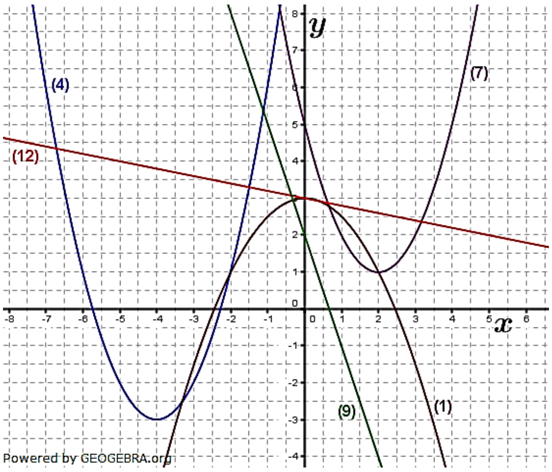
$\qquad = \frac{33e^2}{6\cdot\sqrt{3}} \qquad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\qquad A_{ASED} = \frac{33e^2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{33e^2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 3} = \frac{11}{6}e^2\sqrt{3} \qquad$ **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2004

<u>Klausuraufschrieb</u>



(a) gehört zur Gleichung (4)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(-4|-3)$

(b) gehört zur Gleichung (12)
Gerade mit negativer Steigung $m = -\frac{1}{5}$ und y–Achsenabschnitt $S_y(0|3)$.

(c) gehört zur Gleichung (9)
Gerade mit negativer Steigung $m = -3$ und y–Achsenabschnitt $S_y(0|2)$.

(d) gehört zur Gleichung (7)
Nach oben geöffnete Normalparabel mit Verschiebung nach rechts und nach oben, $S(2|1)$.

(e) gehört zur Gleichung (1)
Nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit Scheitelpunkt $S(0|3)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de